

This volume was digitized through a
collaborative effort by/ este fondo fue
digitalizado a través de un acuerdo
entre:

Biblioteca General de la
Universidad de Sevilla

www.us.es

and/y

Joseph P. Healey Library at the
University of Massachusetts Boston
www.umb.edu



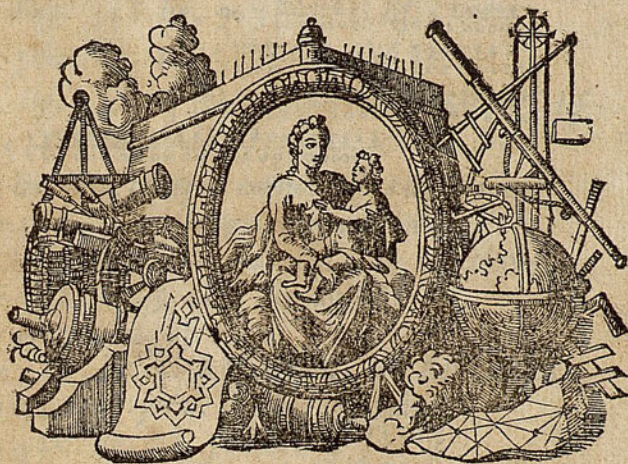
June 77
—
125

NOUVELLE MECANIQUE OU STATIQUE.

DONT LE PROJET FUT DONNE¹
EN M. DC. LXXXVII.

*Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies
Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse,
Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Pro-
fesseur des Mathématiques au College Mazarin.*

TOME SECOND.



A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue
des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

MECANIQUE

OU

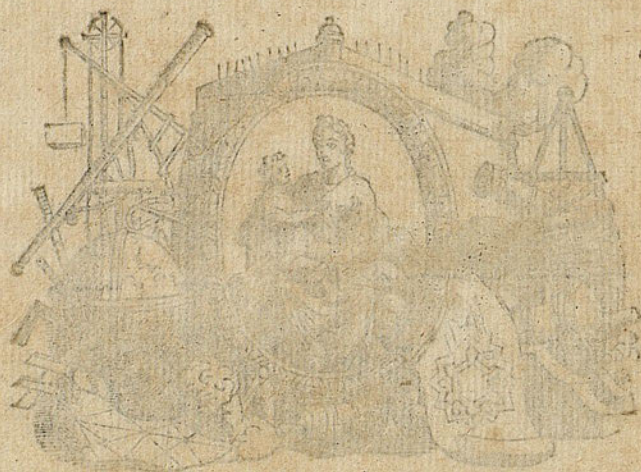
STATIQUE

DONT LE PROJET FUT DONNE

EN M.D.C.LXXXVII.

Par le célèbre M. VARIIGNON, de l'Académie
Royaume des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse,
Professeur du Roy en Philosophie au Collège Royal, & Pro-
fesseur des Mathématiques au Collège Mazarin.

TOME SECOND.



A PARIS,

Chez Claude JOMBART, rue St. Jacques, au coin de la rue
des Mathurins, l'Imprimeur-Normand.

M.DCC.XXV.

Notre Approuvé & Imprimeur Roy.

ORDRE DES FIGURES.

TOME II.

SECTION IV. SECONDE PARTIE.

Problèmes.

Planche XXIX.	page 70
XXX.	76
XXXI.	118
XXXII.	124
XXXIII.	124

SECTION VII.

XXXIV.	148
--------	-----

SECTION VIII.

XXXV.	172
-------	-----

SECTION IX.

XXXVI.	190
XXXVII.	206
XXXVIII.	206
XXXIX.	206
XL.	212
XLI.	222

SECTION X.

XLII.	246
XLIII.	258
XLIV.	278
XLV.	288
XLVI.	296

Pl. XLVII.	page 302
XLVIII.	310
XLIX.	320
L.	338
LI.	354
LII.	364
LIII.	368
LIV.	370
LV.	384
LVI.	394
LVII.	406

MACHINES

sans frottement.

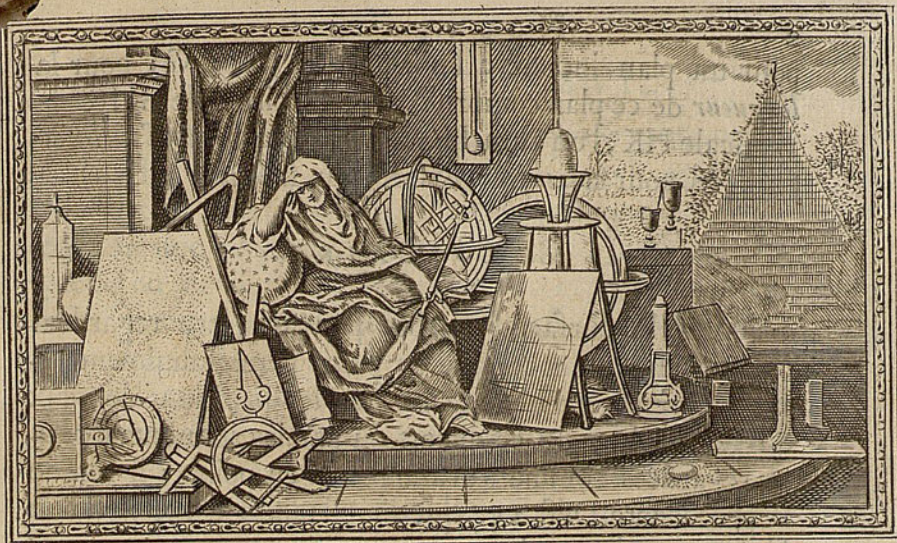
LVIII.	416
LIX.	422
LX.	426
LXI.	432
LXII.	448

EXAMEN

de l'Opinion de M. Borelli.

LXIII.	476
LXIV. & dernière,	478

NOUVELLE



NOUVELLE MECANIQUE.

TOME SECOND.

SECTION VI.

Des Poids soutenus sur des surfaces inclinées.

DEFINITION XXV.



UN plan qui n'est ni vertical, ni horizontal, s'appelle un *plan incliné*; l'angle qu'il fait avec l'horison s'appelle son *angle d'inclinaison*; la verticale comprise entre son extrémité supérieure & l'horizontale qui passe par l'inférieure, s'appelle sa *hauteur*; & la partie de cette horizontale comprise entre ce plan & sa hauteur, s'appelle sa *base*.

Suivant cela, si des surfaces S, V, on prend la moyenne

Tome II.

A

FIG. 204

pour un plan incliné à l'horison GK, & HG, pour la longueur de ce plan comprise entre l'horizontale GH & la verticale HK, l'on aura HGK pour son angle d'inclinaison, HK pour sa hauteur, & GK pour sa base.

COROLLAIRE.

Toutes les surfaces courbes pouvant être regardées comme faites d'une infinité de petits plans infiniment petits différemment inclinez suivant les directions de ceux qui les touchent en ces points ou parties infiniment petites regardées comme s'évanouissant en points; il suit de la précédente Déf. 25. que l'inclinaison d'une ligne ou surface courbe quelconque varie dans tous ses points, & que son inclinaison en chacun d'eux est toujours celle de sa tangente droite ou de son plan touchant en ce point: de sorte qu'en chaque point O de la surface courbe SOV, cette surface peut passer pour le plan incliné HG qui la touche en ce point O, ayant là HGK pour son angle d'inclinaison, HK pour sa hauteur, & GK pour sa base, en prenant HG pour la longueur de ce plan.

DEFINITION XXVI.

On appellera ici & dans la suite, *base* d'un corps ou d'un poids, ce qu'il aura de sa surface appliquée à celle sur laquelle il se trouvera: par exemple, ici O sera la base du poids EO, soit que O soit un point, ou une surface, selon la figure & la position de ce poids.

Suivant ce langage, un poids aura autant de *bases* qu'il touchera de surfaces différentes en des endroits différents; c'est pour cela que dans la suite nous lui donnerons deux *bases*, lorsqu'il sera soutenu entre deux surfaces, une pour chacune.

Ce langage extraordinaire n'est que pour abréger nos expressions, & rendre par-là nos démonstrations plus courtes & moins embarrassées.

DEFINITION XXVII.

Si du point A de concours des directions quelconques AM, AR, du poids EO & de la puissance R qui le retiendrait en équilibre sur la surface quelconque SV, on imagine une perpendiculaire AD à cette surface, à laquelle on va voir (Th. 26. Corol. 1. 2.) que pour cet équilibre cette perpendiculaire doit passer par quelqu'un des points O de la base du poids; & si d'un point quelconque D de cette perpendiculaire AD, on mène une autre perpendiculaire DM à la direction AM de ce poids EO. La force qu'on a vû dans les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & qu'on va voir encore dans les part. 1. 2. du Th. 26. devoir résulter du concours d'action de ce poids EO & de la puissance R sur la surface SV suivant AD, sera appelée la *charge* de cette surface; & la résistance directement opposée que (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 2.) cette surface y fera, s'appellera la *résistance totale*, ou la *résistance directe*, ou simplement la *résistance*; ce qu'elle en fera (Lem. 3. Corol. 6. 7.) de M vers A suivant la direction MA du poids EO, s'appellera la *résistance verticale*; & on appellera la *résistance horizontale* ce qu'elle en fera de même (Lem. 3. Corol. 6. 7.) de D vers M suivant DM.

Les efforts suivant AM, MD, directement opposez & égaux à ces résistances verticale & horizontale, s'appelleront aussi les *charges* des plans GK, HK, auxquels ces efforts sont (Hyp.) perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Les surfaces, soit planes, soit courbes, s'appelleront SV dans la suite, pour faire quadrer chaque démonstration à toutes à la fois avec moins de figures & de discours: on prendra HG pour la longueur de la plane ou du plan touchant de la courbe au point O de la charge; & par conséquent (Déf. 25. & son Corol.) la verticale HK pour sa hauteur, & l'horizontale KG pour sa base.

On prend ici à l'ordinaire pour une surface inclinée

quelconque, & pour sa base horifontale, les sections SV , GK , faites par un même plan vertical qui les coupe perpendiculairement toutes deux: il en fera de même de la hauteur HK de cette surface.

Enfin lorsqu'il s'agira de deux surfaces inclinées entre-elles, on les supposera toujours avoir de telles sections de leurs bases en ligne droite.

THEOREME XXVI.

Fondamental de la presente Section 6.

FIG. 205.
206. 207.
208.

Quelques soient la surface inclinée SV , le poids mobile EON , la puissance R qui lui est appliquée, & les directions FC , ER , de ce poids & de cette puissance; & conséquemment aussi quelque angle RAC que ces deux directions fassent entre-elles: soit imaginé un parallélogramme $BACD$ fait de côtes AB , AC , pris sur les directions ER , FC , de la puissance R & du poids EON depuis le point A de concours de ces mêmes directions.

I. *S'il y a équilibre entre cette puissance R & ce poids EON , soutenu par elle sur la surface SV , & que la diagonale AD de ce parallélogramme $BACD$ soit perpendiculaire à cette surface, & la seule qu'on lui puisse ainsi mener du point A (la raison de cette exception paroîtra dans le Scholie suivant) cette diagonale AD passera toujours par quelque point O de la base du poids EON ; & l'impulsion ou la charge résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON , sur la surface SV , sera toujours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD à chacun des côtes AB , AC , qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme $BACD$.*

II. *En ce cas d'équilibre sur quelque surface SV que ce soit, sans en excepter presentement aucune, si les côtes AB , AC , du parallélogramme $BACD$ sont entr'eux comme la puissance R & la pesanteur du poids EON , sur les directions desquelles on suppose ces côtes; la diagonale AD de ce parallélogramme sera perpendiculaire à cette surface SV en quelque point O de*

la base du poids EON ; & la charge ou impression résultante du concours d'action de ces deux forces sur cette surface, sera encore à chacune d'elles comme cette diagonale AD à chacun des côtéz AB , AC , qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme $BACD$.

III. Reciproquement sur quelque surface que ce soit encore, si le parallélogramme $BACD$ a encore ses côtéz AB , AC , entr'eux en raison de la puissance R & de la pesanteur du poids EON , sur les directions desquelles on suppose ces côtéz ; & que la diagonale AD de ce parallélogramme soit perpendiculaire à cette surface quelconque SV en quelque point O de la base du poids EON : ce poids sera toujours alors soutenu sur cette surface par la puissance R en équilibre avec lui.

DEMONSTRATION.

PART. I. Les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir que pour que la puissance R soutienne le poids EON sur la surface quelconque inclinée SV , l'impression ou la force résultante du concours d'action de cette puissance & de la pesanteur de ce poids sur lui, doit être dirigée suivant une perpendiculaire menée du point A à cette surface, laquelle perpendiculaire passe par la base de ce poids. Donc cet équilibre étant ici supposé entre la puissance R & le poids EON sur cette surface SV ou HG , & la diagonale AD y étant aussi supposée perpendiculaire à cette même surface, & la seule qu'on y puisse mener du point A ; l'impression résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON sur lui, doit être ici suivant cette diagonale AD , & cette diagonale passer par la base de ce poids EON . Donc aussi (Lem. 3. Corol. 4.) cette force ou impression de A vers D suivant AD perpendiculaire en O à la surface SV , qui en ce cas d'équilibre la soutient ainsi toute entière, c'est-à-dire, la charge de cette surface en ce point O , résultante sur elle du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON , doit être ici à chacune de ces deux forces generatrices de celle-là, comme cette diag-

nale AD est à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme BACD. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Puisque (*Hyp.*) la puissance R & la pesanteur du poids EON sont ici entr'elles comme les côtez AB, AC, du parallélogramme BACD ; l'impression résultante de leur concours d'action sur ce poids, doit être (*Lem. 3. part. 4. & Corol. 1. nomb. 1.*) de A vers D suivant la diagonale AD de ce parallélogramme comme (*Lem. 3. Corol. 6.*) si ce corps au lieu d'être poussé ou tiré par ces deux forces à la fois, ne l'étoit en ce sens que par une seule qui fût égale à ce qu'il lui en résulte du concours d'action de ces deux-là. Donc dans le cas d'équilibre ici supposé entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, cette diagonale doit être (*Lem. 3. Corol. 8. 9.*) perpendiculaire à cette surface en quelque point O de la base de ce poids ; & (*Déf. 27.*) la charge de cette surface, égale (*Ax. 4.*) à cette force ou impression résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, que cette surface soutient toute entière d'une résistance directement opposée, être (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 2.*) à chacune de ces deux forces génératrices de celle-là, comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme BACD, ainsi que dans la précédente part. 1. *Ce qui est tout ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Puisque l'on suppose encore ici la puissance R & la pesanteur du poids EON en raison des côtez AB, AC, du parallélogramme BACD, pris sur leurs directions ; & que de plus la diagonale AD de ce parallélogramme est perpendiculaire à la surface SV ou HG en quelque point O de la base du poids EON ; l'impression résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur de ce poids EON sur ce corps, doit être ici (*Lem. 3. part. 4. & Corol. 1. nomb. 1.*) de A vers D suivant cette diagonale AD, & conséquemment être aussi

(*Hyp.*) perpendiculaire à la surface SV par quelque un des points O de la base du poids EON. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) ce poids doit être ici en équilibre avec la puissance R sur cette surface SV. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

A U T R E D E M O N S T R A T I O N .

PART. I. Au lieu de la surface SV imaginons pour un moment une puissance T, qui avec une corde ZT dirigée suivant DA prolongée de ce côté-là, soutienne avec la puissance R le poids EON presentement soutenu avec des cordes seulement. Il est manifeste que puisque (*Hyp.*) la droite TD est perpendiculaire en O à la surface SV, & la seule (*Hyp.*) qu'on lui puisse mener par le point A; non seulement cette surface SV ne peut suppléer la puissance T, & soutenir en sa place avec la puissance R le poids EON, à moins (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) que cette perpendiculaire AO ne passe par quelque point de la base de ce poids; mais encore qu'alors la résistance ou (*Déf.* 27.) la charge de cette surface ou de son point O seroit (*princip. gener. Corol.* 2.) égale à la puissance T. Or cette puissance T (à la place de la résistance de cette surface SV) soutenant ainsi avec la puissance R le poids EON, ou (ce qui revient au même) se trouvant ainsi soutenue par le concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, comme si elle étoit un poids dirigé suivant AT, & soutenu avec des cordes AR, AC, par deux puissances R, C, dont celle-ci (C) fût égale à la pesanteur du poids EON, & de même direction AC que cette pesanteur : cette puissance T (dis-je) ainsi soutenue, seroit alors (*Th.* 1. *part.* 3. 4.) à la puissance R & à la pesanteur du poids EON, comme la diagonale AD du parallélogramme BACD est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. Donc non seulement cette diagonale AD perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la surface SV restituée au lieu de la puissance T, doit passer ici par la base du poids EON; mais encore la charge de cette

surface y doit être aussi à la puissance R & à ce poids EON, comme cette diagonale AD du parallélogramme BACD est à chacun des côtez AB, AC, correspondans sur les directions de cette puissance R & de ce poids EON.

Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.

PART. II. En supposant encore ici la puissance T au lieu de la surface SV, dont elle supplée la résistance en équilibre (*Hyp.*) avec la puissance R & le poids EON, comme si cette puissance T étoit un poids soutenu seulement avec des cordes AR, AC, par deux puissances R, C, dont la seconde (C) fût égale à la pesanteur du poids EON, & de même direction AC que cette pesanteur; la part. 4. du Th. 1. fait voir que puisque (*Hyp.*) les côtez AB, AC, du parallélogramme BACD sont ici entr'eux comme la puissance R & la pesanteur du poids EON, la direction TA de la puissance T doit être en ligne droite avec la diagonale AD de ce parallélogramme. Or les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir aussi qu'afin que la surface SV supplée cette puissance T par sa résistance, la direction TA prolongée de cette même puissance T doit être perpendiculaire en quelque point O de la base du poids EON. Donc en ce cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV remise en sa place au lieu de la puissance T, la diagonale AD du parallélogramme BACD doit être perpendiculaire à cette surface SV en quelque point O de la base du poids EON, & la résistance de cette surface alors égale (*princ. gen. Cor. 2.*) à la puissance T, être aussi pour lors (*Th. 1. part. 4.*) à la puissance R & au poids EON, comme cette diagonale AD du parallélogramme BACD est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

PART. III. Puisqu'on suppose encore ici les côtez AB, AC, du parallélogramme BACD sur les directions de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, & en raison de ces deux forces; la part. 6. du Th. 1. fait voir qu'une puissance T appliquée au poids EON par le moyen
d'une

d'une corde ZT dirigée suivant la diagonale DA prolongée de ce parallélogramme, & qui seroit à la puissance R. & à ce poids EON, comme cette diagonale AD est à chacun des côtez correspondans AB, AC, de ce parallélogramme, demeurerait en équilibre avec cette puissance R. & ce poids EON ainsi soutenu avec des cordes ZT, ER, par ces deux puissances T, R. Donc si au lieu de la puissance T, de qui la direction TD passe (*Hyp.*) par le point O de la surface du poids EON, une autre surface immobile SV se présente pour soutenir ce poids par une base dans laquelle soit ce point O, & perpendiculairement à cette direction TD ou AD; cette surface SV (*Lem. 3. Corol. 8. 9.*) soutiendra effectivement le poids EON en équilibre avec la puissance R. Ce qu'il falloit encore 3°. démontrer.

Ce qu'on voit ici des surfaces convexes SV, s'entendra sans peine des concaves: tout ce qui précède se démontrera précisément de même. Les cas où le point A de concours des directions de la puissance R & du poids EON se trouveroit hors l'étendue de ce poids, se résoudreont aussi comme les précédens: le *Lem. 3.* & ses Corollaires font voir que la diversité quelconque des situations de ce point A, ne doit rien changer aux raisonnemens précédens, non plus qu'aux conséquences qu'on en va déduire; c'est-à-dire, que tout cela doit également convenir à toutes les situations possibles du point A de concours des directions du poids EON & de la puissance R. C'est pourquoi on n'en exprime point ici les figures, de peur d'en multiplier inutilement le nombre.

On n'exprime point non plus la figure d'aucune surface horizontale, parce que la ligne de direction de quelque poids que ce soit, lui étant toujours perpendiculaire, il se soutient dessus de lui même, & sans le secours d'aucune puissance, par la même raison qu'il en a besoin (comme on vient de le voir) pour demeurer en repos sur quelqu'autre surface que ce soit. Le présent Th. 26. ne laisse pourtant pas de s'étendre encore jusque-là, ainsi qu'on le verra dans les Corollaires.

COROLLAIRE I.

La part. 2. fait voir qu'aucun poids EON ne peut être soutenu par aucune puissance R sur aucune surface SV, à moins que la diagonale AD du parallélogramme BADG qui auroit ses côtez AB, AC, en raison de cette puissance & de la pesanteur de ce poids sur leurs directions, ne tombe perpendiculairement sur cette surface, & ne passe en même tems par quelque'un des points de la base de ce poids.

COROLLAIRE II.

Mais aussi suivant la partie 3. dès que l'un & l'autre arrivera, la puissance R appliquée alors à ce poids EON, ne manquera pas de le soutenir sur cette surface SV.

COROLLAIRE III.

Lorsque le poids ne touche la surface qu'en un point, comme lorsqu'il ne s'y appuie que sur un de ses angles, ou que sur un point de la convexité de sa courbure, selon qu'il est angulaire, ou d'une surface courbe; alors n'y ayant qu'une seule perpendiculaire possible à cette surface sur la base de ce poids ainsi réduite à un point, il suit du Corol. I. qu'il n'y a point de puissance capable de le soutenir en cet état, à moins que le concours des lignes de direction de cette puissance & de la pesanteur de ce poids, ne se fasse en quelque point de cette perpendiculaire, c'est-à-dire, à moins que la direction de cette puissance ne passe par le point où cette perpendiculaire & la direction du poids se rencontrent; & qu'ainsi lorsque ce poids est sphérique, ces deux lignes passant toujours par son centre, il n'y a point de puissance capable de le soutenir sur quelque surface inclinée que ce soit, à moins que la ligne de direction de cette puissance ne passe aussi par le centre de cette Sphere.

La raison de cela vient, suivant le Corol. I. de ce que lorsqu'un corps ne touche ou ne s'appuie que par un seul

de ses points sur la surface inclinée, le concours de sa direction & de celle de la puissance qui lui est appliquée, ne se peut faire aussi qu'en un seul point d'où l'on puisse mener une perpendiculaire à la surface par la base de ce poids. Il en est tout autrement lorsque le poids est de figure & de situation à toucher en plusieurs points la surface inclinée, parce qu'alors on y peut trouver aussi plusieurs points d'où l'on peut tirer de telles perpendiculaires à cette surface par la base de ce poids.

COROLLAIRE IV.

Il n'y a point non plus de puissance R quelle qu'elle soit, qui puisse soutenir aucun poids EON sur quelque surface SV que ce puisse être, à moins que la direction AR de cette puissance ne se trouve dans le complément NAO (à deux angles droits) de l'angle CAO compris entre la direction AC de ce poids, & la droite AO menée du point A perpendiculairement à la surface SV. Car,

1°. Si cette direction AR de la puissance R, se confondoit avec AN, elle ne feroit plus aucun angle avec AC: ainsi (Ax. 4. & Lem. 3. Corol. 2.) cette puissance R porteroit seule tout le poids EON sans le secours de la surface SV; ce qui est contre l'hypothèse.

2°. Si cette ligne AR de direction de la puissance R, se confondoit avec AO, ou si elle sortoit de l'angle NAO, la diagonale AD du parallélogramme BACD, se trouveroit alors vers G obliquement à HG; ce qui feroit nécessairement (Lem. 3. Corol. 7. 8. 9.) tomber le poids EON de ce côté-là; ce qui est encore contre l'hypothèse.

Donc la direction AR de la puissance R doit toujours se trouver dans le complément NAO de l'angle CAO: de sorte que le complément à deux droits est tout l'espace du mouvement que cette direction AR peut avoir, c'est-à-dire, tout l'espace dans lequel doivent être comprises toutes les directions AR des puissances R capables de soutenir le poids EON sur le point O de la surface SV.

Par un raisonnement à peu près semblable, on prouvera qu'en cas d'équilibre la direction AC du poids ne peut jamais se rencontrer dans l'angle RAO.

C O R O L L A I R E V.

En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, le plan BAC, ou le parallélogramme BACD fait de côtez AB, AC, qui (*Hyp.*) leur sont proportionnels sur leurs directions, est toujours perpendiculaire à cette surface; puisque (*part. 2.*) la diagonale AD de ce parallélogramme l'est toujours à cette même surface SV.

C O R O L L A I R E VI.

En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, la *part. 1.* fait voir que si la diagonale AD d'un parallélogramme BACD fait de côtez pris sur les directions de cette puissance & de ce poids, la charge de cette même surface, qui lui résulte du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, sera toujours alors à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD est à chacun des côtez AB, AC, qui répondent sur leurs directions dans le parallélogramme BACD; & conséquemment que dans cette *part. 1.* ces côtez AB, AC, de ce parallélogramme sont toujours entr'eux comme la puissance R & le poids EON, ainsi qu'on l'a supposé dans la *part. 2.* D'où l'on voit que le parallélogramme BACD fait de côtez AB, AC, pris sur les directions de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, doit toujours être ici le même, soit qu'on y suppose ces côtez en raison de ces forces comme dans la *part. 2.* ou qu'on en suppose la diagonale perpendiculaire à la surface SV par la base du poids EON.

C O R O L L A I R E VII.

Les *part. 1. 2.* font voir qu'en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, l'im-

pression que cette puissance & la pesanteur de ce poids font ensemble sur cette surface, c'est-à-dire, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, est toujours à chacune de ces forces comme la diagonale AD du parallélogramme BACD, perpendiculaire à cette surface, est à chacun des deux côtes AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans ce parallélogramme BACD; l'on aura toujours alors cette charge de la surface SV, la puissance R, & la pesanteur du poids EON, en raison des trois parties AD, AB, AC, de leurs directions, ou (à cause que $BD=AC$ dans le parallélogramme BACD) en raison des trois côtes AD, AB, BD, du triangle BAD. Donc une quelconque de ces trois forces sera toujours moindre que la somme des deux autres, chacun des trois côtes d'un triangle quelconque étant toujours plus petit que les deux autres pris ensemble.

COROLLAIRE VIII.

C'a donc été une méprise que de dire, comme a fait un Auteur du premier ordre, qu'il est certain que le poids O ne pèse sur le plan AD que la différence qui est entre la force qu'il faut à le soutenir sur ce plan, & celle qu'il faut pour le soutenir en l'air; comme s'il pèse cent livres, & qu'il n'en faille que quarante pour le soutenir sur le plan AD, ce plan en porte soixante seulement. A ce compte ce poids de 100 livres seroit égal à la somme de 40+60 faite de la puissance requise pour le soutenir sur le plan AD, & de la charge de ce plan; ce que le précédent Corol. 7. fait voir être faux, aussi-bien que cette proposition d'un autre Auteur: *Gravitatio in planum horisontale ad gravitationem in planum inclinatum, est ut secans AD ad excessum secantis supra radium AB*; laquelle expression ne signifie en Latin que ce qu'on vient de voir en François de l'autre Auteur.

Fig. 2650

COROLLAIRE IX.

Fig. 205.
206. 207.
208.

Puisque (*Corol. 7.*) en cas d'équilibre entre la puissance R & la pesanteur du poids EON sur la surface quelconque SV, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, cette puissance R, & cette pesanteur du poids EON, sont toujours entr'elles comme les trois côtez AD, AB, BD, du triangle BAD; & que ces trois côtez sont toujours entr'eux (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme les sinus des trois angles ABD, ADB, BAD, qui leur sont opposez dans ce triangle, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) comme les sinus des trois angles BAC, CAD, BAD, complemens ou égaux à ceux-là: la charge de cette surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON sur elle, doit toujours être à chacune de ces deux forces en cas d'équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur cette surface SV, comme le sinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, est à chacun des sinus des angles CAD, BAD, que ces directions reciproquement prises, font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la surface SV.

COROLLAIRE X.

Donc en cas d'équilibre la puissance R est toujours aussi au poids EON, comme le sinus de l'angle CAD est au sinus de l'angle BAD, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que leurs directions font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la surface SV sur laquelle on les suppose ici en équilibre.

COROLLAIRE XI.

De ce que suivant les part. 1. 2. la charge de la surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON en équilibre sur elle, est alors à chacune de ces deux forces comme la diagonale AD du parallelogramme BACD (fait comme dans celle qu'on voudra des part. 1. 2.) est à chacun de ses côtez AB,

AC, pris sur leurs directions ; il est visible que plus l'angle BAC (compris entre ces directions) sera grand , la diagonale AD en étant d'autant moins grande (quoiqu'en raison différente) par rapport aux mêmes côtez AB, AC, de ce parallélogramme BACD , moins aussi sera grande la charge de la surface SV, sur laquelle la même puissance R. & le même poids EON feront ainsi en équilibre entr'eux ; & que cet angle BAC peut augmenter à tel point que cette charge sera si petite qu'on voudra , sans cependant (*Lem. 9. part. 3.*) pouvoir devenir moindre que la différence du poids & de la puissance : le cas de la moindre charge sera lorsque la direction de cette puissance R, directement opposée à celle du poids EON, rendra (*Def. 11.*) l'angle BAC infiniment obtus : auquel cas la surface inclinée SV ou HG se trouvera horizontale , & le poids EON plus grand de cette valeur que la puissance R ; ou s'il lui est égal , cette charge sera nulle , & la surface SV se trouvera au contraire verticale , cette égalité , qui exige par tout (*Corol. 8.*) les angles BAD, CAD, égaux entr'eux , exigeant ainsi AD horizontale , & conséquemment HG (sa perpendiculaire en O) verticale lorsque l'angle BAC est infiniment obtus.

On entend ici par une surface horizontale ou verticale, un plan qui le soit, ou bien un point d'une surface courbe, dont le plan touchant en ce point, soit horizontal ou vertical.

COROLLAIRE XII.

Le précédent Corol. 11. peut encore se déduire du Corol. 7. par le moyen du Corol. 2. du Lem. 7. Car ce Corol. 7. fait voir en general qu'en cas d'équilibre entre la puissance R & la pesanteur du poids EON sur la surface SV, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, est toujours à chacune de ces deux forces, comme le sinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, est à chacun des sinus des angles CAD, BAD, que ces directions réciproquement prises, font avec la perpendiculaire AO ou AD.

menée de leur concours A à cette surface SV. Or lorsque l'angle BAC est infiniment obtus, c'est-à-dire (Lem. 6. Corol. 4.) lorsque les côtes AB, AC, du parallélogramme BACD se trouvent en ligne droite, la diagonale AD de ce parallélogramme se trouvant alors confondue avec un de ces deux côtes, sçavoir, avec celui qui exprime la plus grande des deux forces, dont ils sont les directions, & conséquemment (Déf. 11.) un des deux angles CAD, BAD, se trouvant alors infiniment aigu, le Corol. 2. du Lem. 7. fait voir qu'alors le sinus de l'angle infiniment obtus BAC, doit être égal à la différence des sinus de ces deux-là. Donc aussi pour lors la charge de la surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON en équilibre entr'eux (Hyp.) sur elle, doit être égale à la différence de ces deux forces; & le reste comme dans le précédent Corol. 11.

Il suit de tout ce qui précède, que la charge d'une surface inclinée quelconque, sur laquelle un poids aussi quelconque est soutenu par quelque puissance que ce soit, n'est pas toujours la même, mais qu'elle varie avec l'angle que font entr'elles les directions du poids & de la puissance, & augmente à mesure que cet angle devient plus aigu.

Pour abréger nos expressions, la charge résultante du concours d'action de la puissance R & du poids EON sur la surface SV en cas d'équilibre entr'eux sur cette surface, étant (démonstrat. de la part. 2.) suivant AO perpendiculaire à cette même surface en O; ce point O de cette surface SV, lequel soutient ainsi cette charge toute entière, sera appelée dans la suite le point sur lequel le poids EON est soutenu, quand même ce poids toucheroit cette surface en d'autres points. C'est aussi de cette manière qu'il faut entendre cette expression, s'il nous est arrivé de nous en être déjà servis.

C O R O L L A I R E XIII.

Il suit aussi du Corol. 10. qu'il faut d'autant moins de force R pour soutenir un poids EON suivant la même direction

direction AR sur quelque surface SV que ce soit, que cette surface, si elle est plane, ou que son plan touchant au point O, auquel la perpendiculaire AO la rencontre, est plus incliné, ou que l'angle d'inclinaison de ce plan avec l'horison est plus petit, quoiqu'en raison différente; parce que la raison du sinus de l'angle CAD au sinus de l'angle BAD en est d'autant moindre; & comme cet angle d'inclinaison, tel qu'est HGK dans les Fig. 205. 206. peut diminuer à l'infini, la force R qu'il faut pour soutenir un poids quelconque EON suivant la même direction AR sur quelque surface SV que ce soit, peut aussi diminuer à l'infini: de sorte que lorsque cette surface sera infiniment inclinée, c'est-à-dire, horizontale, du moins dans le point où la perpendiculaire AO la rencontre, cette force R sera nulle, ou réduite à zero, c'est-à-dire, qu'il n'en faudra plus alors pour soutenir le poids EON sur cette surface. La raison en est évidente; puisque la résistance de cette surface alors perpendiculaire à la direction de ce poids, lui étant directement opposée, en soutiendra seule (ax. 4.) toute la pesanteur.

FIG. 205.
206.

COROLLAIRE XIV.

Cela se peut encore démontrer sans le secours des sinus, si l'on considère, par exemple, dans les Fig. 205. 206. dont le plan HG soit aussi le touchant d'une surface courbe en celui O de ses points sur lequel le poids EON est soutenu: si l'on considère, dis-je, que les perpendiculaires AD en O sur HG, & AC en P sur l'horizontale GK, rendent toujours les angles HGK, CAD, égaux entre eux; & qu'ainsi à mesure que le premier d'inclinaison HGK diminuera par l'approche du plan HG vers l'horison GK, l'autre CAD diminuera aussi par l'approche de la diagonale AD du parallélogramme BACD vers son côté vertical AC, ou du côté AC vers AD, si l'équilibre se fait sur un même point O de la surface HG ou SV; ce qui changeant ce parallélogramme en un autre d'un moindre rapport de AB (supposée de direction constante).

à AC, le poids EON successivement soutenu sur le même plan HG (*Hyp.*) par différentes puissances R dirigées toutes suivant la même direction AR, les exigera pour cela (*part. r.*) toujours moindres à mesure que l'angle d'inclinaison HGK diminuera, & enfin nulles lorsque cet angle le fera, c'est-à-dire, lorsque ce plan HG fera horizontal, ou que la surface SV le fera au point touché par ce plan, sur lequel point ce même poids EON feroit ainsi successivement soutenu par différentes puissances R toutes de même direction AR.

C O R O L L A I R E X V.

Au contraire pour soutenir ce poids EON sur le même point O d'une surface quelconque toujours également inclinée en ce point, mais suivant différentes directions AR des puissances R capables de l'y soutenir chacune suivant la sienne; il suit du Corol. 10. qu'il leur faut d'autant plus de force que l'angle DAB partie (*Corol. 4.*) de l'angle DAN, comprise entre la perpendiculaire AO à la surface SV, & la direction AB de la puissance R qui soutient ce poids EON, diffère davantage de l'angle droit; parce que le sinus de cet angle DAB en étant (*Def. 9.*) d'autant moindre, la raison du sinus de l'angle CAD (*Hyp.*) toujours le même, en sera d'autant plus grande à celui-là: & comme cet angle DAB peut être plus ou moins grand qu'un angle droit, & en différer de plus en plus jusqu'à ce que AB (*Corol. 4.*) se confonde avec AN ou avec AO, sans que AB sorte de l'angle NAO; la puissance R qui soutient (*Hyp.*) ce poids EON, doit (*Corol. 10.*) augmenter ou diminuer de part & d'autre jusques-là; mais différemment selon que AB s'approche de AN ou de AO. Car,

1°. Cette puissance R ne peut jamais être plus grande (*Corol. 4. 10.*) par l'approche de cette direction AB vers AN, qui rende l'angle DAB plus grand qu'un droit, que lorsque cette direction AB se confond avec AN, puisque

l'angle DAB (alors égal à DAN) différant pour lors de l'angle droit le plus qu'il en puisse différer de ce côté-là, sans que AB sorte (*Corol. 4.*) de l'angle DAN, la raison du sinus de l'angle DAC au sinus de DAB, c'est-à-dire (*Corol. 10.*) la raison de la puissance R au poids EON, se trouve la plus grande qu'elle puisse être en cas de l'angle DAB plus grand qu'un droit. Mais cet angle DAB se trouvant alors complément de CAD à deux droits, & conséquemment (*Déf. 9. Corol. 2.*) de même sinus que lui; la puissance R devroit alors (*Corol. 10.*) être égale au poids EON qu'elle soutiendrait. Donc cette puissance R, qui par l'approche de sa direction AR vers AN depuis l'angle droit avec AO, doit toujours augmenter, ne le peut que jusqu'à se trouver égale au poids EON qu'elle soutiendrait sur le point O de la surface SV: sçavoir, lorsque AB seroit confondue avec AN, & que la puissance R seroit ainsi d'une direction directement contraire à celle du poids EON; auquel cas il est visible (*ax. 4.*) que cette puissance soutiendrait seule le poids sans le secours de la surface SV, qui alors ne porteroit plus rien.

2°. Au contraire cette puissance R peut augmenter à l'infini par l'approche de sa direction AR vers AO; parce que la raison du sinus de l'angle CAD au sinus de BAD augmentant à mesure que la ligne AB s'approche de AO en s'éloignant de la situation où elle feroit un angle droit avec AO; cette puissance R peut aussi (*Corollaire 10.*) augmenter de ce côté-là jusqu'à ce que (*Corol. 4.*) sa direction AB concoure avec AO en se confondant avec elle. Or en ce cas l'angle BAD (*Déf. 11. & Corol. 3. du Lem. 6.*) se trouvant infiniment petit, la raison du sinus de l'angle fini CAD au sinus de cet infiniment petit BAD, sera (*Déf. 9.*) infinie; & conséquemment aussi (*Cor. 10.*) celle de la puissance R au poids EON en équilibre (*Hyp.*) avec elle sur le point O de la surface SV, c'est-à-dire, que cette puissance R devroit pour lors être infinie pour soutenir ainsi le poids fini quelconque EON sur le point O de la surface HG ou SV. Donc cette puissance R peut

effectivement augmenter à l'infini dans le mouvement que la direction AR peut avoir depuis la situation où elle feroit un angle droit avec AO perpendiculaire à cette surface, jusqu'au concours de ces deux mêmes lignes en une, & demeurer cependant toujours en équilibre avec le même poids EON sur le même point O d'une surface inclinée quelconque SV .

On vient de supposer dans ce Corol. 15. & on le supposera toujours dans la suite, conformément au Corol. 4. qu'en cas d'équilibre entre la puissance quelconque R & le poids EON sur la surface aussi quelconque SV , la direction AB de cette puissance R ne peut jamais être au dehors de l'angle DAN ; parce que si cette direction AB passoit dans quelqu'un des angles NAC , CAO , l'impression résultante du concours d'action de la puissance quelconque R & de la pesanteur du poids EON sur ce poids, devant (Lem. 3. Corol. 2.) le porter suivant une ligne qui du point A passeroit aussi à travers de cet angle, sans pouvoir jamais être perpendiculaire à la surface SV sur laquelle AO l'est déjà (Hyp.) & l'unique qui s'y puisse mener du point A par la base du poids EON ; ce poids ne pourroit jamais alors (Lem. 3. Corol. 8. & Th. 26. Corol. 1.) faire équilibre sur cette surface avec la puissance R , quelle qu'elle fût; ce qui seroit contre la présente hypothèse, dans laquelle on les y suppose en équilibre. C'est, dis-je, pour cela qu'on vient de supposer dans le précédent Corol. 15. & qu'on supposera toujours dans la suite, qu'en cas d'équilibre entre une puissance R & un poids quelconque EON sur une surface aussi quelconque SV , la direction AB ou AR de cette puissance R ne peut jamais sortir de l'angle DAN compris entre la direction AC du poids EON prolongée vers N , & la perpendiculaire AO ou AD menée du point A sur la surface SV (par la base du poids EON) à laquelle, dans le présent Th. 26. & dans tous ses Corollaires on suppose qu'on n'en peut mener qu'une seule du point A , pour la raison qu'on en dira dans le Scholie suivant, de peur de digression dans ce Théoreme-ci.

C O R O L L A I R E X V I.

Tout le contenu du précédent Corol. 15. peut encore être démontré sans le secours des sinus. Imaginons d'abord la direction AR de la puissance R, perpendiculaire à la droite AX, qu'on suppose l'être en O à la surface SV ou HG par la base du poids EON en équilibre sur ce point O avec la puissance R; & conséquemment que le côté CD du parallélogramme BACD soit perpendiculaire à la diagonale AD de ce parallélogramme. Il est manifeste que cette perpendiculaire CD est la plus courte de toutes les droites CD, Cd, Cδ, &c. qu'on peut mener du même point C sur cette diagonale prolongée, & que les plus éloignées de CD sont les plus grandes. Par conséquent la puissance R, qui soutiendrait le poids EON en O sur la surface quelconque SV, suivant AR, devant être à ce poids (Corol. 6.) comme AB ou CD est à AD, feroit ici la plus petite qui l'y pût soutenir, & moindre que toute autre qui l'y soutiendrait suivant toute autre direction Ar ou Aρ, &c. parallèle à Cd ou Cδ, &c. cette nouvelle puissance en r ou en ρ, &c. devant alors (Cor. 6.) être à ce même poids EON en raison de Cd ou Cδ, &c. côté du parallélogramme bACd ou βACδ, &c. à son autre côté AC, le même pour tous ces parallélogrammes comme le poids EON est ici (Hyp.) toujours le même à soutenir par chacune de ces puissances placées en R, r, ρ, &c. sur le même point O de la surface SV. Donc,

1°. Le côté Cd du parallélogramme bACd augmentant à mesure que l'angle ACd ou son égal NAr se trouve plus aigu, & cela jusqu'à ce que ce côté Cd confondu avec CA, lui soit égal; la puissance en r pour soutenir le poids EON sur le même point O de la surface SV suivant une direction Ar parallèle à Cd, doit toujours augmenter jusqu'à ce que cette direction Ar soit confondue avec AN, ou sa parallèle Cd avec CA; & à cet instant de confusion être égale au poids EON, sans pouvoir devenir plus grande de ce côté, Cd ne pouvant devenir plus

grande que CA par l'approche de sa parallèle Ar vers AN, au-delà de laquelle elle ne peut (*Corol. 4.*) passer en sortant de l'angle DAN sans rompre l'équilibre supposé. Donc depuis la situation de sa direction AR perpendiculaire à AO, cette puissance R en r , doit toujours augmenter par l'approche de sa nouvelle direction Ar vers AN, jusqu'à ce que cette direction Ar se trouve confondue avec AN; & à cet instant de confusion se trouver égale au poids EON, sans pouvoir être plus grande de ce côté-là, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le nomb. 1. du précédent Corol. 15.

2^o. Au contraire, lorsque la direction A ρ de la puissance R en ρ , s'éloigne de la situation AR perpendiculaire à AO, en s'approchant de AO; cette puissance en ce cas d'équilibre avec le poids EON sur le point O de la surface SV, devant être (*Corol. 6.* à ce poids comme A β ou C δ à AC, il est visible que plus la direction AC de cette puissance en ρ , sera près de AO, sa parallèle C δ en devenant d'autant plus grande, quoiqu'en raison différente; cette puissance en ρ en devra être d'autant plus grande pour soutenir le même poids EON suivant cette direction A ρ sur le même point O de la surface SV; & être enfin infinie lorsque cette direction A ρ se trouvera confondue avec AX, sa parallèle C δ se trouvant alors infinie. C'est aussi ce qu'on a déjà vû dans le nomb. 2. du précédent Corol. 15.

COROLLAIRE XVII.

Fig. 208.

Fig. 210.

Les nomb. 1. 2. du précédent Corol. 16. font voir non seulement que pour soutenir un même poids EON sur le même point O d'une surface quelconque SV toujours également inclinée, suivant différentes directions AR, Ar, A ρ , &c. des puissances capables de l'y soutenir chacune suivant la sienne, il leur faut d'autant plus de force que les angles r AO, ρ AO, &c. de leurs directions avec AO, différent davantage de l'angle droit RAO, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 15. mais encore

que lorsque les différences rAR , pAR , &c. en seront égales, ces forces (*Corol. 6.*) le seront aussi entr'elles, les côtes Cd , $C\beta$, des parallelogrammes $bACd$, $\beta AC\beta$, alors également éloignez de CD perpendiculaire (*Hyp.*) sur AX , se trouvant alors égaux entr'eux.

C O R O L L A I R E XVIII.

Il suit encore des *Corol. 15. 16.* que de toutes les directions AR , Ar , Ap , &c. suivant lesquelles différentes puissances peuvent chacune suivant la sienne soutenir un même poids EON sur un même point O d'une surface quelconque SV toujours également inclinée ; la direction AR perpendiculaire à AO ; ou parallèle au plan GH , qui soit aussi le plan touchant en O de la surface SV proposée, si cette surface est courbe, est celle qui exige la moindre de toutes ces puissances pour l'y soutenir ; & que la perpendiculaire AO à ce plan, est de toutes ces directions celle qui exige la plus grande de toutes ces puissances : la première suivant AR , doit être à ce poids EON (*Corol. 10.*) comme la longueur GH de ce plan est à sa hauteur HK ; & la seconde suivant AO , devroit (*nomb. 2. des Corol. 15. 16.*) être infinie.

C O R O L L A I R E XIX.

Pour les surfaces planes HG parallèles à la direction AC du poids EON , & pour les points des surfaces courbes SV , d'où l'on peut mener des plans touchans qui soient aussi perpendiculaires à l'horizon : la ligne de direction AR de la puissance R qui soutient ce poids EON sur ou contre ces plans, ou ces points de surfaces courbes, ne pouvant (*Corol. 4.*) s'éloigner de la situation où elle seroit perpendiculaire à AO , qu'en s'approchant de cette même AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la surface HG ou SV , puisque l'angle NAO en ce cas est droit ; cette puissance R ne peut aussi augmenter (*Cor. 15. 16.*) que dans ce mouvement de sa direction, depuis AN , où elle seroit égale au poids EON , jusqu'en AO , où elle de-

Fig. 207.
208.

vroit être infinie pour soutenir ce poids fini quelconque EON contre le point O de la surface HG ou SV verticale en ce point, suivant AO perpendiculaire (Hyp.) à cette surface en ce même point O.

Il est à remarquer que suivant l'avis qui précède le Corol. 13. lorsqu'on dit ici qu'un poids est soutenu sur ou contre le même point d'une surface, l'on ne prétend pas dire qu'il ne la rencontre jamais qu'en un seul point : l'on entend seulement que la droite AD, qui du concours A des directions de ce poids EON & de la puissance R en équilibre avec lui sur cette surface quelconque SV, tombe perpendiculairement sur cette même surface, la rencontre toujours dans le même point O tant que ce poids est soutenu dessus, quoique ce soit suivant différentes directions de puissances. La raison de cette précaution est évidente du côté des surfaces courbes, dont tous les points ont chacun un plan touchant d'une direction particulière. Pour du côté des surfaces planes, on la reconnoîtra dans les Corol. 35. 36. 37. où l'on verra que dans l'hypothèse du concours des lignes de direction des poids en quelque point de la Terre que ce soit, ils ne pesent pas toujours également sur ces plans, quoique la direction de la puissance appliquée à chacun d'eux, demeure toujours la même, & quand même ces poids seroient de pesanteur constante, c'est-à-dire, chacun de pesanteur absolue toujours la même, malgré le Corol. 37. du Th. 21. Au contraire ils pesent toujours également chacun sur le même point de quelque surface que ce soit, & la charge de cette surface y est toujours la même, à moins qu'on ne change la direction de la puissance, ou la situation de cette surface. C'est pour cela que dans les sept précédens Corol. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. où l'on examine séparément le changement que peuvent causer dans l'action du poids sur une surface, & dans la charge de cette surface, les différentes inclinaisons de la même ou de différentes surfaces sur lesquelles ce poids seroit soutenu, & les différentes directions des puissances qui l'y soutiendroient, on a regardé ce poids comme appliqué non seulement à une même surface de même inclinaison, mais aussi toujours au même point de cette surface.

COROL.

COROLLAIRE XX.

Puisqu'en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur quelque surface SV que ce soit, si du concours A des directions ER, FC, de cette puissance & de ce poids, on mène une perpendiculaire AO à cette surface, de laquelle perpendiculaire prolongée on prend de A vers O une partie quelconque AD, sur laquelle (comme diagonale) on fasse un parallélogramme BACD compris entre ces directions; la puissance R, la pesanteur du poids EON, & la charge résultante de leur concours d'action sur cette surface SV, sont entr'elles (*Corol. 7.*) en raison des trois côtez AB, BD, AD, du triangle BAD, ou comme les trois côtez CD, CA, AD, de son semblable CDA dans le parallélogramme BACD: il est manifeste dans l'hypothèse ordinaire où l'on regarde les verticales AC, HK, comme parallèles entr'elles, & comme faisant l'une & l'autre des angles droits en P, K, avec l'horizontale GK, de même que AO (*Hyp.*) en O avec HG, & dans laquelle par conséquent les trois triangles AOQ, GPQ, GKH, sont semblables entr'eux, les deux premiers ayant les angles égaux en Q, & l'angle G étant commun aux deux derniers: il est, dis-je, manifeste dans cette hypothèse,

I. Que si la direction AR de la puissance R est parallèle à la longueur HG du plan touchant en O de la surface quelconque SV, c'est-à-dire, si l'angle DAB, ou son égal ADC est droit; la ressemblance qui se trouve alors entre les triangles DAC & le triangle OAQ qu'on vient de voir semblable ici au triangle KGH, y rendant aussi les triangles DAC, KGH, semblables entr'eux, & conséquemment aussi les trois côtez CD, CA, AD, du premier de ces deux-ci, en raison des trois homologues HK, HG, KG, du second; la puissance R, la pesanteur du poids EON, & la charge résultante de leur concours d'action sur la surface SV, seront ici entr'elles en raison de ces trois côtez HK, HG, KG, du triangle KGH,



c'est-à-dire, comme la hauteur HK du plan HG , sa longueur HG , & sa base KG , sont entr'elles. De sorte qu'ici,

1°. La puissance R est au poids EON , comme la hauteur HK du plan HG est à sa longueur HG .

2°. La même puissance R est à la charge de la surface SV , résultante du concours d'action de la puissance R , & de la pesanteur du poids EON sur cette surface, comme la hauteur HK du plan HG est à sa base KG .

3°. La pesanteur du poids EON est à cette même charge de la surface SV ou HG , comme la longueur HG du plan de ce nom est à sa base KG .

4°. L'effort d'un poids quelconque EON pour descendre le long d'un plan incliné HG , & en vertu duquel ce poids commenceroit effectivement à descendre, si on l'abandonnoit à lui-même, étant égal (*Ar. 4.*) à la puissance R , qui dirigée parallèlement à la longueur HG de ce plan, retiendrait ce poids en repos sur ce même plan; on voit (*nombr. 1. 2. 3.*) que cet effort, qu'un Auteur * appelle *Momentum liberum*, ce poids & ce que ce poids libre en feroit de perpendiculaire sur ce plan HG , doivent toujours être entr'eux comme sont ici la puissance R , & ce poids EON , & la charge de la surface SV .

II. Si la direction AR de la puissance R est parallèle à la base KG du plan HG , c'est-à-dire, si l'angle BAC est droit, & conséquemment aussi tous les autres angles du parallélogramme $BACD$, comme le sont (*Hyp.*) les angles en P , K ; la ressemblance qui se trouve alors entre le triangle CDA , & le triangle QOA , qu'on vient de voir semblable ici au triangle HKG , y rendant aussi les triangles CDA , HKG , semblables entr'eux, & conséquemment les trois côtes CD , CA , AD , du premier de ces deux-ci, en raison des trois homologues HK , KG , HG , du second; la puissance R , la pesanteur du poids EON , & la charge résultante du concours d'action perpendiculaire sur la surface SV , seront ici entr'elles en raison de ces trois côtes HK , HG , KG , du triangle HKG , c'est

vitalis
Jordaenus.



à-dire, comme la hauteur HK du plan HG, la base KG, & la longueur HG, sont entr'elles. De sorte qu'ici,

1°. La puissance R est au poids EON, ou à sa pesanteur, comme la hauteur HK du plan HG est à la base HG.

2°. La puissance R est à la charge de la surface SV, résultante du concours d'action perpendiculaire de cette puissance & du poids EON sur cette surface, comme la hauteur HK du plan HG est à sa longueur HG.

3°. La pesanteur du poids EON est à cette même charge de la surface SV, comme la base KG du plan HG est à sa longueur HG.

III. Si presentement on suppose deux puissances R, r, qui soutiennent successivement un même poids EON sur le même point O de la même surface SV, la premiere (R) suivant une direction parallele à la longueur HG du plan, & la seconde (r) suivant une direction parallele à la base KG de ce plan; les nomb. 1. des deux précédens art. 1. 2. font voir ensemble que la premiere (R) de ces deux puissances sera ici à la seconde (r) comme la base KG du plan HG sera à sa longueur HG. Car (art. 1. nomb. 1. R. EON :: HK. HG. Et (art. 2. nomb. 1.) EON. r :: KG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. r :: KG. HG. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXI.

Dans la même hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, soient deux poids P, p, soutenus par deux puissances R, r, sur deux plans inclinez de longueurs L, l, desquels les hauteurs soient H, h, les bases B, b, & les charges C, c, résultantes chacune du concours d'action perpendiculaire de chaque poids & de chaque puissance sur chaque surface ou plan : Soient (dis-je) appellées

Les longueurs des plans,

L, l.

Leurs hauteurs,

H, h.

Leurs bases,

B, b.

Leurs charges, C, c.
 Les poids, ou leurs pesanteurs, P, p.
 Les puissances qui les soutiennent sur ces plans, R, r.

Ces noms supposez, il suit de l'art. 1. du précédent Corol. 20. que si les directions des puissances R, r, sont paralleles aux longueurs L, l, des plans sur lesquels elles soutiennent les poids P, p,

1°. L'on aura (Corol. 20. art. 1. nomb. 1.) $R.P :: H.L =$

$\frac{P \times H}{R}$. Et $r.p :: h.l = \frac{p \times h}{r}$. Donc $L.l :: \frac{P \times H}{R} . \frac{p \times h}{r}$. D'où ré-

sulte $\frac{L \times p \times h}{r} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou $L \times R \times p \times h = l \times r \times P \times H$. Ce qui

donne tous les rapports possibles de deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité; quelques autres rapports qu'on suppose entre les six autres grandeurs prises ainsi deux à deux comparables entr'elles.

2°. L'on aura aussi (Corol. 20. art. 1. nomb. 2.) $R.C$

$:: H.B = \frac{C \times H}{R}$. Et $r.c :: h.b = \frac{c \times h}{r}$. Donc $B.b :: \frac{C \times H}{R}$

$\frac{c \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{B \times c \times h}{r} = \frac{b \times C \times H}{R}$, ou $B \times R \times c \times h =$

$b \times r \times C \times H$. Ce qui donne tous les rapports possibles des huit grandeurs qui entrent en cette égalité, en les prenant deux à deux comparables entr'elles, comme dans le précédent nomb. 1.

3°. L'on aura de plus (Corol. 20. art. 1. nomb. 3.) $C.P$

$:: B.L = \frac{P \times B}{C}$. Et $c.p :: b.l = \frac{p \times b}{c}$. Donc $L.l :: \frac{P \times B}{C} . \frac{p \times b}{c}$.

D'où résulte $\frac{L \times p \times b}{c} = \frac{l \times P \times B}{C}$, ou $L \times C \times p \times b = l \times c \times P \times B$.

Ce qui donne aussi tous les rapports possibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles, comme dans les précédens nomb. 1. 2.

COROLLAIRE XXII.

Les noms demeurans les mêmes que dans le précédent Corol. 21. aussi-bien que l'hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans ; il suit aussi de l'art 2. du Corol. 20. que si les directions des puissances R, r , sont paralleles aux bases B, b , des plans sur lesquels elles soutiennent les poids P, p ;

1°. L'on aura (*Cor. 20. art. 2. nomb. 1.*) $R. P :: H. B = \frac{P \times H}{R}$. Et $r. p :: h. b = \frac{p \times h}{r}$. Donc $B. b :: \frac{P \times H}{R} . \frac{p \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{B \times p \times h}{r} = \frac{b \times P \times H}{R}$, ou $B \times R \times p \times h = b \times r \times P \times H$. Ce qui

donne tous les rapports possibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité , en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles , comme dans les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 1.

2°. L'on aura aussi *Corol. 20. art. 2. nomb. 2.*) $R. C :: H. L = \frac{C \times H}{R}$. Et $r. c :: h. l = \frac{c \times h}{r}$. Donc $L. l :: \frac{C \times H}{R} . \frac{c \times h}{r}$ D'où résulte $\frac{L \times c \times h}{r} = \frac{l \times C \times H}{R}$, ou $L \times R \times c \times h = l \times r \times C \times H$. Ce qui

donne aussi tous les rapports possibles entre deux quelconques comparables entr'elles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité , quelques soient les rapports supposez des six autres de ces huit grandeurs, ainsi prises deux à deux comparables entr'elles.

3°. L'on aura aussi (*Cor. 20. art. 2. nomb. 3.*) $P. C :: B. L = \frac{C \times B}{P}$. Et $p. c :: b. l = \frac{c \times b}{p}$. Donc $L. l :: \frac{C \times B}{P} . \frac{c \times b}{p}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times b}{p} = \frac{l \times C \times B}{P}$, ou $L \times P \times c \times b = l \times p \times C \times B$. Ce qui

donne comme ci-dessus tous les rapports possibles entre deux quelconques comparables entr'elles , des huit grandeurs comprises dans cette égalité.



Les noms demeurant encore les mêmes que dans les précédens Corol. 21. & 22. aussi-bien que l'hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans; il suit encore du Corol. 20. que si des deux puissances R, r, une d'entr'elles, par exemple, R, a sa direction parallele à la longueur L de son plan, & l'autre r parallele à la base b du sien;

I. L'on aura (Corol. 20. art. 1. nomb. 1.) $H. L :: R. P$
 $= \frac{L \times R}{H}$. D'où résulte $L = \frac{P \times H}{R}$. L'on aura aussi (Cor. 20. art. 2. nomb. 1. 2. 3.) $h. b :: r. p = \frac{b \times r}{h}$. De plus $r. c :: h. l$
 $= \frac{c \times h}{r}$. De plus encore $p. c :: b. l = \frac{c \times b}{p}$. Donc,

1°. L'on aura ici $P. p :: \frac{L \times R}{H} \cdot \frac{b \times r}{h}$. D'où résulte $\frac{P \times b \times r}{h}$
 $\frac{P \times L \times R}{H}$, ou $P \times H \times b \times r = p \times b \times L \times R$.

2°. L'on aura aussi $L. l :: \frac{P \times H}{R} \cdot \frac{c \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times h}{r}$
 $= \frac{l \times P \times H}{R}$, ou $L \times R \times c \times h = l \times r \times P \times H$.

3°. L'on aura de plus $L. l :: \frac{P \times H}{R} \cdot \frac{c \times b}{p}$. D'où résulte
 $\frac{L \times c \times b}{p} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou $L \times R \times c \times b = l \times p \times P \times H$.

II. Le nomb. 2. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera $R. C$
 $:: H. B = \frac{C \times H}{R}$. D'où résulte aussi $H = \frac{B \times R}{C}$. Et les nomb.

1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront pa-

pareillement $r.p :: b.b = \frac{p \times b}{r}$. De plus $c.r :: l.b = \frac{l \times r}{c}$. De plus

encore $c.p :: l.b = \frac{p \times l}{c}$. Donc,

$$1^{\circ}. \text{L'on aura ici } B.b :: \frac{C \times H}{R} \cdot \frac{p \times b}{r}. \text{ D'où résulte } \frac{B \times p \times b}{r} \\ = \frac{b \times C \times H}{R}, \text{ ou } B \times R \times p \times b = b \times r \times C \times H.$$

$$2^{\circ}. \text{L'on aura aussi } B.b :: \frac{C \times H}{R} \cdot \frac{p \times l}{c}. \text{ D'où résulte } \frac{B \times p \times l}{c} \\ = \frac{b \times C \times H}{R}, \text{ ou } B \times R \times p \times l = b \times c \times C \times H.$$

$$3^{\circ}. \text{L'on aura de plus } H.b :: \frac{B \times R}{C} \cdot \frac{l \times r}{c}. \text{ D'où résulte } \\ \frac{H \times l \times r}{c} = \frac{b \times B \times R}{C}, \text{ ou } H \times C \times l \times r = b \times c \times B \times R.$$

III. Le nomb. 3. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera
 $P.C :: L.B = \frac{C \times L}{P}$. D'où résulte aussi $L = \frac{B \times P}{C}$. Et les
 nomb. 1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront
 pareillement $r.p :: b.b = \frac{p \times b}{r}$. De plus $r.c :: b.l = \frac{c \times b}{r}$.
 De plus encore $c.p :: l.b = \frac{p \times l}{c}$. Donc,

$$1^{\circ}. \text{L'on aura ici } B.b :: \frac{C \times L}{P} \cdot \frac{p \times b}{r}. \text{ D'où résulte } \frac{B \times p \times b}{r} \\ = \frac{b \times C \times L}{P}, \text{ ou } B \times P \times p \times b = b \times r \times C \times L.$$

$$2^{\circ}. \text{L'on aura aussi } B.b :: \frac{C \times L}{P} \cdot \frac{p \times l}{c}. \text{ D'où résulte } \frac{B \times p \times l}{c} \\ = \frac{b \times C \times L}{P}, \text{ ou } B \times P \times p \times l = b \times c \times C \times L.$$



3°. L'on aura de plus $L.l. : \frac{B \times P}{C} . \frac{c \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times h}{r}$
 $= \frac{l \times B \times P}{C}$, ou $L \times C \times c \times h = l \times r \times B \times P$.

Toutes les équations trouvées pour le cas du présent Corol. 23. dans les nomb. 1. 2. 3. de ses art. 1. 2. 3. donneront (comme celles des précédens Corol. 21. 22.) tous les rapports entre deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs comprises dans chacune de ces égalitez. On ne s'arrête point ici à détailler ces rapports particuliers, non plus que dans les Corol. 21. 22. ce détail étant facile aux moindres Géomètres qui auront la curiosité d'y entrer.

COROLLAIRE XXIV.

Fig. 205.
206.

En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface quelconque SV dans la même hypothèse des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, si après avoir prolongé RA, ou le plan HG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en M dans les Fig. 205. 206. le quel plan GH soit le touchant de la surface courbe SV en celui O de ses points sur lequel le poids EON seroit soutenu par la puissance R: si, dis-je, après cela on considere que les angles en O, K, sont droits, & que l'angle G (Corol. 20.) est toujours égal à l'angle DAC; l'on aura (Déf. 9. Corol. 1. 2.) le sinus de l'angle BAD, ou de son égal, ou complement MAO, au sinus total :: MO. AM. Et ce sinus total au sinus de l'angle DAC, ou de son égal G :: GH. HK. Donc (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) le sinus de l'angle BAD se trouvera être au sinus de l'angle DAC :: MO × GH. AM × HK. Donc en general en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur un point quelconque O de la surface inclinée SV ou HG; ce poids EON dans la presente hypothese de sa direction parallele à la hauteur HK de ce plan HG, quelle que soit la direction de la puissance

ce R, sera aussi toujours (*Corol. 10.*) à cette puissance
 $R :: MO \times GH. AM \times HK.$

COROLLAIRE XXV.

Donc lorsque la direction AR de la puissance R sera
 parallèle à la longueur du plan GH, les lignes MO, AM,
 alors infinies, se trouvant pour lors égales entr'elles; le
 poids EON sera à cette puissance R :: GH. HK. c'est-à-
 dire, comme la longueur du plan GH est à sa hauteur,
 ainsi qu'on l'a déjà vû d'une autre maniere dans le nomb.
 1. de l'art. 1. du *Corol. 20.*

COROLLAIRE XXVI.

Puisqu'en general (*Corol. 18. 19.*) de toutes les puif-
 sances R capables de soutenir un même poids EON sur
 un même point O de quelque surface fixe SV que ce soit,
 la moindre est toujours celle dont la direction AR seroit
 parallèle à GA; il suit du précédent Cor. 25. & du nomb.
 1. de l'art. 1. du *Corol. 20.* que dans l'hypothese des di-
 rections des poids paralleles aux hauteurs des plans, la
 moindre de toutes ces puissances R seroit aussi celle qui
 seroit à ce même poids EON, comme la hauteur HK du
 plan GH est à sa longueur HG.

*Voilà jusqu'ici tout autant de Corollaires des part. 1. 2. du
 present Th. 25. en voici presentement quelques-uns de sa part.
 3. après quoi on en verra aussi de toutes ses trois parties en-
 semble. Nous y prendrons s pour la marque ou la caractéristi-
 que des sinus, jusqu'à ce que nous avertissions du contraire.*

COROLLAIRE XXVII.

Quelles que soient les directions ER, FC, de la puissan-
 ce R & du poids EON, auquel elle est appliquée sur la
 surface inclinée quelconque SV, si la perpendiculaire
 AO à cette surface en O, menée du concours A de ces
 directions, passe par la base du poids EON, & qu'il soit à
 la puissance R comme le sinus de l'angle RAO au sinus

FIG. 205.
 206 207.
 208.

de l'angle CAO, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que leurs directions font avec AO; il suit de la part. 3. que cette puissance R. soutiendra ce poids EON en équilibre sur le point O de la surface SV.

Pour le voir, soit sur la diagonale AD, partie quelconque de AO prolongée vers D, la parallelogramme BACD, dont les côtez AB, AC, soient sur les directions de la puissance R & du poids EON. L'angle ADB étant égal à son alterne CAD, si l'on prend pour la caractéristique des sinus, l'on aura pour lors $\sin BAD. \sin ADB :: \sin BAD. \sin CAD :: \sin RAO. \sin CAO$ (*Hyp.*) $:: EON.R.$ Or (*Lem. 8. Corol. 2.*) $\sin BAD. \sin ADB :: BD. AB :: AC. AB.$ Donc on aura aussi pour lors $EON.R. :: AC. AB.$ c'est-à-dire, le poids EON à la puissance R, comme le côté AC est au côté AB du parallelogramme BACD, qui (*constr.*) les a sur les directions de ce poids & de cette puissance, ayant aussi (*Hyp.*) sa diagonale AD perpendiculaire en O à la surface SV, & par la base de ce même poids. Donc (*part. 3.*) la puissance R. soutiendra ici en équilibre ce poids EON sur ce point O de cette surface quelconque SV, ainsi qu'il le falloit faire voir.

COROLLAIRE XXVIII.

FIG. 210. Il suit de-là que toute puissance R qui peut soutenir un poids quelconque EON sur quelque point O d'une surface inclinée quelconque SV, suivant une ligne de direction AR, ou A_r , qui fasse au point A avec AR perpendiculaire à AO, ou parallele à la longueur HD du plan touchant en O la surface en question, un angle RAr , ou RA_r , moindre que RAN, l'y peut soutenir encore sur le même point O suivant une autre ligne de direction A_r , ou Ar , laquelle passant de l'autre côté de cette perpendiculaire AR, fasse avec elle un angle RA_r , ou RAr , égal au premier RAr , ou RA_r , c'est-à-dire, que si les deux angles quelconques RAr, RA_r , sont égaux entre eux, & chacun moindre que l'angle RAN, la puissance

capable de soutenir le poids EON suivant Ar sur le point O de la surface inclinée quelconque SV , l'y soutiendra aussi suivant Ap , & reciproquement.

Car il est visible qu'on auroit alors $\angle AO + \angle AO = 2 \times \angle RAO$, c'est-à-dire, les deux angles $\angle AO$, $\angle AO$, égaux ensemble à deux droits $\angle RAO$; & qu'ainsi chacun de ces deux-là seroit le complement de l'autre à deux droits; & conséquemment aussi (*Déf. 9. Corol. 2.*) que le sinus de l'un seroit pour lors le sinus de l'autre. Donc alors le sinus de l'angle $\angle CAO$ seroit en même raison au sinus de chacun des angles $\angle AO$, $\angle AO$. Donc aussi (*Corol. 10. 27.*) la même puissance R , qui dirigée suivant celle qu'on voudra des lignes Ar , Ap soutiendrait le poids EON sur le point O de la surface SV , l'y soutiendrait aussi suivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux quelconques $\angle AR$, $\angle AR$, avec AR (*Hyp.*) perpendiculaire sur AO , ou parallèle à GH , & chacun moindre que $\angle RAN$.

COROLLAIRE XXIX.

Cela peut encore se démontrer sans le secours des sinus: car tant que les directions Ar , Ap , feront des angles égaux de part & d'autre avec AR , leurs parallèles Cd , Cd , en feront aussi d'égaux avec CD parallèle à AR . Par conséquent CD étant perpendiculaire en D sur AO prolongée vers X , comme l'est (*Hyp.*) AR en A sur la même AO , les lignes Cd , Cd , seront égales entr'elles, & conséquemment aussi Ab , Ab , côtéz qui leur sont opposez dans les parallelogrammes $bACd$, $bACd$. Donc (*part. 2. 3.*) la puissance R , qui dirigée suivant une quelconque des lignes Ar , Ap , pourroit soutenir le poids EON sur un point quelconque O d'une surface fixe inclinée quelconque SV , pourroit aussi l'y soutenir suivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux de part & d'autre avec AR , & chacun moindre que l'angle $\angle RAN$. Tout cela s'accorde avec la fin du Corol. 17.

Chacun de ces deux derniers Corollaires 28. 29. fait assez voir que tout ce qu'ils contiennent, seroit encore vrai, quand même chacun des angles $\angle RAR$, $\angle PAR$, seroit égal à $\angle RAN$: mais la puissance R dirigée suivant Ar , se trouvant alors l'être suivant AN directement à contre-sens du poids EON , le soutiendrait alors seule (nomb. 1. des Corol. 15. 16.) sans le secours de la surface SV ; ce qui ne seroit plus de la présente hypothèse, dans laquelle on suppose cette puissance & ce poids en équilibre entr'eux sur cette surface. Le cas où l'angle seroit plus grand que $\angle RAN$ de ce côté-là, y seroit encore plus contraire ; puisqu'alors (suivant la reflexion qui est entre les Corol. 15. 16.) il n'y auroit plus du tout d'équilibre entre cette puissance & ce poids, bien loin de le soutenir sur la surface SV , ainsi qu'on le suppose ici.

COROLLAIRE XXX.

Puisque (Corol. 28.) de toutes les directions Ar , AR , Ap , &c. suivant lesquelles différentes puissances peuvent, chacune suivant la sienne, soutenir un même poids EON sur le même point O d'une surface quelconque SV toujours également inclinée en ce point O ; la direction AR , perpendiculaire à AO , ou parallèle au plan GH , est celle qui exige la moindre de toutes ces puissances pour l'y soutenir : puisqu'aussi (Corol. 10. 18.) cette moindre puissance R dirigée suivant AR , est alors à ce même poids EON , comme le sinus de l'angle $\angle CAO$ ou $\angle CAD$ est au sinus de $\angle DAR$ supposé droit, c'est-à-dire, comme le sinus de l'angle $\angle CAD$ est au sinus total ; il est visible que toute autre puissance dirigée suivant celle qu'on voudra des autres directions Ar , Ap , &c. comprises aussi dans l'angle $\angle DAN$, & en équilibre avec le même poids EON sur le même point O de la même surface fixe SV , fera à ce poids en plus grande raison que le sinus de l'angle $\angle CAD$ au sinus total, ou que OQ à AQ ; & conséquemment aussi (en supposant la direction FC du poids EON parallèle à la hauteur HK du plan HG) en plus grande raison que HK à HG , cette hypothèse rendant les triangles rectangles

AOQ, GPQ, GKH, semblables entrecux ; & en general pour quelque hypothese que ce soit de parallelisme ou de concours entr'elles des verticales EC, HK, en raison d'autant plus grande (*Corol.* 15. 16.) que la direction Ar, ou Ap, de cette puissance, fera un angle RAr, ou RAp, plus grand avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, ou parallele à HG, sans sortir de l'angle OAN.

C O R O L L A I R E X X X I.

Cela étant, & d'un autre côté (*nomb. 1. des Corol.* 15. 16.) la puissance requise ici pour soutenir le poids EON sur le point O de la surface SV suivant une direction Ar, ou Ap, non perpendiculaire à AO, devant être d'autant moindre que ce poids (quoiqu'en raison differente) que l'angle RAr ou RAp, de cette direction avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, fera moindre que l'angle RAN ; il suit en general qu'une même puissance peut soutenir un même poids sur un même point d'une surface inclinée fixe quelconque suivant deux directions differentes, pourvû qu'elle soit moindre que ce poids, & qu'elle lui soit cependant en plus grande raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ; c'est-à-dire, dans l'hypothese ordinaire des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, pourvû que cette puissance moindre que ce poids, lui soit cependant en plus grande raison que le sinus d'inclinaison G du plan GH au sinus total, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 1. & *Lem.* 8. *Corol.* 2.) que la hauteur HK de ce plan à sa longueur HG.

C O R O L L A I R E X X X I I.

En tout autre cas, c'est-à-dire, lorsque cette puissance est plus grande que ce poids, ou du moins lorsqu'elle lui est égale, ou bien lorsqu'elle lui est en même raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ; elle ne peut le soutenir sur le même point O de la surface fixe SV, que suivant une seule direction. Car en supposant toujours l'angle RAO ou RAD droit,

1°. Si cette puissance étoit plus grande que le poids EON, avec lequel on la suppose ici en équilibre sur le point O de la surface SV, la direction de cette puissance non seulement ne pourroit être (*Corol.* 15. 16.) que dans l'angle droit RAD, telle qu'est ici A_p ; mais encore cette direction A_p y seroit unique, ne pouvant faire avec AD qu'un angle $\angle AD$, dont le sinus soit à celui de CAD comme le poids EON à cette puissance, ainsi qu'il est requis (*Corol.* 10.) pour leur équilibre supposé sur le point O de la surface fixe SV.

2°. Si cette puissance étoit égale à ce poids EON, des deux directions également éloignées de AR, suivant lesquelles elle pourroit (*Corol.* 17.) successivement soutenir ce poids; il y en auroit nécessairement une (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) suivant AN, suivant laquelle cette puissance soutiendrait (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) seule ce poids sans le secours de la surface SV; ce qui seroit ici contre l'hypothèse.

3°. Si cette puissance étoit au poids en même raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD, elle ne pourroit le soutenir (*Corol.* 10.) que suivant AR.

4°. Enfin si cette puissance étoit à ce poids EON en moindre raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD; elle ne pourroit plus du tout (*Corol.* 10.) faire équilibre avec ce poids sur la surface SV, ne pouvant y avoir d'angle, au sinus duquel celui de l'angle constant CAD puisse être en moindre raison qu'au sinus total, c'est-à-dire, de sinus plus grand que le total.

Donc (*nomb.* 1. 2. 3. 4.) lorsque cette puissance est plus grande que le poids EON, ou qu'elle lui est égale, ou bien lorsqu'elle lui est en même raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total; elle ne peut soutenir ce poids quelconque sur un même point quelconque de quelque surface fixe que ce soit, que suivant une seule direction, ainsi qu'on le vient d'avancer, & suivant aucune (*nomb.* 3.)

lorsque cette puissance est au poids EON en moindre raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total.

Au contraire (Corol. 3.) elle le peut toujours soutenir sur ce même point de cette même surface fixe, suivant deux directions différentes également éloignées de AR, perpendiculaire à AO, ou parallèle au plan HG, tant qu'elle est moindre que ce poids, & qu'elle lui est cependant en plus grande raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total.

Jusqu'ici nous n'avons regardé le même poids que comme appliqué au même endroit de quelque surface que ce soit, ou que comme appliqué au même point d'un plan qui la toucheroit en ce point lorsqu'elle est courbe; ce qu'on a vu pour toutes sortes de surfaces revenir au même que si ce poids n'eût été appliqué qu'au même point d'une plane, ou d'un plan incliné quelconque: de sorte que ce poids sur differens points d'une même surface courbe, y doit être considéré comme sur differens plans touchans de cette surface en ces differens points; ce qui étant compris dans ce qui précède de poids quelconques soutenus chacun sur un même point aussi quelconque de quelque surface que ce soit, il ne nous reste plus qu'à considérer ce poids successivement soutenu sur differens points d'un plan incliné. Mais parce que hors l'hypothese ordinaire des directions des graves toutes paralleles entr'elles, ce poids n'auroit plus (Th. 2.1. Cor. 3.7.) la même pesanteur sur ces differens points d'un même plan, quand même tous ses points y conserveroient chacun la sienne, c'est-à-dire, la même pour chacun de ces points; nous n'appellerons ici mêmes poids que ceux qui seront de pesanteurs égales aux differens endroits où nous les placerons, quelques differens qu'ils soient d'ailleurs entr'eux, pour rendre encore ce qui suit general pour toutes les hypotheses imaginables des directions des graves.

COROLLAIRE XXXIII.

Soit presentement un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même pesanteur en differens points d'un même plan incliné HG sur lesquels points ces corps soient

Fig. 212.
212.

soutenus par deux puissances R, P, des directions quelconques ER, FP, qui concourent en A, B, avec les directions AB, BD, de ces poids, lesquelles concourent entre-elles en quelque point D que ce soit, lequel soit (si l'on veut) le centre de la Terre. Des points A, B, de concours des directions des puissances & des poids qu'elles soutiennent, soient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, au plan HG; soient aussi les directions des poids prolongées vers N, M.

Cela fait, le Corol. 10. fait voir qu'en ce cas d'équilibre entre les puissances R, P, & les poids EON, FQM, qu'elles soutiennent sur les points O, Q, du plan HG; que la puissance R sera à la puissance P en raison composée de la directe des sinus des angles DAO, DBQ, que les directions des poids qu'elles soutiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, au plan GH; & de la reciproque des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions de ces puissances font avec ces mêmes perpendiculaires; c'est-à-dire (en prenant pour la marque ou la caractéristique des sinus) $R. P :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO.$

Car en ce cas d'équilibre, ce Corol. 10. donne $R. EON :: \int DAO. \int RAO. \& FQM. P :: \int PBQ. \int DBQ.$ Donc les poids EON, FQM, étant pris ici pour leurs pesanteurs supposées égales entr'elles en O, Q; si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux analogies, l'on aura ici $R. P :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO.$ ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXXIV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, se trouvant ainsi parallèles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S, l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à son alterne ASB, outre $DRQ = DBS.$ Donc (Corol. 33.) l'on aura pareillement ici $R. P :: \int ASB \times \int PBQ. \int DBS \times \int RAO.$ Mais (Léf. 9. Cor. 2.) $\int ASB = \int BSD,$ & (Lem. 8. Corol. 2.) $\int BSD. \int DBS :: DB. DS.$ Donc aussi $R. P :: BD \times \int PBQ. DS \times \int RAO.$

COROL.

COROLLAIRE XXXV.

Puisque dans l'équilibre ici supposé entre les puissances R , P , & les poids EON , FQM , supposez de même pesant sur différens points O , Q , d'un même plan HG d'inclinaison quelconque ; le Corol. 33. donne $R. P. :: \sqrt{DAO} \times \sqrt{PBQ} . \sqrt{DBQ} \times \sqrt{RAO}$.

1°. Si les directions ER , FP , des puissances R , P , sont parallèles entr'elles, & celles des poids EON , FQM , concourantes en quelque point D que ce soit ; les angles RAO , PBQ , se trouvant alors égaux entr'eux, & conséquemment aussi leurs sinus \sqrt{RAO} , \sqrt{PBQ} , l'on aura pour lors $R. P. :: \sqrt{DAO} . \sqrt{DBQ}$. c'est-à-dire, les puissances R , P , entr'elles en raison des sinus des angles DAO , DBQ , que les directions des poids EON , FQM , qu'elles soutiennent, font avec les perpendiculaires AO , BQ , au plan GH .

2°. Si ce sont les directions des poids EON , FQM , qui soient parallèles entr'elles, & non celles des puissances R , P , qui les soutiennent ; les angles DAO , DBQ , se trouvant alors égaux, & conséquemment aussi leurs sinus \sqrt{DAO} , \sqrt{DBQ} , l'on aura pour lors $R. P. :: \sqrt{PBQ} . \sqrt{RAO}$. c'est-à-dire, les puissances R , P , entr'elles en raison reciproque des sinus des angles RAO , PBQ , que leurs directions ER , FP , font avec AO , BQ , perpendiculaires au plan GH .

3°. Enfin si les directions des puissances sont parallèles entr'elles, & celles des poids parallèles aussi entr'elles, non seulement les angles RAO , PBQ , mais encore les angles DAO , DBQ , se trouvant alors égaux entr'eux comme dans les deux précédens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors $R=P$, c'est-à-dire, que les puissances seront alors égales entr'elles, aussi-bien que (*Hyp.*) les poids.

COROLLAIRE XXXVI.

Puisque dans l'équilibre ici supposé le Corol. 34. donne $R. P. :: BD \times \sqrt{PBQ} . DS \times \sqrt{RAO}$.

1°. Si les directions ER , FP , des puissances R , P , sont parallèles entr'elles, & les directions des poids EON , FQM , concourantes en quelque point D que ce soit, ainsi que dans le nomb. 1. du précédent Corol. 35. les angles RAO , PBQ , se trouvant encore ici comme là, égaux entr'eux, & conséquemment aussi leurs sinus $\sin RAO$, $\sin PBQ$, l'on aura pour lors $R : P :: BD : DS$.

2°. Si ce sont les directions AD , BD , des poids EON , FQM , qui soient parallèles entr'elles, & non celles des puissances R , P , qui soutiennent ces poids sur les points O , Q , du plan HG , ainsi que dans le nomb. 2. du précédent Corol. 35. Cette hypothèse rendant (*Lem. 6. Corol. 1.*) l'angle D infiniment aigu, & conséquemment (*nom. 6. Corol. 2.*) BD , SD , toutes deux infinies & égales entr'elles, leur différence se trouvant alors infiniment petite ou nulle par rapport à elles : l'on aura pour lors $R : P :: \sin PBQ : \sin RAO$. c'est-à-dire, les puissances R , P , en raison reciproque des sinus des angles RAO , PBQ , que les directions des poids EON , FMQ , qu'elles soutiennent, font avec AO , BQ , perpendiculaires au plan GH , ainsi qu'on l'a déjà vu pour cette hypothèse dans le nomb. 2. du précédent Corol. 35.

3°. Enfin si (comme dans le nomb. 3. du précédent Corol. 35.) les directions des puissances sont parallèles entre-elles, & celles des poids parallèles aussi entr'elles ; cette hypothèse rendant non seulement $BD = SD$, comme dans le précédent nomb. 2. mais encore les angles RAO , PBQ , égaux entr'eux, comme dans le nomb. 1. l'on aura encore ici $R = P$, ainsi que cette même hypothèse l'a déjà donné dans le nomb. 3. du précédent Corol. 35.

COROLLAIRE XXXVII.

Le Corol. 37. du Th. 21. a fait voir que dans l'hypothèse des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, par exemple, au centre de la Terre, chacun de ces corps peseroit plus ou moins, ou (si l'on veut) tireroit plus ou moins fortement le fil sans pesanteur auquel

il seroit verticalement suspendu, selon qu'il se trouveroit alors plus ou moins éloigné de ce point de concours, quand même chacun des siens peseroit également à toutes distances de celui-là : de sorte qu'en appellant *Pesanteur absolue* de chacun de ces poids ce que le fil vertical, ou la force qui le retiendrait, en auroit à soutenir à chaque distance où le poids se trouveroit du point de concours des directions de tous les siens ; la pesanteur absolue de ce même corps se trouveroit variable dans cette hypothese, c'est-à-dire, plus ou moins grande, selon que ce corps se trouveroit plus ou moins éloigné de ce concours : de sorte, dis-je, que dans cette hypothese des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, des corps differens d'ailleurs pourroient être de même pesanteur absolue par la seule varieté de leurs distances à ce point, sçavoir, le moindre en masse être égal en pesanteur au plus grand, par son plus grand éloignement de ce point de concours.

Voilà, dis-je, ce que le Corol. 37. du Th. 21. fait voir. Voici presentement ce qui suit du nomb. 1. des deux derniers Corol. 35. 36. Ils font voir de plus qu'un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même pesanteur absolue, sur deux differens points O, Q, d'un même plan incliné HG, par de-là lequel les directions des graves concourroient en quelque point D que ce fût, y peseroient encore plus ou moins, selon qu'ils y seroient plus ou moins éloignés de ce point D : en sorte qu'il faudroit ici une plus grande force à la puissance R pour soutenir le poids EON en O, suivant quelque direction ER que ce fût, qu'à la puissance P pour le soutenir en Q suivant une direction FP parallele à ER, quand même il seroit de même pesanteur absolue en O, Q : puisque le nomb. 1. du Corol. 35. donneroit alors $R.P :: \sqrt{DAO} . \sqrt{DBQ} :: \sqrt{BSA} . \sqrt{DBS}$. & que le nomb. 1. du Corol. 36. donneroit aussi pour lors $R.P :: BD . DS$. c'est-à-dire, de part & d'autre, la puissance R plus grande que la puissance P.

Tout cela fait voir que l'hypothese des directions des graves EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce soit, aussi-bien que celles de leurs parties, y doit causer une double variabilité de pesanteur par rapport aux puissances R, P, requises pour le soutenir suivant des directions paralleles sur des points O, Q, d'un plan HG, differemment éloignez du point D : c'est-à-dire, une double raison de diminution de pesanteur dans le plus proche FQM du point D, & une double d'augmentation dans le plus éloigné EON de ce point ; puisque quand il n'y auroit point ici de plan HG, ni d'autre surface pour soutenir les poids FQM, EON, chacun d'eux (*Th. 21. Corol. 37.*) peseroit absolument moins en Q qu'en O, & que quand même ils y auroient les mêmes pesanteurs absolues, & qu'ils y peseroient également sans s'appuyer sur le plan HG, ils peseroient encore (*nombr. 1. des Corol. 36. 37.*) moins en Q qu'en O, y étant soutenus par des puissances P, R, de directions paralleles entr'elles, c'est-à-dire, que nonobstant cette égalité de pesanteurs absolues, il faudroit encore par cette nouvelle raison une moindre puissance pour le soutenir en Q qu'en O, suivant des directions paralleles entr'elles pendant que celles qu'il auroit en ces points, concourroient en D.

On voit présentement que dans l'hypothese des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, il y a bien de la difference entre un poids soutenu sur un même plan, & un poids soutenu sur le même point d'un plan, ou de toute autre surface quelconque. C'est aussi pour cela qu'on a pris soin ci-dessus de ne les pas confondre, & de faire remarquer cette difference dans la reflexion qui suit le Corol. 19. où il s'agissoit, comme presque par tout jusqu'ici des directions quelconques des graves en general : je dis presque, n'y ayant que peu d'endroits où on les ait regardez comme paralleles entr'elles, & où on en a averti le Lecteur. Quant à ce cas particulier des directions des graves paralleles entr'elles, le Corollaire suivant va faire voir que cette difference s'y évanoüit sur un même plan, & qu'un même poids y doit peser également sur tous les points.

de ce plan ; en sorte qu'une même puissance l'y peut successivement soutenir sur differens points suivant une même direction quelconque, c'est-à-dire, suivant des directions quelconques toutes paralleles aussi entr'elles. En effet,

Il est à remarquer que lorsqu'en cas d'équilibre on supposera dans la suite les directions des poids paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, ou celles des puissances paralleles aussi entr'elles vers tel côté qu'on voudra, & de même lorsqu'on supposera ces directions tant des poids que des puissances à volonté ; il faudra toujours excepter les cas où les directions des poids seroient dans les angles RAO , PBQ , & où celles des puissances seroient hors des angles NAO , MBQ ; puisque suivant le Corol. 4. & la reflexion italique qui le suit, l'équilibre supposé seroit impossible dans l'un & dans l'autre de ces deux cas.

COROLLAIRE XXXVIII.

Si les directions des poids, & celles de tous leurs points étoient toutes paralleles entr'elles, chacun de ces poids seroit non seulement par tout (Th. 21. Corol. 39.) de même pesanteur absolue, mais encore peseroit également (nomb. 3. Corol. 35. 36.) sur tous les points d'un même plan incliné ; c'est-à-dire, que non seulement un même poids seroit alors de même pesanteur absolue en differens points d'un même plan incliné, mais encore qu'une même puissance le pourroit successivement soutenir sur tous ces differens points quelconques suivant des directions paralleles entr'elles.

La part. I. du présent Th. 26. fait voir de plus que tous ces differens points d'un même plan incliné, seroient toujours alors également chargez du concours d'action de la puissance & du poids sur eux, c'est-à-dire, que les charges perpendiculaires résultantes de ce concours d'action sur chacun des points de ce plan incliné, seroient alors toutes égales entr'elles.

COROLLAIRE XXXIX.

FIG. 211.
212.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Corol. 33. c'est-à-dire, les poids EON, FQM, étant de même pesanteur absolue, & le reste tel qu'on voudra, si l'on appelle O, Q, les différentes charges perpendiculaires en ces points du plan HG, résultantes chacune du concours d'action de la puissance & du poids supposez en équilibre sur chacun de ces points O, Q, de ce plan HG; le Corol. 9. donnera O. EON :: $\sqrt{\text{RAD.}} \sqrt{\text{RAO.}}$ & le poids FQM ou son égal (Hyp.) EON. Q :: $\sqrt{\text{PBQ.}} \sqrt{\text{PBD.}}$. Donc (en multipliant par ordre) O. Q :: $\sqrt{\text{RAD.}} \times \sqrt{\text{PBQ.}} \sqrt{\text{PBD.}} \times \sqrt{\text{RAO.}}$. C'est-à-dire (dans la présente hypothèse des poids égaux) que les différentes charges O, Q, du plan GH aux points de ces noms, sont entr'elles en raison composée de la directe des sinus des angles totaux RAD, PBD, & de la reciproque des sinus des angles partiels RAO, PBQ, quelques soient l'inclinaison de ce plan HG, & les directions des poids & des puissances qui lui causent ces deux charges. Donc,

I. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans sortir (Corol. 14.) des angles NAO, MBQ, quelles que soient encore les directions des poids EON, FQM, ainsi que dans le nomb. 1. des Corol. 35. 36.

1°. Les perpendiculaires (part. 1. 2.) AO, BQ, au plan HG, étant aussi paralleles entr'elles, & ces deux parallelismes rendant les angles RAO, PBQ, égaux entr'eux, & consequemment aussi $\sqrt{\text{RAO.}} = \sqrt{\text{PBQ.}}$, l'on aura ici O. Q :: $\sqrt{\text{RAD.}} \sqrt{\text{PBD.}}$. c'est-à-dire, les différentes charges O, Q, du plan HG, en raison des sinus des angles RAD, PBD, compris chacun entre les directions de chaque puissance, & chaque poids soutenu par elle sur ce plan.

2°. Donc si l'on prolonge RA jusqu'à la rencontre en X de BD prolongée, le parallelisme supposé entre les directions AR, BP, des puissances R, P, rendant l'angle

$PBD = RXD = AXD$, & conséquemment $\int PBD = \int AXD$,
 outre (*Déf. 9. Corol. 2.*) $\int RAD = \int XAD$; l'on aura pa-
 reillement ici $O. Q. : \int XAD. \int AXD$ (*Lem. 8. Corol. 2.*)
 $∴ XD. AD.$ c'est-à-dire, les différentes charges en $O, Q.$,
 du plan HG , en raison des côtez XD, AD , du triangle
 AXD .

3°. D'où l'on voit que la charge O du plan HG , doit
 être ici plus ou moins grande par rapport à sa charge $Q.$,
 selon que l'angle RAD (toujours égal à PBQ) sera plus
 ou moins petit ; puisque l'angle XAD en devenant plus ou
 moins grand, le côté XD du triangle AXD en doit de-
 venir aussi plus ou moins grand par rapport à son autre
 côté AD .

II. Si outre les directions AR, BP , des puissances $R,$
 P , parallèles entr'elles vers quelque côté que ce soit,
 sans sortir (*Corol. 4.*) des angles NAO, MBQ , l'on veut
 (comme dans le nomb. 3. des *Corol. 35. 36.*) que les di-
 rections AD, BD , des poids (*Hyp.*) égaux EON, FQM ,
 soient aussi parallèles entr'elles vers tel autre côté qu'on
 voudra, sans entrer dans les angles RAO, PBQ ; ces
 deux parallélismes joints à celui qui est (*part. 1. 2.*) en-
 tre les droites AO, BQ , rendant les angles $RAD = PBD$,
 $RAO = PBQ$, & conséquemment aussi leurs sinus $\int RAD$
 $= \int PBD$, $\int RAO = \int PBQ$, l'on aura ici $O = Q$, c'est-à-
 dire, les charges en O, Q , du plan HG égales entr'el-
 les, de même que le sont (*Hyp.*) les pesanteurs absolues
 des poids EON, FQM , & (nomb. 3. des *Corol. 35. 36.*)
 les puissances R, P , qui les soutiennent sur ces points
 aussi égales entr'elles.

Voilà jusqu'ici depuis le *Corol. 33. inclusivement pour un*
même ou pour differens poids de même pesanteur absolue, suc-
cessivement soutenus sur differens points d'un même plan in-
cliné par des puissances quelconques dirigées à volonté, sans
sortir (Corol. 4.) des angles NAO, MBQ . Voici présente-
ment pour des poids de différentes pesanteurs absolues, suc-
cessivement soutenus sur tous ces differens points par une mê-

me ou par différentes puissances égales dirigées encore à volonté comme ci-dessus.

COROLLAIRE XL.

Soient presentement les poids EON, FQM, de pesanteurs absolues différentes quelconques appellées aussi EON, FQM, & encore successivement soutenus sur différents points O, Q, d'un même plan incliné aussi quelconque GH par une même puissance, ou par deux R, P, égales entr'elles, dirigées encore comme l'on voudra, sans sortir (Cor. 4.) des angles NAO, MBQ. En quelque point D que concourent les directions des poids EON, FQM, par de-là le plan HG sans entrer dans les angles RAO, PBQ; le Corol. 10. fait encore voir qu'en ce cas d'équilibre la pesanteur absolue du poids EON sera à celle du poids FQM en raison composée de la directe des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puissances R, P, qui les soutiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, menées des points A, B, au plan HG, & de la reciproque des sinus des angles DAO, DBQ, que les directions de ces poids font avec ces mêmes perpendiculaires, c'est-à-dire, $EON. FQM :: \sqrt{RAO} \times \sqrt{DBQ} . \sqrt{PBQ} \times \sqrt{DAO}$.

Car en ce cas d'équilibre ce Corol. 10. donne $EON. R :: \sqrt{RAO} . \sqrt{DAO}$. & $P. FQM :: \sqrt{DBQ} . \sqrt{PBQ}$. Donc les puissances R, P, étant ici supposées égales entr'elles, ou la même quelconque, l'on y aura (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) $EON. FQM :: \sqrt{RAO} \times \sqrt{DBQ} . \sqrt{PBQ} \times \sqrt{DAO}$. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XLI.

Or (ainsi que dans le Corol. 34.) les perpendiculaires AO, BQ, se trouvant paralleles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S; l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à son alterne ASB, outre $DBQ = DBS$. Donc (Corol. 39.) l'on aura pareillement

ici

ici EON. FQM :: $\sqrt{RAO} \times \sqrt{DBS} . \sqrt{PBQ} \times \sqrt{ASB}$. Mais
(*Déf. 9. Corol. 2.*) $\sqrt{ASB} = \sqrt{BSD}$, & (*Lem. 8. Corol. 2.*)
 $\sqrt{DBS} . \sqrt{BSD} :: DS . BD$. Donc aussi EON. FQM :: $DS \times$
 $\sqrt{RAO} . BD \times \sqrt{PBQ}$.

C O R O L L A I R E XLII.

Puisque dans l'équilibre ici supposé entre chacune des
puissances (*Hyp.*) égales R, P, & chacun des poids EO,
FQ, de pesanteurs absolues quelconques sur differens
points O, Q, d'un même plan HG d'inclinaison aussi
quelconque, le Corol. 39. donne EON. FQM :: $\sqrt{RAO} \times$
 $\sqrt{DBQ} . \sqrt{PBQ} \times \sqrt{DAO}$.

1°. Si les directions ER, FP, des puissances R, P, sont
paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, con-
courantes en quelque point D que ce soit, les angles RAO
& PBQ se trouvant alors égaux entr'eux, & conséquem-
ment aussi leurs sinus \sqrt{RAO} , \sqrt{PBQ} , ainsi que dans le
nomb. 1. du Corol. 35. l'on aura pour lors EON. FQM
:: $\sqrt{DBQ} . \sqrt{DAO}$. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des
poids EON, FQM entr'elles en raison reciproque des si-
nus des angles DAO, DBQ, que leurs directions AD,
BD, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan HG.

2°. Si ce sont les directions des poids EON, FQM, qui
soient paralleles entr'elles, & non celles des puissances R,
P, qui les soutiennent sur les points O, Q, du plan GH;
les angles DAO, DBQ, se trouvant alors égaux entre-
eux, & conséquemment aussi leurs sinus \sqrt{DAO} , \sqrt{DBQ} ,
ainsi que dans le nomb. 2. du Corol. 35. l'on aura pour
lors EON. FQM :: $\sqrt{RAO} . \sqrt{PBQ}$. c'est-à-dire, les pesan-
teurs absolues des poids EON, FQM, en raison des sinus
des angles RAO, PBQ, que les directions des puissan-
ces R, P, qui les soutiennent, font avec AO, BQ, per-
pendiculaires au plan GH, sur les points O, Q, duquel
ces poids sont soutenus par ces puissances.

3°. Si les directions de ces puissances sont paralleles en-
tr'elles, & celles des poids aussi, non seulement les an-
gles RAO, PBQ, mais encore les angles DAO, DBQ.

se trouvant alors égaux entr'eux, comme dans les précédens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors $EO = FQ$, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON , FQM , alors égales entr'elles, aussi-bien (*Hyp.*) que les puissances R , P , qu'on suppose les soutenir ainsi sur les points O , Q , du plan GH .

C O R O L L A I R E X L I I I.

Puisqu'aussi dans l'équilibre supposé le Corol. 4. donne $EON.FQM :: DS \times /RAO. DB \times /PBQ$.

1°. Si les directions ER , EP , des puissances R , P , sont paralleles entr'elles, & celles des poids EON , FQM , concourantes en quelque point D que ce soit, ainsi que dans le nomb. 1. du précédent Corol. 41. les angles RAO , PBQ , se trouvant encore égaux ici comme là, & par conséquent aussi leurs sinus $/RAO$, $/PBQ$, l'on aura pour lors $EON.FQM :: DS. DB$.

2°. Si ce sont les directions AD , BD , des poids EON , FQM , qui soient paralleles entr'elles, & non celles des puissances R , P , qui les soutiennent sur les points O , Q , du plan incliné HG ; cette hypothese donnant ici $DS = DB$, comme dans le nomb. 2. du Corol. 36. l'on aura ici $EON.FQM :: /RAO. /PBQ$. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON , FQM , en raison des sinus des angles RAO , PBQ , que les directions des puissances R , P , font avec AO , BQ , perpendiculaires au plan HG , sur lequel elles les soutiennent, ainsi que dans le nomb. 2. du précédent Corol. 41.

3°. Enfin si les directions de ces puissances sont paralleles entr'elles, & celles de ces poids aussi; ayant alors $/RAO = /PBD$, & $DS = DB$, l'on aura aussi pour lors $EO = FQ$, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EO , FQ , alors égales entr'elles, ainsi que dans le nomb. 3. du précédent Corol. 41.

C O R O L L A I R E X L I V.

Toutes choses demeurant ainsi les mêmes que dans le

Corol. 40. c'est-à-dire, les puissances R, P, étant égales entr'elles, & le reste tel qu'on voudra, les noms O, Q, des différentes charges du plan HG en O, Q, demeurant aussi les mêmes que dans le Corol. 39. l'on aura (Cor. 9.) $O. R :: \int DAR. \int DAO.$ & la puissance P ou son égale (Hyp.) $R. Q :: \int DBQ. \int DBP.$ Donc (en multipliant par ordre) $O. Q :: \int DAR \times \int DBQ. \int DBP \times \int DAO.$ c'est-à-dire (dans la présente hypothèse des puissances égales) les différentes charges O, Q, du plan HG, en raison composée de la directe des sinus des angles totaux DAR, DBP, & de la reciproque des sinus des angles partiels DAO, DBQ.

C O R O L L A I R E XLV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, se trouvant toujours parallèles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S, comme dans les Corol. 34. 41. l'on aura ici comme là, les angles DAO = ASB, & DEQ = DBS. Donc (Cor. 44.) $O. Q :: \int DAR \times \int DBS. \int DBP \times \int ASB.$ Mais (Def. 9. Corol. 2.) $\int ASB = \int BSD$, & (Lem. 8. Corol. 2.) $\int DBS. \int BSD :: DS. BD.$ Donc aussi $O. Q :: DS \times \int DAR. BD \times \int DBP.$

C O R O L L A I R E XLVI.

Puisque dans l'équilibre ici supposé des puissances égales R, P, avec les poids quelconques EO, FQ, sur différents points O, Q, d'un même plan HG, dont les charges en ces points sont aussi appelées O, Q; le Corol. 44. donne $O. Q :: \int DAR \times \int DBQ. \int DBP \times \int DAO.$

1°. Si les directions AD : BD, des poids EON, FQM, sont parallèles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puissances R, P, étant telles qu'on voudra, sans sortir (Corol. 4.) des angles NAO, MBQ; les angles DAO, DBQ, se trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors $O. Q :: \int DAR. \int DBP.$ c'est-à-dire, les charges O, Q, du plan HG, en raison des sinus des

angles DAR, DBP, dans ce parallélisme des directions des poids quelconques EON, FQM, soutenus sur differens points O, Q, d'un même plan HG par des puissances égales R, P, de directions quelconques, ainsi que le parallélisme de directions des puissances quelconques, qui y soutenoient des poids égaux, l'a donné dans le nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 39.

2°. D'où l'on voit que soit que des poids absolument égaux, & de directions quelconques, soient soutenus sur differens points d'un même plan quelconque par différentes puissances de directions paralleles entr'elles; ou que des puissances égales de directions quelconques y soutiennent des poids de différentes pesanteurs absolues, & de directions paralleles entr'elles: les charges de ce plan en ces differens points, seront toujours entr'elles comme les sinus des angles compris chacun entre les directions de chaque puissance & de chaque poids soutenu par elle, du concours desquels chacune de ces charges résulte.

3°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puissances égales R, P, sont aussi paralleles entr'elles vers tel côté qu'on voudra, sans sortir (Cor. 4.) des angles NAO, MBQ; ce double parallélisme rendant non seulement les angles DAO, DBQ, mais aussi les angles DAR, DBP, égaux entr'eux pris ainsi deux à deux, rendra pour lors $O=Q$; c'est-à-dire, que les charges O, Q, du plan HG aux points de ces noms, seront alors pareillement égales, les puissances R, P, étant supposées l'être, ainsi que ce double parallélisme a rendu ces charges égales dans l'art. 2. du Corol. 39. où les poids EON, FQM, étoient supposez d'égales pesanteurs absolues.

C O R O L L A I R E XLVII.

Puisque dans la même hypothese du Corol. 40. c'est-à-dire, dans l'hypothese des puissances R, P, égales entre-

elles, le reste étant tel qu'on voudra, le Corol. 45. donne $O.Q :: DS \times fDAR. BD \times fDBP.$

1°. Si les directions AD, BD , des poids EON, FQM , sont parallèles entr'elles vers quelque côté que ce soit, celles des puissances telles qu'on voudra; ainsi que dans le nomb. 1. du précédent Corol. 46. ce parallélisme rendant ici $DS=BD$, comme dans les nomb. 2. des Corol. 36. 43. il donnera ici $O.Q :: fDAR. fDBP.$ ainsi que dans le nomb. 1. du précédent Corol. 46.

2°. Si outre les directions AD, BD , des poids EON, FQM , parallèles entr'elles vers quelque côté que ce soit, celles AR, BP , des puissances (égales R, P), sont aussi parallèles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra; ce double parallélisme rendant non seulement $DS=BD$, mais aussi $fDAR=fDBP$, donnera ici $O=Q$, c'est-à-dire, que les charges O, Q , du plan HG aux points de ces noms, seront ici égales entr'elles, ainsi que dans le nomb. 3. du précédent Corol. 46.

Depuis le Corol. 33. inclusivement, voilà pour des poids d'égales pesanteurs absolues, soutenus sur differens points d'un même plan par des puissances ou forces quelconques; & pour des poids de pesanteurs absolues différentes, que des puissances égales y soutiendroient. Voici presentement pour des poids & des puissances quelconques qui, en équilibre sur ces points, y causeroient par leurs concours des charges égales au plan sur lequel ces differens équilibres se feroient.

C O R O L L A I R E X L V I I I.

Les noms O, Q , des charges du plan GH en O, Q , demeurant toujours les mêmes, si presentement on suppose ces deux charges égales entr'elles, quelque soit le reste, le Corol. 9. donnera $R. O :: fDAO. fDAR.$ & la charge Q ou son égale (*Hyp.*) $O. P :: fDBP. fDBQ.$ Donc (en multipliant par ordre) $R.P :: fDAO \times fDBP. fDBQ \times fDAR.$ c'est-à-dire, que les puissances R, P , seront toujours ici entr'elles en raison composée de la direction des si-

mus des angles partiels DAO, DBQ, & de la reciproque des sinus des angles totaux DAR. DBP.

COROLLAIRE XLIX.

Or on voit dans les Corol. 34. 41. 45. qu'en general $\sqrt{DAO} = \sqrt{ASB} = \sqrt{BSD}$, & $\sqrt{DBQ} = \sqrt{DBS}$. Donc (Corol. 48.) l'on aura pareillement ici $R. P. :: \sqrt{BSD} \times \sqrt{DBP}.$ $\sqrt{DBS} \times \sqrt{DAR}$. mais (Lem. 8. Cor. 2.) $\sqrt{BSD}.$ $\sqrt{DBS} :: BD.$ DS . Donc aussi $R. P. :: BD \times \sqrt{DBP}.$ $DS \times \sqrt{DAR}$.

COROLLAIRE L.

Puisque dans la presente hypothese des charges egales O Q, du plan HG, le Corol. 48. donne $R. P. :: \sqrt{DAO} \times \sqrt{DBP}.$ $\sqrt{DBQ} \times \sqrt{DAR}$.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, sont deux paralleles quelconques, & celles des puissances R, P, telles qu'on voudra, ce parallelisme joint a celui des lignes AO, BQ, perpendiculaires (part. 1. 2.) au plan HG, rendant les angles DAO, DBQ, egaux entr'eux, l'on aura ici $R. P. :: \sqrt{DBP}.$ \sqrt{DAR} . c'est-à-dire, les puissances R, P, en raison reciproque des sinus des angles totaux DAR, DPB.

2°. Si non seulement les directions des poids sont paralleles entr'elles, mais aussi celles des puissances, ces deux parallelismes ajoutez à celui qu'ont entr'elles les lignes AO, BQ, rendant les angles DAO = DBQ, & DBP = DAR rendront aussi pour lors $R = P$, c'est-à-dire, les puissances R, P, egales entr'elles.

COROLLAIRE LI.

Dans la même hypothese des charges egales O, Q, du plan HG, le Corol. 49. donnant aussi $R. P. :: BD \times \sqrt{DBP}.$ $DS \times \sqrt{DAR}$.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, sont paralleles entr'elles, & non celles des puissances R, P; cette hypothese rendra ici $BD = DS$ comme dans le nomb. 1. du Corol. 47. doit y rendre aussi $R. P. :: \sqrt{DBP}.$ \sqrt{DAR} .

c'est-à-dire, les puissances R, P , entr'elles en raison reciproque des sinus des angles DAR, DBP , compris chacun entre les directions de chacune d'elles & du poids qu'elle soutient.

2°. Si outre les directions AD, BD , des poids EON, FQM , paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, celles AR, BP , des puissances R, P , sont aussi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra, ce double parallelisme rendant non seulement $DB=DS$, mais encore $DAR=DBP$, doit aussi rendre ici $R=P$, c'est-à-dire, les puissances R, P , égales entr'elles.

COROLLAIRE LII.

Dans la même hypothese des charges égales O, Q , du plan HG , le Corol. 9. donnera $EON. O :: \sqrt{RAO} . \sqrt{DAR}$. & la charge Q , ou son égale (*Hyp.*) $O. FQM :: \sqrt{DBP} . \sqrt{PBQ}$. Donc (en multipliant par ordre) $EON. FQM :: \sqrt{RAO} \times \sqrt{DBP} . \sqrt{PBQ} \times \sqrt{DAR}$. c'est-à-dire, les pesanteurs des poids EON, FQM , entr'elles en raison composée de la directe des angles partiels, RAO, PBQ , & de la reciproque des sinus des angles totaux DAR, DBP . Donc,

1°. Si les directions AR, BP , des puissances R, P , sont paralleles entr'elles, celles des poids étant telles qu'on voudra, les angles RAO, PBQ , se trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors ici $EON. FQM :: \sqrt{DBP} . \sqrt{DAR}$. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM , en raison reciproque des sinus des angles totaux DAR, DBP .

2°. Or ce cas de parallelisme des directions AR, BP , des puissances R, P , rend aussi $\sqrt{DBP} = \sqrt{DXA}$, & (*Déf. 9. Cor. 2.*) $\sqrt{DAR} = \sqrt{DAX}$. Donc (*comb. 1.*) ce même parallelisme rend pareillement ici $EON. FQM :: \sqrt{DXA} . \sqrt{DAX}$ (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: $AD. XD$. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM , en raison des côtes AD, XD , du triangle AXD .

3°. D'où l'on voit que si outre les directions AR, BP, des puissances R, P, paralleles entr'elles, celles AD, BD, des poids EON, FQM, le sont aussi entr'elles, ce double parallelisme joint à celui (*part.* 1. 2.) des droites AO, BD, entr'elles, rendant les angles $RAO = PBQ$, & $DBP = DAR$, rendroit pareillement ici $EON = FQM$, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, égales entr'elles.

COROLLAIRE LIII.

Les noms O, Q, des charges du plan HG aux points O, Q, demeurant toujours les mêmes, il suit des Corol.

33. 39. 40. 44. 48. § 2. que,

I. Puisque l'hypothese des poids EON, FQM, d'égales pesanteurs absolues, quelque soit le reste, donne (*Cor.* 33.) $R. P :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO$.

1°. Le Corol. 9. donnant $P. Q :: \int DBQ. \int DBP$. Cette hypothese donnera aussi $R. Q :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBP \times \int RAO$.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement $O. R :: \int DAR. \int DAO$. cette même hypothese donnera $O. P :: \int DAR \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO$.

II. Puisque la même hypothese d'égales pesanteurs absolues des poids EON, FQM, donne de plus (*Corol.* 39.) $O. Q :: \int RAD \times \int PBQ. \int DPB \times \int RAO$.

1°. Le Corol. 9. donnant $R. O :: \int DAO. \int RAD$. cette hypothese de pesanteurs absolues EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore $R. Q :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBP \times \int RAO$. ainsi que dans le nomb. 1. du précédent art. 1.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement $Q. P :: \int DBP. \int DBQ$. la même hypothese de pesanteurs absolues des poids EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore aussi $O. P :: \int RAD \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO$. comme dans le nomb. 1. du précédent art. 1.

III. Puisque l'hypothese des puissances R, P, égales entr'elles, quelque soit le reste, donne (*Corol.* 40.) $EON. FQM :: \int RAO \times \int DBQ. \int PBQ \times \int DAO$.

1°. Le

1°. Le Corol. 9. donnant FQM. $Q :: \int PBQ. \int DBP.$
cette hypothese de $R=P$, donnera aussi EON. $Q :: \int RAO$
 $\times \int DBQ. \int DBP \times \int DAO.$

2°. Le Corollaire 9. donnant pareillement O. EON
 $:: \int RAD. \int RAO.$ cette même hypothese de $R=P$ don-
nera aussi O, FQM $:: \int RAD \times \int DBQ. \int PBQ \times \int DAO.$

IV. Puisque la même hypothese de $R=P$ donne de
plus (Corol. 44.) O. $Q :: \int RAD \times \int DBQ. \int DBP \times \int DAO.$

1°. Le Corol. 9. donnant EON. O $:: \int RAO. \int RAD.$
cette hypothese de $R=P$ donnera encore EON. Q
 $:: \int RAO \times \int DBQ. \int DBP \times \int DAO.$ ainsi que dans le nomb.
1. du précédent art. 3.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement Q. FQM $:: \int DBP.$
 $\int PBQ.$ la même hypothese de $R=P$, donnera encore aussi
O. FQM $:: \int RAD \times \int DBQ. \int PBQ \times \int DAO.$ comme dans
le nomb. 2. du précédent art. 3.

V. Puisque l'hypothese des charges O, Q, du plan
HG en ses points O, Q, égales entr'elles, quelque soit le
reste, donne (Corol. 48.) R. P $:: \int DAO \times \int DBP. \int DBQ \times$
 $\int DAR.$

1°. Le Corol. 9. donnant P. FQM $:: \int DBQ. \int PBQ.$
cette hypothese de $O=Q$ donnera aussi R. FQM $:: \int DAO \times$
 $\int DBP. \int PBQ \times \int DAR.$

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement EON. R $:: \int RAO.$
 $\int DAO.$ cette même hypothese de $O=Q$ donnera aussi
EON. P $:: \int RAO \times \int DBP. \int DBQ \times \int DAR.$

VI. Puisque la même hypothese de $O=Q$ donne de
plus (Corol. 52.) EON. FQM $:: \int RAO \times \int DBP. \int PBQ \times$
 $\int DAR.$

1°. Le Corol. 9. donnant R. EON $:: \int DAO. \int RAO.$
cette hypothese de $O=Q$ donnera encore R. FQM
 $:: \int DAO \times \int DBP. \int PEQ \times \int DAR.$ ainsi que dans le nomb.
1. du précédent art. 5.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement FQM. P $:: \int PEQ.$
 $\int DBQ.$ cette hypothese de $O=Q$ donnera encore aussi
EON. P $:: \int RAO \times \int DBP. \int DBQ \times \int DAR.$ comme dans
le nomb. 2. du précédent art. 5.

Toutes ces analogies résultantes des Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. par le moyen du Corol. 9. dans les six articles du présent Corollaire 53. peuvent encore se détailler en plusieurs autres, suivant les différentes hypothèses qu'on y peut faire des angles qui y sont compris : & cela de la manière que les analogies de ces Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. l'ont été ci-dessus, & qu'on le va voir encore dans les deux Corollaires suivans.

Voilà jusqu'ici pour des poids soutenus sur différens points d'un même plan : en voici présentement de soutenus sur différens plans.

COROLLAIRE LIV.

FIG. 213.
214.

Soient présentement deux poids EO, FQ, de même pesanteur absolue, & de directions AD, BD, concourantes en tel point D qu'on voudra, soutenus sur deux plans HG, HL, de hauteurs & de longueurs quelconques (ce n'est que pour épargner les figures qu'on marque ici ces plans comme s'ils étoient de même hauteur ; & que les directions, tant des poids, que des puissances, n'expriment pas ici toutes les hypothèses qu'on en va faire : c'est à l'imagination du Lecteur à faire le reste qu'il pourra se figurer sans peine sur ceci.) un sur chacun, par deux puissances R, P, de directions quelconques ER, FP, qui prolongées concourent en A, B, avec celles des poids ; desquels points A, B, soient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, à ces plans HG, HL. On trouvera ici, comme dans le Corol. 33. $R.P. :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO$. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux parallèles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres parallèles entr'elles aussi quelconques, dont la seconde BD prolongée rencontre OA prolongée en N, laquelle OA prolongée rencontre aussi BP en V, & QB prolongée en M : ayant alors $\int RAO = \int PVO = \int BVM$, $\int DAO = \int BNM$, $\int PBQ = \int MBV$, & $\int DBQ = \int MBN$; l'on aura pour lors $R.P. :: \int BNM \times \int MBV. \int MBN \times \int BVM$. Or (Lem. 8. Corol. 2.) $\int BNM. \int MBN :: BM. MN$. Et $\int MBV. \int BVM :: MV. BM$. Donc

aussi pour lors $R. P. :: BM \times MV. MN \times BM :: MV. MN.$
quelques soient les hauteurs des plans $HG, HL.$

2°. Si les directions $AR, BP,$ des puissances $R, P,$ sont parallèles chacune à chacune des longueurs $HG, HL,$ des plans sur lesquels elles soutiennent chacune un des poids $EO, FQ;$ sçavoir, AR à $HG,$ & BP à $HL;$ & si les directions $AD, BD,$ sont parallèles aussi chacune à chacune des hauteurs de ces deux plans, ou à leur hauteur commune $HK,$ s'ils ont la même : cette hypothèse rendant les angles $RAO = HOA = HQB = PBQ, DAO = HGK, DBQ = HLG;$ & conséquemment aussi $\int RAO = \int PBQ, \int DAO = \int HGK$ (*Déf. 9. Corol. 2.*) $= \int HGL, \int DBQ = \int HLG;$ cette même hypothèse donnera ici $R. P. :: \int HGL \times \int RAO. \int HLG \times \int RAO :: \int HGL. \int HLG.$ c'est-à-dire, les puissances $R, P,$ entr'elles en raison des sinus des angles HGL ou $HGK,$ & $HLG,$ d'inclinaison des plans $HG, HL,$ aux longueurs desquels on suppose ici que ces directions de ces puissances sont parallèles chacune à chacune, quelques soient les hauteurs de ces plans.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales, ou la même HK pour tous les deux; ayant pour lors (*Lem. 8. Corol. 2.*) $\int HGL. \int HLG :: HL. HG.$ l'hypothèse du precedent nomb. 2. ajoutée à celle-ci, donnera pareillement ici $R. P. :: HL. HG.$ c'est-à-dire, les puissances $R, P,$ ici entr'elles en raison reciproque des longueurs $HG, HL,$ des plans, auxquelles on suppose encore ici que leurs directions $AR, BP,$ sont parallèles chacune à chacune de ces longueurs.

4°. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le nomb. 3. si l'on imagine sur le diamètre HK le demi-cercle $HTSK$ dans la Fig. 210. où le cercle entier $HTSK$ dans la Fig. 211. lequel perpendiculaire aux plans $HG, HL,$ en rencontre ces longueurs en $S, T:$ leur hauteur commune HK étant ici supposée perpendiculaire à la droite $KL,$ sur laquelle leurs bases sont aussi supposées; les perpendiculaires $KS, KT,$ aux longueurs $HG, HL,$

de ces plans, donneront ici $HS. HK :: HK. HG = \frac{HK \times HK}{HS}$.

Et $HT. HK :: HK. LH = \frac{HK \times HK}{HT}$. Donc dans cette hypo-

thèse du précédent nomb. 3. ce même nomb. 3. donnera pa-

reillement ici $R. P :: \frac{HK \times HK}{HT} . \frac{HK \times HK}{HS} :: \frac{I}{HT} . \frac{I}{HS} :: HS.$

HT. c'est-à-dire, les puissances R, P , entr'elles en raison des parties HS, HT , des longueurs de leurs plans, comprises dans le cercle $HTSK$ ou $HTKS$.

La même chose peut encore se démontrer par le seul Corol. 20. art. 1. nomb. 1. car ce nomb. 1. donnant ici $R. EO :: HK. HG :: HS. HK$. Et le poids FQ ou son égal (*Hyp.*) $EO. P :: HL. HK :: HK. HT$. L'on aura encore ici (en raison ordonnée) $R. P :: HS. HT$. ainsi qu'on le vient de trouver dans le présent nomb. 4.

C O R O L L A I R E L V.

En appellant (comme jusqu'ici) O, Q , les charges des plans HG, HL , la même hypothèse des poids EO, FQ , d'égales pesanteurs absolues, donnera encore ici ces charges $O. Q :: \sqrt{RAD} \times \sqrt{PBQ} . \sqrt{PBD} \times \sqrt{RAO}$. sur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 39. sur differens points d'un même plan; ce qui, outre le détail qui s'en est fait là, donne encore le suivant.

1°. Si les directions AR, BP , des puissances R, P , sont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD , des poids EO, FQ , deux autres paralleles entr'elles aussi quelconques, comme dans le nomb. 1. du Corol. 54. ce double parallelisme donnant $\sqrt{RAD} = \sqrt{PBD}$, $\sqrt{PBQ} = \sqrt{VBM}$, & $\sqrt{RAO} = \sqrt{PVO} = \sqrt{BVM}$, l'on aura ici les charges $O. Q :: \sqrt{PBQ} . \sqrt{RAO} :: \sqrt{VBM} . \sqrt{BVM}$ (*Lem. 8. Corol. 2.*) $:: MV. MB$.

2°. Si les directions AR, BP , des puissances R, P , sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL ,

des plans, sur chacun desquels elles soutiennent chacune un des poids EO, FQ, dont les directions AD, BD, qui rencontrent les plans en Y, Z, soient parallèles aux hauteurs de ces plans; le tout comme dans le nomb. 2. du précédent Corol. 54. Cette hypothese rendant $\int \text{PBQ} = \int \text{RAO}$, $\int \text{RAD} = \int \text{AYH} = \int \text{GHK}$, & $\int \text{PBD} = \int \text{BZH} = \int \text{LHK}$, l'on aura ici O. Q. :: $\int \text{RAD}$. $\int \text{PBD}$:: $\int \text{GHK}$. $\int \text{LHK}$. c'est-à-dire, les charges O, Q, des plans HG, HL, en raison des sinus des angles GHK, LHK, que les longueurs de ces plans font avec leurs hauteurs.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales ou la même HK pour les deux plans; si l'on prend cette hauteur commune HK pour le sinus total, l'on aura (Déf. 9. Corol. 1.) KS, KT, pour les sinus de ces angles GHK, LHK. Donc en ce cas-ci on aura O. Q. :: KS. KT. le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle KSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54.

Voilà pour un même ou differens poids de même pesanteur absolue, soutenus sur differens plans d'inclinaisons & de hauteurs quelconques par des puissances dirigées à volonté, aussi bien que les poids. Voici presentement pour des poids de differentes pesanteurs absolues, soutenus sur differens plans par des puissances égales, quelles que soient encore les inclinaisons & les hauteurs de ces plans; quelles que soient encore aussi les directions, tant des poids, que des puissances égales qu'on suppose les soutenir chacune en équilibre sur chacun de ces plans.

COROLLAIRE LVI.

Soient presentement les puissances R, P, égales entr'elles, & les poids EO, FQ, de differentes pesanteurs absolues quelconques, soutenus encore par ces puissances sur differens plans HG, HL, d'inclinaisons & de hauteurs aussi quelconques, quoique, pour épargner les Figures, on ne les voye ici que de même hauteur HK. Tout le reste demeurant le même que dans le Corol. 54. l'on aura ici

Hij

Fig. 223.
214.

comme dans le Corol. 40. $EO. FQ :: \sqrt{RAO} \times \sqrt{DBQ}.$
 $\sqrt{PBQ} \times \sqrt{DAO}.$ Donc,

1°. Si les directions ER, FP, des puissances R, P, sont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles aussi entr'elles quelconques; & le reste comme dans le nomb. 3. du Corol. 54. Cela donnant ici comme là, $\sqrt{RAO} = \sqrt{BVM}$, $\sqrt{BDQ} = \sqrt{MBN}$, $\sqrt{PBQ} = \sqrt{MBV}$, & $\sqrt{DAO} = \sqrt{BNM}$; l'on aura ici $EO. FQ :: \sqrt{BVM} \times \sqrt{MBN}.$ $\sqrt{MBV} \times \sqrt{BNM}.$ Or (Lem. 8. Corol. 2.) $\sqrt{BVM}.$ $\sqrt{MBV} :: BM. MV.$ Et $\sqrt{MBN}.$ $\sqrt{BNM} :: MN. BM.$ Donc on aura pareillement ici $EO. FQ :: BM \times MN. MV \times BM :: MN. MV.$ quelles que soient encore les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les direction AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans sur lesquels elles soutiennent les poids EO, FQ; sçavoir, AR à HG, & BP à HL; & les directions AD, BD, de ces poids paralleles aussi chacune à chacune des hauteurs de ces plans, ou toutes deux à leur hauteur commune HK, s'ils ont la même: cette hypothese, qui est celle des nomb. 2. des précédens Corol. 54. 55. rendant ici comme là les sinus $\sqrt{RAO} = \sqrt{PBQ}$, $\sqrt{DAO} = \sqrt{HGK}$, $\sqrt{DBQ} = \sqrt{HLG}$, donnera ici $EO. FQ :: \sqrt{RAO} \times \sqrt{HLG}.$ $\sqrt{RAO} \times \sqrt{HGK} :: \sqrt{HLG}.$ $\sqrt{HGK}.$ c'est-à-dire, les poids EO, FQ, ou leurs pesanteurs absolues, en raison reciproque des sinus des angles HGK, HLG, d'inclinaison des plans sur lesquels on suppose ici ces poids soutenus par des puissances égales R, P, dirigées parallelement aux longueurs HG, HL, de ces plans, quelles que soient encore les hauteurs de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut presentement que ces plans HG, HL, soient de même hauteur HK, comme dans les nomb. 3. des précédens Corol. 54. 55. ayant alors (Lem. 8. Corol. 2.) $HG. HL :: \sqrt{HLG}.$ \sqrt{HGL} (Déf. 9. Corol. 2.) $:: \sqrt{HLG}.$ $\sqrt{HGK}.$ l'hypothese du précédent nomb. 2. donnera pareillement ici $EO. FQ :: HG. HL.$ c'est-à-dire, les poids EO, FQ, en raison des longueurs HG,

HL, des plans sur lesquels on les suppose soutenus par des puissances égales R, P.

Un Auteur de ce tems rejette ce sentiment-ci, le trouvant contraire à la prop. 27. de sa Mécanique ; mais cette proposition 27. n'étant fondée que sur la prop. 26. qu'on va voir être fautive dans le Corol. 4. du Théoreme suivant, ce Corollaire 4. suffira pour faire voir aussi la fausseté de celle-là.

4°. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent nomb. 3. si l'on imagine sur le diamètre HK le demi-cercle HTSK de la Fig. 210. ou le cercle entier HSKT de la Fig. 211. & le reste comme dans le nomb. 4.

du Cor. 54. ayant ici comme là $HG = \frac{HK \times HK}{HS}$, & $HL =$

$\frac{HK \times HK}{HT}$; le précédent nomb. 3. donnera encore ici EO.

$FQ :: \frac{HK \times HK}{HS} \cdot \frac{HK \times HK}{HT} :: \frac{1}{HS} \cdot \frac{1}{HT} :: HT \cdot HS$. c'est-à-

dire, les poids EO, FQ, en raison reciproque des parties HS, HT, des longueurs de leurs plans, comprises dans le demi-cercle HTSK, ou dans le cercle entier HSKT.

Cela se pourroit encore démontrer de la seconde manière dont l'a été le nomb. 4. du Corol. 54.

COROLLAIRE LVII.

En appellant encore O, Q, les charges des plans HG, HL, la même hypothese des puissances R, P, égales entr'elles, donnera encore ici les charges O. Q :: $\int RAD \times \int DBQ \cdot \int DBP \times \int DAO$. sur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 44. sur les differens points d'un même plan. Ce qui, outre le détail qui s'en est fait là, fournit encore le suivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles quelconques ; & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles aussi quelconques,

le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme donnant $\int RAD = \int DBP, \int DBQ = \int MBN$, & $\int DAO = \int DNO = \int BNM$, l'on aura ici les charges $O. Q :: \int DBQ. \int DAO :: \int MBN. \int BNM$ (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: $MN. MB$. quelles que soient les hauteurs des plans HG, LH .

2°. Si les directions AR, BP , des puissances R, P , sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL , des plans sur chacun desquels elles soutiennent chacune un des poids EO, FQ , dont les directions AD, BD , qui rencontrent ces plans HG, HL , en Y, Z , soient paralleles aux hauteurs paralleles de ces mêmes plans; le tout comme dans le nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme rendant $\int RAD = \int AYH = \int GHK, \int DBP = \int BZH = \int LHK, \int DBQ = \int MBN, \int DAO = \int ANB = \int MNB$; l'on aura ici $O. Q :: \int GHK \times \int MBN. \int LHK \times \int MNB$ (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: $\int GKH \times MN. \int LHK \times MB$. quelles que soient les hauteurs des plans HG, HL , qui soutiendront ces charges O, Q , résultantes perpendiculairement sur eux du concours de chaque puissance & de chaque poids supposez en équilibre sur chacun de ces plans, quelles qu'en soient encore les hauteurs paralleles entr'elles.

3°. Si l'on veut presentement que les hauteurs de ces plans soient égales, ou la même HK , cette hauteur commune HK prise pour le sinus total, donnera (*Déf. 9. Corol. 1.*) $KS = \int GHK$, & $KT = \int LHK$. Donc en ce cas les charges seront $O. Q :: KS \times MN. KT \times MB$.

COROLLAIRE LVIII.

Enfin si l'on suppose les charges O, Q , des plans HG, HL , égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 48. les puissances $R. P :: \int DAO \times \int DBP. \int DBQ \times \int DAR$. Donc,

1°. Si les directions AR, BP , de ces puissances R, P , sont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD , des poids

pois EO, FQ, deux autres paralleles aussi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Cor. 54. 55. 56. 57. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 1. du précédent Corollaire 57. $\int DAO = \int DNO = \int MNB$, $\int DBQ = \int MBN$, & $\int DBP = \int DAR$; l'on aura ici R. P $:: \int DAO. \int DBQ :: \int MNB. \int MBN$ (Lem. 8. Corol. 2.) $:: MB. MN.$ quelles que soient les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les directions AR, BP, de ces puissances R, P, sont deux paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, paralleles aussi aux hauteurs paralleles de ces plans sur lesquels on suppose ces puissances en équilibre avec ces poids; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. Ce double parallelisme donnant ici, comme dans le nomb. 2. du précédent Corol. 57. $\int DAO = \int ANB = \int MNB$, $\int DBQ = \int MBN$, $\int DBP = \int BZH = \int LHK$, & $\int DAR = \int AYH = \int GHK$, l'on aura ici R. P $:: \int MNB \times \int LHK. \int MBN \times \int GHK$ (Lem. 8. Corol. 2.) $:: MB \times \int LHK. MN \times \int GHK.$ quelles que soient encore les hauteurs paralleles des plans HG, HL, sur lesquels ces puissances R, P, sont supposées en équilibre avec les poids EO, FQ, chacune avec chacun sur chacun de ces plans de hauteurs paralleles quelconques.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales, ou la même HK, cette hauteur commune HK prise pour le sinus total, donnera ici (Déf. 9. Corol. 1.) $KT = \int LHK$, & $KS = \int GHK$. Donc en ce cas-ci les puissances seront R. P $:: MB \times KT. MN \times KS.$

C O R O L L A I R E L I X.

Dans la même hypothese des charges O, Q, des plans HG, HL, égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 52. les poids de pesanteurs absolues EO. FQ $:: \int RAO \times \int DBP. \int PBQ \times \int DAR.$ Ce qui, outre le détail qui s'en est fait dans ce Corol. 52. fournit encore le suivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles aussi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 1. du Corol. 55. $\int RAO = \int BVM$, $\int PBQ = \int MBV$, & $\int DBP = \int DAR$, l'on aura ici $EO. FQ :: \int RAO. \int PBQ :: \int BVM. \int MBV$ (Lem. 8. Corol. 2.) :: MB. MV. quelles que soient les hauteurs de plans HG. HL.

2°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & que les directions AD, BD, des poids EO, FQ, soutenus (*Hyp.*) par ces puissances sur les points O, Q, de ces plans, soient aussi paralleles aux hauteurs paralleles de mêmes plans; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 2. du Corol. 55, $\int RAO = \int PBQ$, $\int DBP = \int BZH = \int LHK$, & $\int DAR = \int AYH = \int GHK$. l'on aura ici $EO. FQ :: \int DBP. \int DAR :: \int LHK. \int GHK$. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EO, FQ, en raison reciproque des sinus des angles GHK, LHK, que les longueurs HG, HL, des plans sur lesquels ces poids sont supposez soutenus par les puissances R, P, sont avec les hauteurs paralleles quelconques de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales entr'elles, ou soient la même HK; cette hauteur commune HK prise pour le sinus total, donnera (*Déf. 9. Corol. 1.*) $KT = \int LHK$, & $KS = \int GHK$. Donc en ce cas-ci l'on aura $EO. FQ :: KT. KS$. Le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle entier HSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54. & par tout depuis jusqu'ici.

C O R O L L A I R E LX.

Soit presentement que deux poids EO, FQ, soient soutenus par deux puissances R, P, sur differens points d'un

même plan, comme dans les Fig. 211. 212. ou sur différens plans, comme dans les Fig. 213. 214. les Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. 54. 55. 56. 57. 58. 59. font voir qu'en cas d'équilibre par tout là, c'est-à-dire, tant sur différens points d'un même plan, que sur différens plans dont les charges en O, Q, soient encore appellées de ces noms O, Q.

1°. L'hypothese de $EO = FQ$, c'est-à-dire, d'égalité entre les pesanteurs absolues des deux poids de ces noms, donnera les puissances $R. P :: \int DAO \times \int PBQ. \int DBQ \times \int RAO$. ainsi que dans les Corol. 33. 54.

2°. La même hypothese des poids de pesanteurs absolues égales entr'elles, donnera les charges $O. Q :: \int RAD \times \int PBQ. \int PBD \times \int RAO$. ainsi que dans les Corollaires 39. 55.

3°. L'hypothese de $R = P$, c'est-à-dire, des puissances R, P , égales entr'elles, donnera $EO. FQ :: \int RAO \times \int DBQ. \int PBQ \times \int DAO$. pour le rapport des pesanteurs absolues des poids EO, FQ , ainsi que dans les Corol. 40. 56.

4°. La même hypothese des puissances égales R, P , donnera $O. Q :: \int RAD \times \int DBQ. \int DPB \times \int DAO$. pour le rapport des charges aux différens points O, Q , d'un même ou de différens plans, ainsi que dans les Col. 44. 57.

5°. L'hypothese de $O = Q$, c'est-à-dire, des charges égales d'un même ou de différens plans aux points de ces noms, donnera les puissances $R, P :: \int DAO \times \int DBP. \int DBQ \times \int DAR$. ainsi que dans les Corol. 48. 58.

6°. La même hypothese des charges égales O, Q , donnera $EO. FQ :: \int RAO \times \int DBP. \int PBQ \times \int DAR$. pour le rapport des pesanteurs absolues des poids EO, FQ , ainsi que dans les Corol. 52. 59.

COROLLAIRE LXI.

Il suit encore du Corol. 20. art. 1. nomb. 1. dans la Fig. 209. que deux puissances P, R , soutenant successivement un même poids C , ou d'eux d'égales pesanteurs

Fig. 209

absolues chacun sur un des plans AD, HD, suivant des directions CP, CR, parallèles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces deux plans, aux hauteurs AB, HK, la direction du poids successivement soutenu sur eux, soit toujours parallèle: il suit, dis-je, du nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20. que la somme $P+R$ des deux puissances P, R, soutiennent ainsi ce poids C sur différens plans, peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la pesanteur absolue (*Hyp.*) constante de ce même poids C.

Car si quelqu'un des deux plans AD, HD, par exemple, AD est plus long que l'autre HD, soit celui-ci prolongé vers E jusqu'à ce qu'on ait $DE=DA$; ensuite du point E la verticale EF parallèle aux hauteurs de ces plans. Cela fait, le Corol. 20. art. 1. nomb. 1. donnera $P.C::AB.AD$ (*Hyp.*) $::AB.ED$. Et $C.R::HD.HK::ED.EF$. Donc (en raison ordonnée) $P.R::AB.EF$. Et (en composant) $P.P+R::AB.AB+EF$. Or (*Corol. 20. art. 1. nomb. 1.*) $C.P::AD.AB$. Donc (en raison ordonnée) $C.P+R::AD.AB+EF$. Or il est visible que AD peut être égale, plus grande, ou plus petite que $AB+EF$, selon les différentes inclinaisons que les plans AD, HD ou DE, peuvent avoir sur la droite BF de leurs bases. Donc aussi le poids C peut être égal, plus grand, ou plus petit que la somme $P+R$ des puissances P, R, capables chacune de le soutenir successivement sur chacun de ces deux plans suivant des directions CP, CR, parallèles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces mêmes plans.

COROLLAIRE LXII.

Il suit aussi du même Corol. 20. art. 2. nomb. 1. que ce même poids quelconque C successivement soutenu sur chacun des plans AD, HD, par chacune de deux autres puissances S, T, suivant des directions CS, CT, parallèles à la base commune BK de ces deux plans, peut

être tantôt égal, tantôt plus grand, & tantôt moindre que la somme $S+T$ de ces deux autres puissances.

Car si l'on suppose DH prolongée de manière que la verticale EF rende $DF=BD$, le Corol. 20. art. 2. nomb. 1. donnera ici $S.C::AB.BD$ (*Hyp.*) $::AB.DF$. Et $C.T::DK.HK::DF.EF$. Donc (en raison ordonnée) $S.T::AB.EE$. Et (en composant) $S.S+T::AB.AB+EF$. Or (*Corol. 20. art. 1. nomb. 1.*) $C.S::BD.AB$. Donc (en raison ordonnée) $C.S+T::BD.AB+EF$. Or il est encore visible que BD peut être égale, plus grande, ou plus petite que $AB+EF$, selon les différentes inclinaisons des plans AD , HD , sur leur base commune BK . Donc aussi le poids C peut être encore ici égal, plus grand, ou moindre que la somme $S+T$ des puissances S , T , capables chacune de soutenir ce poids C sur chacun des plans AD , HD , suivant des directions CS , CT , parallèles à la base commune BK de ces deux plans.

On n'entrera point ici dans un plus grand détail des Corollaires qu'on pourroit encore tirer des précédens, & du présent Th. 26. que l'on vient de donner : la fécondité de ce Théoreme nous les a presentez si naturellement, que sans y penser, nous ne nous y sommes peut-être déjà que trop arrêtez.

S C H O L I E.

On a vû dans les Cor. 8. 9. du Lem. 3. qu'afin qu'une puissance puisse soutenir un poids en équilibre sur une surface quelconque, la direction de la force résultante du concours d'action de cette puissance & de ce poids doit toujours être perpendiculaire à cette surface, laquelle perpendiculaire passe par la base de ce poids. Donc la force résultante du concours de deux déterminées, & de deux directions déterminées, ne pouvant être dirigée (*Lem. 3. part. 4. & n. 1. du Cor. 1.*) que suivant la diagonale d'un parallélogramme fait de côtes pris sur leurs directions en raison de ces forces generatrices de celle-là, menée du point de concours de ces directions laterales ; il ne peut y avoir de ce point de concours à quelque surface que ce soit, qu'une seule per-

pendiculaire, suivant laquelle la force résultante du concours d'action d'une puissance & d'un poids de forces & de directions déterminées, puisse être dirigée; & conséquemment aussi qu'un seul point de cette même surface, sur lequel cette puissance & ce poids puissent demeurer en équilibre entr'eux, quand même du concours de leurs directions, l'on pourroit mener plusieurs perpendiculaires à cette surface, par exemple, si elle étoit en calote sphérique, ou en gouttière circulaire, qui eût ce point pour centre. C'est pour cela qu'on la doit toujours supposer ici comme si de ce point de concours on ne lui pouvoit mener que cette seule perpendiculaire, ainsi qu'on l'a fait dans la part. 1. du présent Th. 25. & dans la reflexion qui suit son Corol. 15. ou s'il y en a plusieurs possibles de ce point de concours à cette surface, il n'y faut considérer ici que celle suivant laquelle se fera le concours d'action de la puissance & du poids, suivant laquelle sera (Lem. 3. part. 4. & Corol. 1. nomb. 1.) la diagonale du parallélogramme fait de côtes pris sur leurs directions en raison de leurs forces.

REMARQUE

Sur la démonstration ordinaire des Poids soutenus sur des Plans inclinez, faite par le moyen des Leviers.

FIG. 212.
216. 217.
218.

I. Pour faire cette démonstration, on suppose d'ordinaire un poids sphérique EOQ , soutenu par une puissance R sur le plan incliné HG , comme dans les Fig. 212. 213. Je ne sçais qu'un Auteur qui en ait mis un angulaire, qu'il a placé de manière qu'il ne touchât aussi le plan HG qu'en un point, en l'y plaçant seulement sur une de ses pointes O , comme dans les Fig. 214. 215. de manière aussi que la droite menée de ce point O au concours A des directions AR , AP , de la puissance R , & du poids EOQ , fut perpendiculaire à ce plan HG .

On a ensuite imaginé un Levier recourbé BOC , appuyé sur ce point O d'attouchement, ayant un de ses bras OC horizontal, ou perpendiculaire en C à la direction AP

du poids EOQ , qu'on a supposée parallèle à la hauteur HK du plan HG : on a ensuite regardé ce poids EOQ comme suspendu suivant cette direction AP à l'extrémité C de ce bras OC du Levier feint BOC ; & la puissance R supposée le soutenir sur le plan HG , comme appliquée perpendiculairement aussi à l'extrémité B de l'autre bras OB de ce Levier recourbé BOC , suivant une direction AR , qu'on suppose d'ordinaire parallèle à la longueur HG du plan de ce nom ; ainsi que dans les Fig. 212. 214. & comme soutenant ainsi le poids EOQ sur le point O de ce plan HG par le moyen du Levier recourbé BOC , appuyé en ce point O sur ce même plan.

II. Cela supposé, l'on a conclu, suivant le principe ordinaire des Leviers (*Th. 21. Corol. 13.*) que la puissance R & le poids EOQ , supposé ici en équilibre avec elle sur l'appui O de ce Levier BOC recourbé en O , sont entr'eux en raison reciproque de ses bras OB , OC , perpendiculaires (*Hyp.*) aux directions AR , AP de cette puissance R , & de ce poids EOQ ; c'est-à-dire, $R.EOQ :: OC.OB$. Et conséquemment, en supposant à l'ordinaire AR parallèle à GH (comme dans les Fig. 212. 214.) $R.EOQ :: HK.HG$. à cause des triangles rectangles BCO , GKH , que ce parallélisme rend semblables, en faisant passer B en A .

III. Je conviens (*Th. 26. Corol. 10. & Corol. 20. art. 1. nomb. 1.*) de la vérité de ces deux conséquences, dont la seconde est d'ordinaire la seule, ou du moins la première qu'on conclut de la supposition précédente (*art. 1.*) du Levier BOC , au lieu de la générale qui la précède : ces deux conséquences sont, dis-je, ainsi vraies ; mais elles ne sont sûres par cette voye qu'en cas qu'on le soit que le poids EOQ soutenu (*Hyp.*) sans Levier par la puissance R sur le plan HG , puisse l'être de même par cette puissance appliquée (comme on l'imagine) au bras OB , & lui au bras OC d'un Levier BOC , appuyé librement en O sur ce plan HG . Mais pour cela il reste deux choses à démontrer.

1°. Lorsque le poids touche le plan en plusieurs points, lequel de tous ces points doit être pris pour l'appui du Levier qu'on imagine ici, n'y en ayant qu'un qui le puisse être, c'est-à-dire, qui lui puisse faire donner le rapport cherché entre la puissance & le poids supposez ici en équilibre entr'eux sur le plan incliné.

2°. Quelle est la direction de la charge de ce point ou du plan en ce point, faute de quoi il sera toujours à craindre que le Levier ainsi chargé de la puissance & du poids sur ce plan incliné, ne tombe avec eux le long de ce même plan, ainsi qu'un poids qui n'y seroit pas suffisamment soutenu, la difficulté étant la même de part & d'autre.

FIG. 215.

Le P. Pardies semble avoir effectivement apprehendé ce dernier inconvenient dans sa Statique, art. 57. pages 78. 79. Car après avoir dit: Imaginons que tout le poids de cette boule EOQ (Fig. 215.) est ramassé dans un bâton OB perpendiculaire au plan HG, qui a son centre de gravité en B comme l'y avoit la boule, & qui appuyé en O comme l'étoit aussi la boule. Il ajoute: Imaginons encore que ce bâton est non seulement appuyé sur le bout O, mais qu'il y est comme ATTACHÉ, en sorte néanmoins qu'il puisse y tourner comme sur un pivot, pour se panacher vers G, & pour se hausser vers R. Ce sont les propres paroles du P. Pardies (aux lettres de la Figure près) qui est le seul, que je sçache, qui ait ainsi apperçû le second des deux inconveniens précédens de la démonstration ordinaire des poids soutenus sur des plans inclinez, rapportée ci-dessus dans l'art. 2. Quant au premier de ces deux inconveniens, cet Auteur n'en parle pas plus que les autres, qui s'entienent à cette démonstration, n'employant ici, non plus qu'eux, que des poids qui ne touchent les plans que chacun dans un point.

IV. La nécessité de démontrer les deux choses marquées comme requises dans les nomb. 1. 2. du précédent art. 3. pour rendre la démonstration précédente (art. 2.) des poids soutenus sur des plans inclinez, aussi complete & aussi generale qu'on a crû jusqu'ici l'avoir donnée par le

Le moyen des Leviers, paroîtra si l'on considère,

1°. Que lorsque le poids EOQ est de figure à toucher en plusieurs points F, O, F, &c. le plan HG sur lequel on le suppose en équilibre avec la puissance R, il n'y a effectivement qu'un de ces points, sur lequel le Levier qu'on y imagine, puisse donner le rapport cherché entre cette puissance & ce poids appliquez à ce Levier suivant les mêmes directions AR, AP, suivant lesquelles on les suppose ici en équilibre entr'eux sur le plan HG sans aucun Levier. En effet ce Levier appuyé, par exemple, en O, donneroit, comme ci-dessus (*art. 2.*) $R. EOQ :: OC. OB.$ & appuyé en tout autre point F, duquel on meneroit FD, FL, perpendiculaires aux directions AR, AP, de la puissance R & du poids EOQ, comme le sont (*Hyp.*) OB, OC; ce Levier DFL appuyé en F, donneroit de même $R. EOQ :: FL. FD.$ rapport tout différent de l'autre donné par le Levier BOC appuyé en O. Cela étant, lequel prendre de ces differens points O, F, &c. pour l'appui du Levier qui doit donner le véritable rapport qu'on demande entre cette puissance R & ce poids EOQ supposez en équilibre entr'eux sur le plan HG touchée en tous ces points par les poids de la Fig. 201? C'est ce qu'il auroit fallu démontrer pour pouvoir donner (comme l'on a fait) comme generale la prétendue démonstration du précédent *art. 2.* ainsi qu'on le vient de dire dans le nomb. 1. de l'*art. 3.*

2°. Que non seulement (*nomb. 1.*) le rapport que cette démonstration donne entre la puissance & le poids supposez en équilibre entr'eux sur un plan incliné, n'y est pas generally démontré pour toutes sortes de poids en toutes sortes de positions, mais encore que cette démonstration n'est pas même complete pour le cas qu'on y suppose d'un poids EOQ, qui ne touche qu'en un seul point O le plan HG sur lequel on suppose que la puissance R le soutient.

Car cette démonstration étant fondée sur la supposition qu'on y fait qu'un Levier BOC, auquel ce poids EOQ,

FIG. 217.

FIG. 217.
216 217.
218.

FIG. 217.
216 217.
218.

& cette puissance R seroient perpendiculairement appliquez suivant les mêmes directions AP, AR, sur ce plan HG: cette démonstration, dis-je, étant toute fondée sur cette supposition, elle ne peut subsister, à moins que ce Levier BOC ou AEC, ainsi chargé de la puissance R & du poids EOQ, ne demeure effectivement en repos avec eux sur ce point O du plan HG, sans glisser ni trebucher comme feroit un poids qui y seroit mal soutenu. Or les Corollaires 7. 8. du Lem. 3. & le Th. 21. part. 5. font voir que ce Levier ainsi chargé ne peut ainsi demeurer en repos sur ce point O du plan HG, à moins que la direction de sa charge résultante du concours d'action de la puissance R & du poids EOQ, qu'on lui suppose appliquez, ne passe par ce même point O de la base de ce poids, & perpendiculairement à ce plan HG. Donc les Auteurs de cette prétendue démonstration n'ayant démontré ni l'un ni l'autre, ont laissé cette démonstration imparfaite, & sans rien prouver même pour le cas d'un poids qui ne touche qu'en un point le plan incliné, sur lequel ils l'ont supposé soutenu; ce qui est le second défaut de cette démonstration, marqué dans le nomb. 2. de l'art. 3.

Fig. 215.
216. 217.
218. 219.

V. Pour y corriger ces deux défauts marquez dans les nomb. 1. 2. de l'art. 3. & démontrez dans les nomb. 1. 2. du précédent art. 4. & rendre generale & complete cette démonstration ordinaire, en quelque nombre de points que le poids EOQ touche le plan HG, soit menée du concours A des directions AP, AR, de ce poids, & de la puissance R, qu'on suppose le soutenir en équilibre avec elle sur ce plan, la droite AO perpendiculaire en O à ce même plan; ce point O du plan HG sera le véritable & l'unique sur lequel un Levier tel qu'on imagine ici BOC, demeureroit appuyé, & soutiendrait en équilibre entr'eux le poids EOQ & la puissance R, qui lui seroient perpendiculairement appliquez aux extrémités C, B, de ses bras OC, OB, suivant les mêmes directions AP, AR, qu'elles ont dans l'équilibre qu'on leur suppose sans Levier sur le plan HG. Car,

1°. Puisque (*Hyp.*) cette puissance R & ce poids EOQ sont en équilibre entr'eux sans Levier sur le plan HG, la direction de la force résultante de leur concours d'action, doit être (*Lem. 3. Corol. 8.*) suivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) à ce plan, & conséquemment passer par le point ou le coude du Levier recourbé BOC, auquel on les imagine appliquez suivant les mêmes directions AR, AP, qu'elles ont dans leur équilibre sans Levier sur ce plan HG. Donc (*Th. 21. part. 5.*) ce Levier BOC ainsi chargé de cette puissance & de ce poids, demeureroit en repos avec eux sur ce point O, si ce point de ce Levier peut demeurer sur celui O du plan HG. Or la charge ou l'impression de ce point O du Levier BOC, résultante du concours d'action de cette puissance & de ce poids, se trouvant ainsi dirigée (*Th. 21. part. 2.*) suivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à HG, ce point O de ce Levier doit demeurer (*Lem. 3. Corol. 8.*) sur celui O de ce plan. Donc aussi ce Levier BOC, auquel la puissance R & le poids EOQ seroient appliquez comme ci-dessus, demeureroit en repos avec eux sur ce point O du plan HG, sans glisser ni trebucher. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. De tous les points dans lesquels le plan HG est touché par le poids EOQ, s'il le touche en plusieurs, comme dans la Fig. 216. Ce point O déterminé par la perpendiculaire AO sur ce plan, est le seul de ce même plan, sur lequel un Levier appuyé pût demeurer en repos avec la puissance R & le poids EOQ, qui lui seroient appliquez suivant les mêmes directions AR, AP, que ci-dessus; puisque suivant leur équilibre supposé sans Levier sur le plan AM, la direction de la force résultante de leur concours, doit être (*Lem. 3. Corol. 8.*) suivant cette perpendiculaire AO au plan HG, & conséquemment ne doit rencontrer ce plan qu'en son seul point O. Donc en tout autre point F de ce même plan qu'on placât le Levier tel que DFL, auquel la puissance R & le poids EOQ, fussent appliquez en D, L, suivant les mê-

més directions AR, AP ; ce Levier (*Lem. 3. Corol. 7. nomb. 2.*) tomberoit ou monteroit avec eux en trebuchant le long du plan HG, selon que ce point F se trouveroit au-dessous ou au-dessus de O sur ce plan : par conséquent ce point O est le seul de ce même plan HG, sur lequel un Levier chargé (comme ci-dessus) de la puissance R & du poids EOQ, pût demeurer en repos avec eux. *Ce qu'il falloit 2.^o démontrer.*

FIG. 215.
216.

V I. Il est vrai que les Auteurs qui n'ont considéré que des poids sphériques soutenus sur des plans inclinez, comme dans les Fig. 212. 213. ont mis en ce point O de chacun de ces plans l'appui du Levier BOC, qu'ils y ont imaginé ; mais n'ayant pas eu à choisir, à cause que chaque Sphere ou Globe EOQ ne touche chaque plan AH qu'en cette extrémité O de son rayon AO nécessairement perpendiculaire à ce plan, l'on n'en peut rien conclure pour la nécessité d'un tel appui du Levier pareillement imaginé dans un poids qui toucheroit le plan en plusieurs points, comme dans la Fig. 219. c'est-à-dire, qu'on n'en peut rien conclure pour le choix de celui de ces points qu'on devroit prendre pour l'appui de ce Levier.

FIG. 219.

FIG. 217.
218.

Quant à l'Auteur qui y a employé un poids angulaire, ne l'ayant appuyé que sur une de ses pointes, comme dans les Fig. 217. 218. il n'a pas eu plus à choisir pour l'appui O du Levier BOC, qu'il y a pareillement imaginé ; mais la supposition qu'il y a faite de AO perpendiculaire en ce point O au plan HG, sur lequel il a supposé ce poids EOQ, fait voir qu'il a sçu qu'il étoit nécessaire que la droite AO menée du concours A. des directions AP, AR, de ce poids & de la puissance R à ce point O, fût perpendiculaire au plan HG, sur lequel on les suppose en équilibre : cependant cet Auteur ne l'ayant pas démontré, non plus que les autres, sa démonstration des poids soutenus sur des plans inclinez, n'est, non plus que les leurs, ni generale, ni complete, ainsi qu'on le vient de faire voir dans les art. 4. 5. dans le dernier desquels on

Fig. 212.

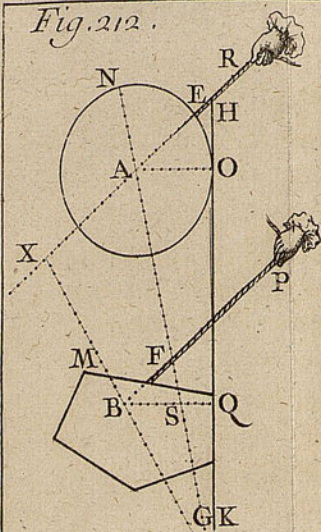


Fig. 213.

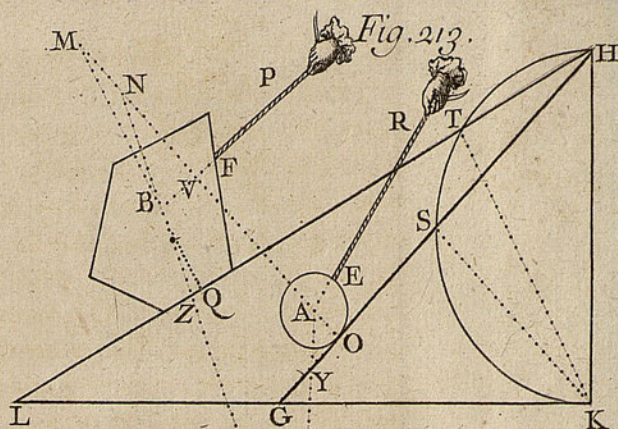


Fig. 214.

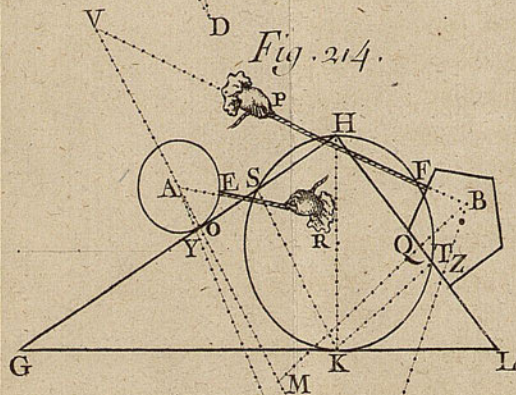


Fig. 215.

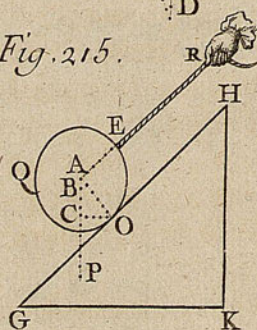


Fig. 216.

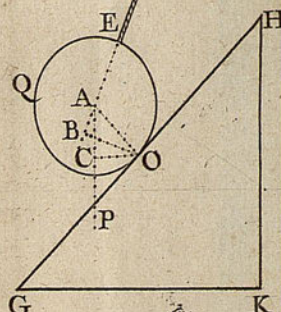


Fig. 217.

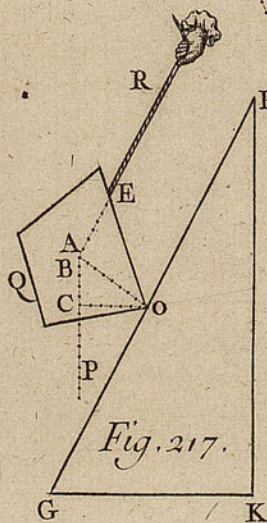


Fig. 218.

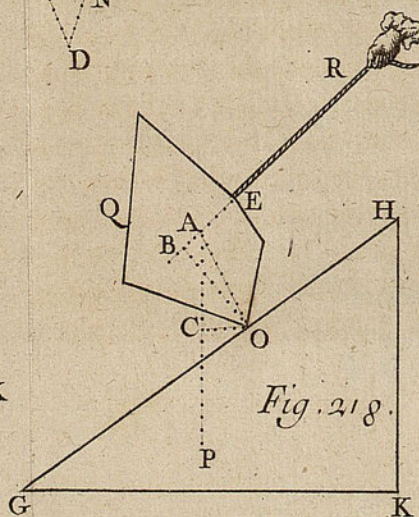
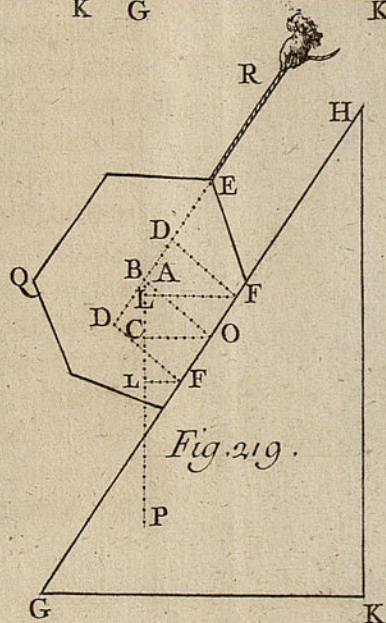


Fig. 219.



la voit rendue telle par le moyen des impressions ou forces composées, employées en tout ceci.

Au reste on ne remarque ici ces défauts de la démonstration ordinaire des poids soutenus sur des plans inclinez, faite par le moyen des Leviers, que pour empêcher qu'on ne s'y méprenne davantage. On les avoit omis en 1687. dans le Projet de ceci, parce qu'on croyoit qu'il les découvreroit assez; mais l'usage qu'on a fait depuis de cette démonstration sans la corriger, faisant voir que tous ceux qui se mêlent de Mécanique, ne les ont pas encore apperçus, on croit leur faire plaisir de les leur faire remarquer ici.

T H É O R È M E XXVII.

Un poids quelconque EOF étant soutenu sur une surface aussi quelconque SV par telle puissance R qu'on voudra: quelles que soient les directions AC, AR, de ce poids & de cette puissance, si du concours A de ces directions l'on mène AD perpendiculaire en O à cette surface SV, & que sur cette ligne AD de longueur quelconque (comme diagonale) on fasse un parallélogramme BACD, qui ait ses côtes AB, AC, sur les mêmes directions AR, AC, de la puissance R & du poids EOF; si de plus de l'extrémité D de la diagonale AD on mène DM perpendiculaire en M à la direction AC du poids EOF; je dis que la résistance verticale suivant MA de la surface SV au poids EOF de direction AC directement contraire à celle de cette résistance, sera à l'effort vertical de la puissance R directement pour ou contre ce poids :: AM. AC.

Fig. 210.
221. 222.

D E M O N S T R A T I O N.

Supposant ici, comme dans la part. 1. du précédent Th. 26. par la raison rapportée dans son Scholie, que AO est la seule perpendiculaire qu'on puisse mener du point A à la surface SV, cette part. 1. du Th. 26. fait voir que cette perpendiculaire AO doit passer ici par la base du poids EOF supposé en équilibre avec la puissance R sur la surface SV; & qu'ainsi c'est non seulement

(*Lem. 3. Cor. 8. 9.*) sur le point O de cette surface que se fait ici cet équilibre ; mais encore la charge (*Déf. 17.*) ou la résistance directe de ce point ou de cette surface SV suivant AD ou DA, y est à ce poids EOF & à cette puissance R, comme la diagonale AD du parallélogramme BACD est à chacun de ses côtes AC, AB, correspondans sur leurs directions.

Or si, après avoir mené BN perpendiculaire en N à AC prolongée de ce côté-là, l'on appelle D cette résistance directe ou totale suivant DA, de la surface SV ; M, ce qu'elle en fait (*Lem. 3. Corol. 6.*) de verticale de M vers A directement à contre-sens de la pesanteur du poids EOF ; N, l'effort vertical suivant AN que la puissance R fait de même (*Lem. 3. Corol. 6.*) directement pour ou contre cette pesanteur.

La part. 2. du *Lem. 3.* donnera ici $M. D :: AM. AD.$
Et $R. N :: AB. AN.$ Donc ayant déjà (*Th. 26. part. 1.*)
 $D. R :: AD. AB.$ l'on aura ici

$$\left. \begin{array}{l} M. D :: AM. AD. \\ D. R :: AD. AB. \\ R. N :: AB. AN. \end{array} \right\} \text{Donc aussi (en multipliant par ordre) } M. N :: AM. AN.$$

Mais les parallélogrammes BACD, BNMD, rendant $CD = AB$, & $CD. AB :: MC. AN.$ rendent aussi $MC = AN.$ Donc enfin $M. N :: AM. MC.$ c'est-à-dire, suivant les noms précédens, que la résistance verticale suivant MA de la surface SV au poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puissance R suivant AN directement pour ou contre ce poids :: $AM. MC.$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Au lieu de la surface SV imaginons pour un moment une puissance P, qui avec une corde FP, dirigée suivant DA prolongée de ce côté-là, soutienne avec la puissance R le poids EOF, presentement soutenu avec des cordes

seulement. On voit dans la seconde démonstration de la part. 1. du précédent Th. 26. que la puissance P ainsi dirigée suivant DA ou OA perpendiculaire en O à la surface SV, doit comme cette surface, & d'une force égale à la résistance de cette même surface, tant suivant DP, que suivant CA, soutenir le poids EOF avec la puissance R.

Or si du point B l'on mène parallèlement à AP la droite BQ, qui rencontre CA prolongée en Q, duquel point Q soit la droite QX parallèle aussi à AR; & que du point X ou QX rencontre AP, l'on mène XL perpendiculaire en L à la diagonale AQ du parallélogramme ABQX; le Th. 2. fait voir que l'effort vertical suivant AL de la puissance P doit être ici au vertical de la puissance R suivant AN :: AL. AN. Donc aussi en restituant la surface SV au lieu de la puissance P, la résistance verticale de cette surface suivant MA directement contre la pesanteur du poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puissance R suivant AN directement pour ou contre la pesanteur de ce poids :: AL. AN.

Mais les parallélogrammes BAXQ, BDAQ, BACD, donnant $AX=BQ=AD$, $AB=CD$, & les triangles (*constr.*) semblables ALX, AMD, & ANB, CMD, donnant AL. AM :: AX. AD. Et AN. MC :: AB. CD. l'on aura ici $AL=AM$, & $AN=MC$. Donc enfin la résistance verticale de la surface SV suivant MA directement contre la pesanteur du poids EOF, est ici à l'effort vertical de la puissance R suivant AN directement pour ou contre la pesanteur de ce poids :: AM. MC. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Si l'on prolonge RA, DM, jusqu'à leur rencontre en Z, le parallélisme supposé entre RA, DC, rendant les triangles CMD, AMZ, semblables entr'eux, l'on aura AM. MC :: ZM. MD. Donc aussi la résistance verticale de la surface SV suivant MA directement contre la pe-

fanteur du poids EOF, sera ici à l'effort vertical de la puissance R suivant AN pour ou contre cette pesanteur :: ZM. MD. c'est-à-dire (en prenant AM pour rayon) comme la tangente de l'angle MAZ ou RAN, est à la tangente de l'angle MAD.

COROLLAIRE II.

FIG. 221.

Les parties du poids EOF ou de sa pesanteur, soutenues dans la Fig. 221. par la puissance R, & par la surface SV, étant égales (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) aux résistances N, M, directement contraires & en équilibre avec ces parties de pesanteur, que la puissance R & la surface SV font à ces mêmes parties de pesanteur suivant leur direction.

1°. Il suit encore du présent Th. 27. que la partie de la pesanteur du poids EOF, soutenue par la surface SV, est à ce que la puissance R en soutient :: AM. MC.

2°. Il suit de même du Corol. 1. que ces mêmes parties de la pesanteur du poids EOF, sont aussi entr'elles comme les tangentes ZM, MD, des angles RAN, MAD, en prenant AM pour le rayon.

COROLLAIRE III.

FIG. 222.

Puisque (*Cor. 1.*) la partie de EOF, soutenue par la surface SV est toujours à ce que la puissance R en soutient dans la Fig. 218. comme ZM est à MD; ces deux parties de pesanteur du poids EOF ne peuvent être entr'elles comme AM est à MD, que dans le cas de ZM=AM, c'est-à-dire (l'angle M du triangle AMZ étant supposé droit) seulement lorsque l'angle ZAM, ou son égal RAN, est de 45 degrés. Donc le cas ordinaire de AC parallèle à HK, lequel rendant les triangles DMA, HKG, semblables entr'eux, rend AM. MD :: GK. KH. la partie de la pesanteur du poids EOF, soutenue par la surface SV, ne peut être à ce que la puissance R en soutient :: GK. KH. que lorsque l'angle RAN est de 45. degrés. Or en ajoutant à la précédente hypothèse de AC parallèle

à HK, celle de AR aussi parallèle à GH, qui rend l'angle RAO ou RAD droit; l'angle RAN ne peut être de 45 degrez que lorsque l'angle DAM ou son égal HGK est de même valeur. Donc dans la supposition ordinaire de AC parallèle à HK, & de AR parallèle à HG, la partie de la pesanteur du poids EOF, soutenue par la surface SV, ne peut être à ce que la puissance R en soutient :: GK. KH. que lorsque l'angle HGK d'inclinaison du plan HG sur l'horizontale GK, est de 45 degrez : auquel cas ces deux parties de pesanteur du poids EOF seroient égales entr'elles, puisqu'on auroit alors $GK = KH$.

C O R O L L A I R E I V.

Ce seroit donc une méprise que de dire en general dans la supposition ordinaire de AC parallèle à HK, & de AR parallèle à GH (comme a fait un Auteur de ce tems-ci, en appellant GK l'inclinaison du plan GH) que *lorsqu'on tire une Sphere le long d'un plan* (il veut dire, lorsqu'on la soutient sur un plan) *par une ligne parallèle à ce plan, ce qui porte de cette Sphere sur le plan, est à ce qu'il ne porte pas, comme l'inclinaison du plan est à sa hauteur.* C'est-à-dire (ainsi que cet Auteur s'explique dans la démonstration de cette prop. 26. de sa Mécanique) *ce que porte le plan HG, est à ce qu'il ne porte pas de cette Sphere, comme GK est à KH.* Ce seroit-là, dis-je, une méprise; puisque (Cor. 3.) cette proposition n'est vraie que dans le cas où l'angle HKG du plan HG sur l'horizontale GH, seroit de 45 degrez, & fausse dans tous les autres.

C O R O L L A I R E V.

Pour rendre cette proposition generalement vraie dans toute l'étendue que l'Auteur lui donne, au lieu de dire que lorsqu'un poids est soutenu sur un plan incliné par une puissance d'une direction parallèle à ce plan, la partie de ce poids ou de sa pesanteur, soutenue par ce plan, est à ce que la puissance en soutient, *comme GK est à HK,*

il devoit dire, comme le quarré de GK est au quarré de HK . Car dans son hypothese non seulement de AC parallele à HK , mais encore de AR parallele à GH , & consequemment aussi (à cause du parallelogramme $ABDC$) de DC parallele à GH , l'angle droit GOD rendant pareillement l'angle ADC droit, de même que le sont (*Hyp.*) les angles en M ; l'on aura ici $AM. MC :: \overline{AM}^2. \overline{MD}^2$. (la presente hypothese rendant les triangles ADC , GHK , semblables entr'eux) :: $\overline{GK}^2. \overline{HK}^2$. Or le present Th. 27. fait voir en general que la partie du poids EOF ou de sa pesanteur, soutenue par la surface quelconque SV , est à ce que la puissance R en soutient :: $AM. MC$. Donc aussi la premiere de ces deux parties du poids EOF ou de sa pesanteur, est ici à la seconde :: $\overline{GK}^2. \overline{HK}^2$. & non pas :: $GK. HK$. ainsi que l'Auteur en question l'avance dans la prop. 26. qu'on vient de rapporter de sa Mécanique dans le précédent Corol. 4.

Cet Auteur est le même que nous avons déjà trouvé en notre chemin dans le nomb. 3. du Corol. 56. du précédent Th. 26. la prop. 27. de sa Mécanique, qu'il opposoit au sentiment ordinaire établi dans ce nomb. 3. n'étant qu'une suite de sa prop. 26. qu'on voit (Corol. 4.) être fausse, doit l'être aussi, & sans force contre ce nomb. 3. du Corol. 56. de notre Th. 26. La méprise de cet Auteur vient des Lemmes équivoques ou mal démontrés, qui l'ont jetté dans l'erreur dans presque tout ce qu'il a dit des poids soutenus. Il l'auroit vu sans peine avant sa mort, s'il eût bien voulu examiner tout cela par la voye des mouvemens composés, qu'il adopta, lorsque le Projet de ceci parut, long-tems après sa Mécanique imprimée, sans voir que cette voye lui étoit contraire, & qu'elle conduit (comme l'on vient de voir) à des sentimens tout contraires à ceux que nous venons de rapporter de lui.

COROLLAIRE VI.

FIG. 221. Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel l'effort ou la ré-

sistance verticale suivant AN de la puissance R, & la résistance verticale suivant MA de la surface SV, sont l'une & l'autre directement contraires à la pesanteur suivant AM du poids EOF; cette pesanteur en ce cas d'équilibre doit être (Ax. 4.) égale à la somme de ces deux résistances verticales employées à la soutenir suivant une direction commune directement contraire à la sienne: de sorte que si l'on appelle A la pesanteur du poids EOF; N, l'effort vertical suivant AN de la puissance R; & M, la résistance verticale de la surface SV suivant MA; l'on aura ici $A = M + N$ (le présent Th. 26. donnant AM.

$$MC :: M.N. = \frac{M \times MC}{AM} = M + \frac{M \times MC}{AM} = \frac{M \times AC}{AM}; \text{ \& con-}$$

$$\text{sequemment aussi } M = A - N = A - \frac{M \times MC}{AM} = \frac{A \times AM}{AC}.$$

Donc en ce cas de la puissance R contraire à la pesanteur du poids EOF, la surface SV ne soutiendra de cette pesanteur (A) que l'excès dont cette même pesanteur en surpasseroit une autre à qui la résistance verticale (M) de cette surface seroit :: AM. MC. ou (ce qui revient au même) la surface SV ne soutiendra ici de la pesanteur du poids EOF, qu'une partie à qui cette pesanteur (A) seroit :: AC. AM.

COROLLAIRE VII.

Les résistances verticales M, N, de la surface SV & de la puissance R, à la pesanteur (A) du poids EOF dans ce cas de la Fig. 221. étant (Hyp.) l'une & l'autre directement opposées à cette pesanteur, & toutes deux ensemble en équilibre avec elle; l'ax. 4. fait voir non seulement que leur somme $M + N$ doit être égale à cette pesanteur entière A, mais encore que chacune de ces deux résistances verticales M, N, doit égaler ce qu'elle soutient de cette pesanteur. Donc la somme des deux parties de cette pesanteur A, soutenues chacune par chacune

des résistances verticales M , N , dans ce cas de la Fig. 221. y doit être égale à cette pesanteur entière (A) du poids EOF.

COROLLAIRE VIII.

FIG. 220.

Telles sont (*Corol.* 6. 7.) les parties de la pesanteur du poids EOF, que la surface SV & la puissance R soutiennent chacune pour leur part dans le cas de la Fig. 221. où la puissance R tire obliquement de bas en haut.

Quant à celui de la Fig. 220. où cette puissance R tire obliquement de haut en bas, non seulement cette puissance ne porte rien de la pesanteur du poids EOF; mais au contraire se joint contre la résistance verticale de la surface SV ; cette résistance verticale suivant MA , ayant ainsi à soutenir à la fois les deux efforts verticaux du poids EOF & de la puissance R , réunis contr'elle suivant une direction AM , directement contraire à la sienne, doit seule (*Ax.* 4.) être égale à la somme de ces deux efforts entiers: de sorte que suivant les noms du précédent Corol. 7. l'on aura ici $M = A + N$ (le présent Th. 27. don-

nant $AM. MC :: M. N = \frac{M \times MC}{AM}) = A + \frac{M \times MC}{AM}$. Donc

en ce cas de la puissance R agissante en faveur du poids EOF, la surface SV soutiendra seule la pesanteur entière (A) de ce poids augmentée, d'une force à qui la résistance verticale (M) de cette surface seroit :: $AM. MC$.

COROLLAIRE IX.

FIG. 222.

Dans le cas de la Fig. 222. dans lequel la puissance R n'agit ni pour ni contre la pesanteur du poids EOF, ayant (*Hyp.*) sa direction AR perpendiculaire à celle AC de ce poids; la résistance verticale suivant MA de la surface SV , directement contraire à celle AM de ce même poids, n'ayant ici que la pesanteur de ce poids à soutenir, doit (*Ax.* 4.) être précisément égale à cette pesan-

teur: de sorte que suivant les noms précédens des Corol. 7. 8. l'on doit avoir ici précisément $M=A$.

Cela suit aussi des égalitez $A=M+N$, $M=A+N$, trouvées dans ces deux Corol. 7. 8. pour les cas de la puissance R agissante contre ou en faveur du poids EOF, parce qu'elle a son effort vertical $N=0$ dans ce cas-ci, ou elle n'agit ni pour ni contre ce poids.

Donc la surface SV soutiendra encore ici seule la pesanteur entiere de ce poids EOF, mais rien davantage, en vertu de son effort vertical suivant MA .

C O R O L L A I R E X.

Les noms demeurant encore les mêmes que dans la démonstr. 1. du présent Th. 27. & que dans son Corol. 6. sçavoir, $D=$ à la charge suivant AO ou AD de la surface SV , $M=$ à la résistance verticale de M vers A de cette surface ou de son point O , $N=$ à l'effort vertical de A vers N de la puissance R , & $A=$ à la pesanteur entiere du poids EOF, soutenu (*Hyp.*) en O par cette puissance R sur cette surface SV ; ce présent Th. 27. donnant $M.N::AM.MC$. donnera aussi $M.M+N::AM.AM+MC::AM.AC$. La Fig. 221. ayant $AM+MC=AC$, la Fig. 220. ayant $AM-MC=AC$. & la Fig. 222. ayant $AM+MC=AM=AC$. Donc on aura aussi (en raison ordonnée) $N.M+N::MC.AC$. Or (*Ax. 4.*) $M+N=A$ dans la Fig. 221. $M-N=A$ dans la Fig. 220. & $M+N=A$ dans la Fig. 222. Donc en general $M.A::AM.AC$. Et $N.A::MC.AC$. Or (*Lem. 3. part. 2.*) $D.M::AD.AM$. & $R.N::AB.AN$. Donc (en raison ordonnée) $D.A::AD.AC$. Et $R.A::AB.AC$. ou $A.R::AC.AB$. Et par conséquent aussi (en raison ordonnée) $D.R::AD.AB$. c'est-à-dire, qu'en ce cas d'équilibre de la puissance R & du poids EOF soutenu par elle sur la surface SV , cette puissance R , & la pesanteur (A) de ce poids EOF, seront toujours entr'elles comme les côtes AB , AC , du parallelogramme $BACD$ dont ces côtes seroient sur les directions quelconques de cette puissance & de ce poids.

& dont la diagonale AD seroit perpendiculaire à cette surface SV ; & qu'en ce même cas d'équilibre la charge (D) résultante du concours d'action de cette puissance R & de la pesanteur (A) de ce poids EOF , sera aussi toujours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD du parallélogramme BACD à chacun de ses côtes AB, AC, correspondans sur leurs directions, ainsi qu'on l'a déjà vu dans la part. I. du Th. 25.

COROLLAIRE XI.

Fig. 221.

Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel (*Corol. 6. 7.*) la puissance R & la surface SV portent chacune une partie de la pesanteur du poids EOF ; puisque la partie qui en est soutenue par cette puissance R sur cette surface, y est (*Corol. 2. nomb. 1.*) à l'autre partie soutenue par cette même surface :: MC. AM. & que la première MC de ces deux lignes augmente, & que l'autre AM diminue à mesure que l'angle RAN devient plus petit depuis sa position perpendiculaire de AR sur AD, jusqu'à rendre $MC=AC$, & $AM=0$, lorsque AR se trouvera sur AN : la partie du poids EOF soutenue ici par la puissance R, doit toujours aussi augmenter, & l'autre partie soutenue par la surface SV toujours diminuer, à mesure que cet angle RAN devient plus aigu ; la première jusqu'à devenir égale au poids entier, & la seconde jusqu'à devenir nulle ou zero, lorsque AR se trouve sur AN par l'extinction de l'angle RAN ; ce qui revient en ceci au nomb. 1. du Corol, 15. du Th. 26.

COROLLAIRE XII.

Fig. 220.

Dans le cas de la Fig. 220. dans lequel (*Corol. 8.*) la puissance R ne porte rien du poids EOF, & où la résistance verticale de la surface SV soutient seule la pesanteur entiere de ce poids augmentée même de l'effort vertical que la puissance R fait ici de haut en bas ; puisque

ce cas donne toujours (*Corol. 8.*) $M=A-N=A-$

$$\frac{M \times MC}{AM} = \frac{A \times AM}{AM - MC} = \frac{A \times AM}{AC}, \text{ suivant les noms employez}$$

dans le *Corol. 8.* & que AM augmente à mesure que l'angle RAD de droit devient plus aigu, jusqu'à devenir infinie, lorsque AR se trouve sur AD, sans aucun chan-

gement de la part de $\frac{A}{AC}$: la résistance verticale M de la

surface SV doit ici augmenter à l'infini à mesure que cet angle RAD diminue ainsi, jusqu'à devenir effectivement infini, lorsque AR arrivera sur AD; & ceci parce que la puissance R (*Th. 26. Corol. 19. nomb. 2.*) alors infinie, aura pour lors AN pareillement infinie, laquelle AN, suivant le présent *Th. 27.* exprime l'effort vertical de la surface SV.

S C H O L I E.

N'ayant eu dessein dans ce Théoreme-ci que de chercher ce qu'une puissance, & la surface sur laquelle elle soutient un poids, portent chacune de la pesanteur de ce poids, nous n'y avons fait attention que de ce que la force de cette puissance, & la résistance de cette surface, en ont de verticales, sans rien dire de ce qu'elles en ont (*Déf. 17.*) d'horizontales, lesquelles ne font ni pour ni contre la pesanteur de ce poids, mais seulement l'empêchent d'aller horizontalement d'aucun côté, ainsi qu'on l'a vû dans l'article 2. du Schol. du *Th. 2.* touchant les poids soutenus avec des cordes seulement.

En effet, si, en appellant encore D la résistance de la surface SV de O vers A suivant DA, l'on appelle presentement M la résistance de D vers M suivant l'horizontale DM; & N, l'effort ou la résistance de la puissance R de N vers B suivant l'horizontale NB : le poids EOF se trouvera poussé tout à la fois suivant ces deux impressions horizontales M, N, directement opposées l'une à l'autre.

Or la part. 2. du Lem. . fait voir que $M. D :: MD. AD.$
 Et $R. N :: AB. NB.$ De sorte qu'ayant déjà (*part. 1. du*
Th. 26. & Corol. 20. de celui-ci) $D. R :: AD. AB.$

L'on aura ici $\left\{ \begin{array}{l} M. D :: MD. AD. \\ D. R :: AD. AB. \\ R. N :: AB. NB. \end{array} \right.$

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura pareillement ici $M. N :: MD. NB.$ Par conséquent la construction y donnant $MD = NB$, l'on aura aussi les résistances horizontales M, N , égales entr'elles, lesquelles étant directement opposées l'une à l'autre, empêchent conséquemment (*Ax. 3.*) le poids EOF de se mouvoir horizontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit ici faire voir.*

Le Scholie du Th. 2. fait voir encore la même chose en substituant, comme dans la démonstr. 2. du present Th. 27. la puissance P au lieu de la surface SV . Car toutes choses demeurant ici les mêmes que dans cette démonstr. 2. ce Scholie du Th. 2. faisant voir que les efforts ou les résistances des puissances P, R , suivant les horizontales LX, NB , empêchent le poids EOF de se mouvoir horizontalement d'aucun de leurs côtes; la résistance de la surface SV suivant l'horizontale MD en même sens que l'horizontale de la puissance P , & égale à elle, doit aussi (en sa place) avec l'horizontale, suivant NB de la puissance R , empêcher le poids EOF de se mouvoir horizontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit encore faire ainsi voir.*

Tel est l'usage de ces résistances horizontales de la surface SV & de la puissance R , l'une contre l'autre suivant DM, NB , pour empêcher le poids EOF de se mouvoir horizontalement d'aucun côté, pendant que leurs résistances verticales suivant MA, AN , l'empêchent de se mouvoir verticalement de la maniere qu'on le vient de voir dans le present Th. 27. & dans ses Corollaires.

Au reste la démonstration 2. de ce Théoreme-ci fait voir tant d'affinité

Affinité ou de ressemblance entre lui & le Th. 2. que tout ce qu'on a dit là des poids soutenus avec des cordes seulement, s'appliquera sans peine aux poids soutenus sur des surfaces, & reciproquement. Nous ne nous arrêterons donc pas ici davantage.

THEOREME XXVIII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans les part. I. 2. du Th. 27. c'est-à-dire, la puissance R & le poids EOF de directions quelconques étant encore ici en équilibre entr'eux sur la surface aussi quelconque SV, &c. je dis que la charge qui en résulte à cette surface suivant sa perpendiculaire AD par la base du poids EOF, est toujours à ce qu'il en résulte perpendiculairement aussi à chacune des surfaces horizontale GK, & verticale KH, qui soutiennent celle-là, comme l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG est à chacun de ses deux autres côtez GK, KH.

FIG. 229.
221. 222.

DEMONSTRATION.

Sur la diagonale AD du parallelogramme BACD, prolongée du côté de D, ayant pris depuis O de ce côté-là une partie quelconque, Oβ terminée ici (si l'on veut) au plan horizontal GK, soit un parallelogramme rectangle TOYβ, dont cette partie Oβ soit la diagonale, & dont les côtez OT, OY, soient paralleles à la hauteur HK, & à la base KG du plan HG touchant la surface SV au point O, auquel la diagonale AD du parallelogramme BACD rencontre (Th. 26. part. I.) perpendiculairement cette surface par la base du poids EOF, soutenu (Hyp.) sur elle par la puissance R.

Cela posé, l'effort résultant (Th. 26. part. I.) du concours d'action de cette puissance R, & du poids EOF sur le point O de cette surface SV, suivant AD ou Oβ, étant le même (Lem. 3. Corol. 6.) que s'il résultoit du concours de deux forces dirigées suivant OT, OY, lesquelles fussent à cet effort commun suivant Oβ, comme ces côtez OT, OY, sont à cette diagonale Oβ du parallelogramme

TOY β ; cet effort commun suivant O β sur la surface SV, doit être à ce qu'il lui en résulte en son point O suivant OT perpendiculaire (*Hyp.*) à GK, & suivant OY perpendiculaire aussi (*Hyp.*) à KH, c'est-à-dire, à ce qu'il en résulte perpendiculairement sur ou contre ces deux autres surfaces GK, KH, comme la diagonale O β de ce parallélogramme rectangle TOY β , est à ses mêmes côtez OT, OY. Or à cause de AD ou O β perpendiculaire (*Th.* 26. *part.* 1. 2.) à la surface SV ou à son plan touchant HG en O, & de OT, OY, parallèles aux deux autres côtez HK, KG, du triangle rectangle HKG, le triangle β TO lui sera semblable, & conséquemment aura ses côtez O β , OT, OY, en même raison que HG, GK, HK. Donc aussi l'effort commun de la puissance R & du poids EOF suivant AD sur la surface SV, doit être à ce qu'ils en font ensemble sur les surfaces KG, HK, suivant OT, OY, c'est-à-dire (*Déf.* 27.) que la charge de la surface SV doit être aux charges de ces deux-ci, comme l'hypothénuse HG du triangle rectangle HKG est à ses deux autres côtez GK, KH, quelles que soient les directions AR, AC, de la puissance R & du poids EOF, du concours desquels en équilibre (*Hyp.*) sur la surface SV, ces trois charges ou pressions résultent à cette surface SV & aux deux autres GK, KH, suivant leurs perpendiculaires O β , OT, OY : de sorte qu'en appelant O la charge ou la pression de la surface inclinée quelconque SV, T, celle de la surface horizontale GK ; & Y, celle de la surface verticale KH ; l'on aura toujours ces trois charges ou pressions perpendiculaires O, T, Y, en raison des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HKG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc, 1°. l'on aura O.T :: HG.GK. c'est-à-dire, que la force commune (O), avec laquelle la puissance R & le poids EOF pressent ensemble la surface SV suivant la perpendiculaire O β ou AD, est toujours à celle (T) dont

ils pressent ensemble perpendiculairement aussi suivant OT la surface horizontale GK, ou l'horison qui la soutient, comme l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à sa base horizontale GK.

2°. L'on aura pareillement $O. Y :: HG. KH$. c'est-à-dire, que la même pression (O) de la surface SV suivant sa perpendiculaire AD ou O β , est aussi toujours à la pression ou pulsion (Y) de la surface verticale HK suivant sa perpendiculaire OY, ou à ce qui la soutient contre cet effort horizontal, comme la même hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à sa hauteur HK.

3°. L'on aura enfin $T. Y :: GK. KH$. c'est-à-dire, que la pression ou la pulsion (T) de la surface horizontale GK ou de l'horison qui la soutient, suivant sa perpendiculaire OT, est toujours à la pression ou pulsion (Y) de la surface verticale HK suivant sa perpendiculaire OY, ou de ce qui la soutient contre cet effort horizontal, comme la base horizontale GK du même triangle rectangle HKG est à sa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE II.

De-là & des part. 1. 2. du Th. 26. qui font voir que la puissance R & le poids EOF en équilibre (*Hyp.*) entr'eux sur la surface SV, sont toujours à la charge ou à la pression (O) résultante de leur concours d'action sur cette surface suivant sa perpendiculaire AD ou O β , comme les côtes AB, AC, pris sur leurs directions, sont chacun à la diagonale AD du parallélogramme BACD; l'on aura, les noms précédens demeurant toujours les mêmes, & quelles que soient les directions de la puissance R & du poids EOF,

1°. L'on aura (dis-je) $R. O :: AB. AD$. Et (*Corol. 1. nomb. 2.*) $O. T :: HG. GK$. Donc (en multipliant par ordre) $R. T :: AB \times HG. AD \times GK$. c'est-à-dire, que la puissance R est toujours à la force (T), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface horizontale GK ou l'horison qui la soutient, en rai-

fon composée de celle du côté AB du parallélogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG à sa base horizontale GK.

2°. L'on aura aussi EOF. O :: AC. AD. Et encore (*Corol. 1. nomb. 1.*) O. T :: HG. GK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. T :: AC×HG. AD×GK. c'est-à-dire, que le poids EOF est toujours à la force (T), dont lui & la puissance R pressent ensemble perpendiculairement la surface horizontale GK ou l'horizon qui la soutient, en raison composée de celle du côté AC du parallélogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG à sa base horizontale GK.

3°. L'on aura pareillement R. O :: AB. AD. Et (*Corol. 1. nomb. 2.*) O. Y :: HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. Y :: AB×HG. AD×HK. c'est-à-dire, que la puissance R est toujours à la force (Y), dont elle & le poids EOF pressent ou poussent ensemble perpendiculairement la surface verticale HK ou ce qui la soutient, en raison composée de celle du côté AB du parallélogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG à sa hauteur verticale HK.

4°. L'on aura enfin EOF. O :: AC. AD. Et (*Corol. 1. nomb. 2.*) O. Y :: HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. Y :: AC×HG. AD×HK. c'est-à-dire, que le poids EOF ou sa pesanteur est toujours à la force (Y), dont lui & la puissance R pressent ensemble perpendiculairement la surface verticale HG ou ce qui la soutient, en raison composée de celle du côté AC du parallélogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG à sa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE III.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que la dire-

tion AC du poids EOF soit parallele à la hauteur verticale HK du triangle rectangle HKG : cette hypothese & celle des angles K, M, des triangles HKG, DMA, supposez droits, rendant ensemble ces deux triangles semblables entr'eux; le present Th. 28. qui donne en general les charges O, T, Y, des trois surfaces SV, GK, KH, en raison des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HKG, donnera ici ces trois charges (perpendiculaires à ces trois surfaces, chacune à chacune) entre-elles en raison des trois côtez AD, AM, MD, du triangle DMA; c'est-à-dire, que,

I. L'on aura ici $O.T::AD.AM.$ Or (Th. 26. part. 1.) $R.O::AB.AD.$ Et EOF. $O::AC.AD.$ Donc en raison ordonnée,

1°. L'on aura ici $R.T::AB.AM.$ c'est-à-dire, que la puissance R sera ici à l'effort commun (T), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface horisontale GK, en raison de AB à AM.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. $T::AC.AM.$ c'est-à-dire, que le poids EOF sera ici à cet effort commun de lui & de la puissance R sur cette surface horisontale GK, en raison de AC à AM.

II. L'on aura de plus ici $O.Y::AD.MD.$ Or (Th. 26. part. 1.) $R.O::AB.AD.$ Et EOF. $O::AO.AD.$ Donc aussi, en raison ordonnée,

1°. L'on aura ici $R.Y::AB.MD.$ c'est-à-dire, que la puissance R sera à l'effort commun (Y), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface verticale HK, en raison de AB à MD.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. $Y::AC.MD.$ c'est-à-dire, que le poids EOF ou sa pesanteur, sera ici à cet effort commun de lui & de la puissance R sur cette surface verticale AK, en raison de AC à AD.

C O R O L L A I R E IV.

Donc (Corol. 3.) dans cette hypothese de AC parallele à HK, ces cinq choses: la puissance R, le poids EOF, ou

la pesanteur, & les charges O , T , Y , résultantes du concours d'action de cette puissance & de ce poids sur les trois surfaces SV , GK , KH : ces cinq choses (dis-je) sont toujours entr'elles en raison des cinq lignes AB , AC , AD , AM , MD .

COROLLAIRE V.

Fig. 223.

Donc aussi (*Corol.* 3. 4.) en supposant de plus la direction AR de la puissance R , parallèle à GK , & conséquemment perpendiculaire à AC : cette hypothèse ajoutée à la précédente de AC parallèle à HK , faisant tomber C en M , comme dans la Fig. 222. & rendant ainsi $AC = AM$, $MD = CD = AB$; les charges T , Y , des surfaces GK , HK , se trouveront ici égales à la pesanteur du poids EOF , & à la puissance R , chacune à chacune; savoir, $T = EOF$, & $Y = R$.

COROLLAIRE VI.

Fig. 227.

La direction AC du poids EOF demeurant toujours parallèle à HK , si l'on suppose présentement que la direction AR de la puissance R soit parallèle à HG , par exemple, dans la Fig. 221. Cette double hypothèse jointe à celle de DM perpendiculaire sur AC , rendant les trois triangles ADC , AMD , DMC , rectangles semblables entr'eux; l'on aura ici $CD. DM :: AC. AD :: AD. AM$. Donc le parallélogramme $BACD$ ayant $AB = CD$, l'on aura pareillement ici (*Cor.* 4.) $R. Y :: EOF. O :: O. T$. c'est-à-dire, que la puissance R sera ici à la charge (Y) du plan vertical HK en même raison que la pesanteur du poids EOF à la charge O de la surface SV , & que cette charge (O) à celle T de la surface horizontale GK .

THEOREME XXIX.

Fig. 223.

224. 225.

226.

Soient deux surfaces fixes quelconques SV , XT (droites ou courbes, il n'importe) entre lesquelles le poids qu'on y veut

mettre, ne puisse passer, ni s'appuyer sur ou contre quelque autre chose que ce soit.

I. *Aucun poids EOQF ne peut demeurer en repos entre ces deux surfaces SV, XY, à moins qu'il ne soit de figure & de position telles que la direction quelconque LC de sa pesanteur ait quelque point A (dans ou hors l'étendue de ce poids, il n'importe) duquel on puisse mener à ces deux surfaces autant de perpendiculaires, une sur chacune par les bases (Déf. 25.) que ces surfaces touchent de ce poids.*

FIG. 223.
224. 225.

II. *Au contraire lorsque de quelque point A de la direction quelconque LC de la pesanteur d'un poids aussi quelconque EOFQ, l'on peut mener deux perpendiculaires AO, AQ, aux surfaces SV, XY, par les bases de ce poids, une sur chacune; ce poids demeurera toujours en repos entre ces deux surfaces, soutenu par elles seules.*

FIG. 223.
224. 225.
226.

III. *En ce cas de repos du poids EOQF entre deux surfaces SV, XY, soutenu par elles seules, si sur une diagonale quelconque AC prise de A vers C sur la direction LC de la pesanteur de ce poids, l'on fait un parallélogramme ABCD, qui ait ses côtes AD, AB, sur les perpendiculaires AO, AQ, à ces surfaces SV, XY, par les bases de ce même poids; ce poids EOQF sera toujours à chacune des charges ou des résistances de ces surfaces SV, XY, comme la diagonale AC de ce parallélogramme ABCD sera à chacun de ses côtes AD, AB, correspondans sur les perpendiculaires AO, AQ, à ces surfaces.*

D E M O N S T R A T I O N.

PART. I. Il est visible que de tous les points, par exemple, O de la base où le poids EOQF touche la surface SV, l'on peut mener autant de perpendiculaires OP à cette surface SV, lesquelles rencontrent en plusieurs autres points A la direction LC de la pesanteur de ce poids: je dis donc que si de tous ces points A il n'y en a aucun duquel on puisse mener une perpendiculaire à la surface XY par l'autre base de ce poids, il ne pourra demeurer en repos sur ces deux surfaces.

FIG. 223.
224. 225.

Car quelque puissance P qu'on imagine appliquée à ce poids $EOQF$ au bout de la corde FP , dirigée suivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires OR à la surface SV par la base qu'elle touche de ce poids, pour le soutenir sur la surface XY à la place de cette autre surface SV , quelle que soit aussi la direction de la force résultante du concours d'action de cette puissance P , & de la pesanteur du poids $EOQF$: cette direction, qui doit toujours (*Lem. 2. 3.*) passer par A , ne pourra jamais être perpendiculaire à la surface XY par la base qu'elle touche de ce poids, si l'on ne lui en peut mener aucune du point A . Donc en ce cas la puissance P , quelle qu'elle soit, dirigée suivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la surface SV par la base qu'elle touche de ce poids $EOQF$, ou même seulement dirigée à volonté par celui qu'on voudra des points A , où ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la pesanteur de ce poids: en ce cas (dis-je) la puissance P ne pourra jamais (*Th. 25. Cor. 1.*) soutenir ce poids $EOQF$ sur la surface XY . Donc aussi la surface SV , de qui la résistance est (*Lem. 3. Cor. 8. 9.*) suivant ces mêmes directions perpendiculaires OP , & qui par-là ne peut ici (*ax. 2.*) que suppléer la puissance P , ne pourra jamais soutenir le poids $EOQF$ sur la surface XY , si d'aucun des points A où ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la pesanteur de ce poids, on ne peut mener aucune perpendiculaire à la surface XY par la base qu'elle touche de ce même poids.

On démontrera de même que cette surface XY ne pourra jamais soutenir le poids $EOQF$ sur la surface SV , si d'aucun des points A où la direction LC de la pesanteur de ce poids est rencontrée par les perpendiculaires QR à cette surface XY , menée des points où elle touche ce même poids, l'on n'en peut mener aucune à la surface SV par l'autre base qu'elle touche de ce poids $EOQF$. Pour le voir on y emploiera une puissance quelconque R au bout d'une corde ER , appliquée à ce même poids suivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires QR à XY .

XY, comme l'on en vient d'employer une quelconque P appliquée à ce même poids suivant une des perpendiculaires OP à la surface SV par la base qu'elle touche de ce même poids EOQF: un raisonnement semblable à celui qui vient de faire voir qu'aucune puissance P dirigée suivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la surface SV par la base qu'elle touche du poids EOQF, ne peut soutenir ce poids sur la surface XY tant que du point A où cette direction OP rencontre celle LC de la pesanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette surface XY par la base qu'elle touche de ce même poids, fera voir de même qu'aucune puissance R dirigée suivant celle qu'on voudra des perpendiculaires QR à cette surface XT par la base qu'elle touche de ce poids EOQF, ne pourra jamais le soutenir sur la surface SV tant que du point A où cette direction QR rencontre celle LC de la pesanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette surface SV par la base qu'elle touche de ce poids EOQF; & que par conséquent alors la surface XY, restituée à la place de la puissance R qui la suppléeroit, ne pourra soutenir ce poids sur l'autre surface SV par la même raison qui vient de faire voir que cette autre surface SV restituée à la place de la puissance P qui la suppléoit, ne pourra jamais en pareilles circonstances soutenir le même poids quelconque EOQF sur la surface XY.

Donc ce poids quelconque, ni par conséquent aucun poids ne peut demeurer en repos entre deux surfaces quelconques SV, XY, desquelles seules il soit soutenu, tant qu'il ne sera ni de figure, ni de position telles qu'il ait quelque point A de la direction quelconque LC de sa pesanteur, duquel on puisse mener deux perpendiculaires à ces deux surfaces, une sur chacune, par les bases qu'elles touchent de ce poids quelconque EOQF. *Ce qu'il falloit*
1°. démontrer.

PART. II. Au contraire si de quelque point A de la direction quelconque LC de la pesanteur d'un poids aussi

FIG. 223.
224. 225.
226.

quelconque $EOQF$, l'on peut mener deux perpendiculaires AO , AQ , aux deux surfaces fixes quelconques SV , XY , entre lesquelles il se trouve, par les bases qu'elles touchent de ce poids; il y demeurera toujours en repos soutenu par elles seules.

Car la pesanteur de ce poids $EOQF$, ou son effort (*Hyp.*) suivant la diagonale AC du parallélogramme $ABCD$, étant le même (*Lem. 3. Corol. 6.*) que s'il résulteroit du concours de deux autres efforts suivant les côtes AD , AB , de ce parallélogramme, à chacun desquels efforts celui-là, ou la pesanteur du poids $EOQF$ fût comme cette diagonale AC à chacun de ces mêmes côtes AD , AB , du même parallélogramme $ABCD$; c'est-à-dire, le même que si ce corps $EOQF$ n'avoit aucune pesanteur, & qu'il fût seulement poussé ou tiré suivant ces directions AD , AB , par deux forces qui fussent à ce qu'il a effectivement de pesanteur, comme chacun de ces côtes AD , AB , du parallélogramme $ABCD$, est à sa diagonale AC prise depuis A vers C sur la direction effective LC de cette pesanteur. Or si chacun de ces deux côtes AD , AB , du parallélogramme $ABCD$, est perpendiculaire à chacune des surfaces SV , XY , en quelqu'un des points O , Q , de chacune des bases qu'elles touchent de ce corps $EOQF$; chacune de ces deux surfaces soutiendra tout entier (*Lem. 3. Corol. 8. 9.*) celui de ces deux efforts latéraux qui lui fera ainsi directement opposé. Donc ces deux surfaces ensemble soutiendront ainsi toute la pesanteur de ce poids $EOQF$. Par conséquent en ce cas de AD , AB , menées de quelque point A que ce soit de la direction quelconque LC de la pesanteur de ce poids aussi quelconque, perpendiculairement à ces deux surfaces encore quelconques SV , XY , en des points O , Q , des bases qu'elles touchent de ce même poids, une à chacune; ces deux surfaces fixes le soutiendront toujours seules en repos entr'elles. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. En ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque $EOQF$ entre les surfaces fixes quelconques

SV, XY, sur lesquelles de quelque point A de la direction LC de la pesanteur, tombent (*part. 1. 2.*) les perpendiculaires AD, AB, en des points O, Q, des bases que ces surfaces touchent de ce poids; ces mêmes surfaces SV, XY, soutenant chacune (*Lem. 3. Corol. 8. 9.*) tout ce qu'il fait d'effort (*Lem. 3. Corol. 6.*) suivant chacune de ces perpendiculaires, sçavoir, SV en O tout ce qu'il en fait suivant AD, & XY en Q tout ce qu'il en fait suivant AB: la charge (*Déf. 16.*) ou la résistance de chacune de ces deux surfaces doit être (*Ax. 4. & Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) égale à celui qu'elle soutient de ces deux efforts. Or la pesanteur de ce poids EOQF dirigée (*Hyp.*) suivant AC, est (*Lem. 3. Corol. 6.*) à chacun de ces deux efforts suivant AD, AB, comme la diagonale AC du parallélogramme ABCD est à chacun de ses côtes AD, AB, du même parallélogramme. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque EOQF entre les surfaces aussi quelconques SV, XY, ce poids est aussi toujours à chacune des charges qui en résulte à chacune de ces deux surfaces, comme la diagonale AC du parallélogramme ABCD est à chacun de ses côtes AD, AB, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces mêmes surfaces SV, XY, en O, Q, en passant par quelque point A de la direction LC de la pesanteur de ces poids, & par les bases que ces deux surfaces touchent de ce même poids EOQF. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

Autrement. Pour démontrer encore d'une autre manière cette *part. 3.* imaginons pour un moment ce poids quelconque EOQF comme soutenu avec des cordes seulement par deux puissances P, R, appliquées à ce poids en F, E, suivant des directions DP, BR, menées de quelque point A de la direction LC de la pesanteur de ce poids perpendiculairement aux surfaces SV, XY, en des points O, Q, des bases qu'elles touchent de ce même poids EOQF, ainsi que les *part. 1. 2.* font voir qu'il est toujours possible de les mener en ce cas-ci de ce poids supposé soutenu entre ces deux surfaces par elles seules.

Cela (dis-je) imaginé, les puissances P , R , soutenant ainsi (*Hyp.*) les charges entières des surfaces SV , XY , feront égales (*Ax. 4. & Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) à ces mêmes charges, chacune à chacune; sçavoir, la puissance P égale à la charge de la surface SV , & la puissance R égale à la charge de la surface XY . Or en ce cas d'équilibre imaginé entre le poids $EOQF$, & ces deux puissances P , R , la part. 1. du Th. 4. fait voir que la pesanteur de ce poids seroit toujours à chacune de ces puissances P , R , comme la diagonale AC du parallelogramme $ABCD$ est à chacun de ses côtez AD , AB , correspondans sur leurs directions. Donc aussi dans l'équilibre ou le repos effectif de ce même poids $EOQF$ entre les surfaces SV , XY , qu'on suppose seules le soutenir; la pesanteur de ce poids doit toujours être à chacune des charges qui en résulte à chacune de ces deux surfaces, comme la diagonale AC du parallelogramme $ABCD$ est à chacun de ses côtez AD , AB , perpendiculaires (*Hyp.*) à ces surfaces SV , XY , par quelque point A de la direction LC de la pesanteur de ce poids $EOQF$, & par les bases que ces surfaces touchent de ce poids. *Ce qu'il falloit encore 3.^o démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 216.

Les part. 1. 2. font voir dans la Fig. 226. qu'un poids sphérique $EOQF$, en quelque situation qu'on le mette entre deux surfaces quelconques SV , XY , fixement inclinées à volonté, entre lesquelles il ne puisse passer, y demeurera toujours en repos; mais qu'il n'en seroit pas ainsi d'aucun autre poids de toute autre figure; puisque la Sphere est le seul corps qui dans quelque situation qu'on le mette entre deux surfaces, ait un point A dans la direction LC de sa pesanteur, sçavoir, son centre, duquel on puisse toujours mener deux perpendiculaires AO , AQ , à ces deux surfaces SV , XY , une sur chacune, par les points O , Q , où elles toucheroient cette Sphere. C'est peut-être pour cela que l'on ne met encore d'ordi-

naire que des poids spheriques entre des plans inclinez, s'il est vrai que l'on ait apperçu cette condition requise par la part. 1. pour l'équilibre ou le repos d'un poids entre deux surfaces.

COROLLAIRE II.

La part. 1. de ce Théoreme-ci, & le Corol. 8. du Lem. 3. font voir qu'aucun poids BQDEFP de direction LC perpendiculaire à un des plans HK, KN, par exemple, au plan KN, ne peut rester appuyé sur tous les deux, quelque situation qu'on lui donne. Car,

Fig. 227.
228.

1°. La direction LC de la pesanteur de ce poids BQDEFP perpendiculaire (*Hyp.*) à KN, passe par la base BP que ce plan KN touche de ce même poids, comme dans la Fig. 227. le Corol. 8. du Lem. 3. fait voir que ce plan seul KN le soutiendra tout entier, sans que ce poids s'appuie en rien contre le plan HK, quoique la direction LC de la pesanteur de ce poids ait quelque point A duquel on puisse mener aussi une perpendiculaire AO à ce plan HK.

Fig. 227.

2°. Si cette direction LC de la pesanteur de ce poids BQDEFP ne passe par aucune des bases de ce poids, ainsi que dans la Fig. 228. ce poids s'appuyera pour lors effectivement contre le plan HK; mais sa direction LC perpendiculaire (*Hyp.*) au plan KN, n'aura aucun point d'où l'on en puisse mener une à ce plan par la base qu'il touche de ce poids. Donc (*part. 1.*) il ne pourra demeurer ainsi en repos entre ces deux plans, mais glissera du côté de N, jusqu'à ce qu'il touche le plan KN dans une base par laquelle sa direction LC passe; & alors il s'arrêtera sur cette base porté par ce seul plan KN, sans s'appuyer plus du tout sur l'autre plan HK, ainsi qu'on le vient de voir dans le nomb. 1.

Fig. 228.

3°. Il suit du précédent nomb. 2. que si l'on prend BQ pour le profil d'une échelle appuyée en B sur un plancher KN, & en Q contre un mur HK, ayant LC pour direction du poids total fait du sien & de celui de l'homme qui y seroit monté; c'est-à-dire (*Déf. 14.*) pour la direction du

Fig. 229.

centre de gravité G de ce poids total, ou du point G de toute son action : il fuit, dis-je, du précédent nomb. 2. que le pied B de cette échelle BQ glissera toujours vers N jusqu'à ce qu'elle soit arrivée toute entière, & couchée le long du plancher KN , à moins qu'on n'en arrête ou fixe le pied B .

Pour le voir encore autrement, il est à considérer que le mur HK ne soutient en Q cette échelle BQ , qu'en la repoussant vers D suivant QD perpendiculaire à ce mur, comme feroit une puissance en D par le moyen d'une corde QD attachée en Q à cette échelle BQ suivant cette direction perpendiculaire au mur HK , laquelle rencontre en L la direction LC de tout le poids fait de celui de cette échelle & de celui de l'homme dont elle est chargée. Or il est manifeste (*Ax. 4. & Lem. 3. part. 4.*) que du concours d'action de ce poids total, & de la puissance D , qui exprime la résistance du mur en Q , il en résulteroit à cette échelle BQ une impression suivant LB oblique au plancher KN . Donc (*Lem. 3. Corol. 7.*) cette échelle glisseroit alors vers N , & toujours de même jusqu'à ce qu'elle fût arrivée toute entière & couchée sur le plancher KN , à moins qu'elle ne fût arrêtée en B par un appui dont la charge feroit (*Th. 2.1. part. 3. 4.*) à la puissance D , ou (*Hyp.*) à la résistance en Q du mur HK , & au poids total fait de celui de l'échelle & de celui de l'homme qui la charge, comme la diagonale LB du parallélogramme $BCLD$ feroit à ses côtes LD , LC .

Ce qu'on voit démontré dans ce nomb. 3. *M. Wallis* paroît l'avoir apprehendé dans le *Schol.* de la prop. 8. part. 3. de sa *Mécanique*, en arrêtant fixement le pied d'une échelle appuyée contre un mur, en arrêtant aussi de même le bout d'un Levier chargé d'un poids vers son milieu, & appuyé obliquement par ce bout sur un plan horizontal, & par l'autre contre un appui plus élevé : sans cela, dit-il, *vectis extremum B* (c'est le bout d'en bas) *in horizontali rectâ labetur*. On verra dans le *Scholie* suivant pourquoi l'expérience fait cependant souvent voir le contraire de cela, & conséquemment aussi le contraire des précédens nomb. 2. 3.

COROLLAIRE III.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la part. 3. FIG. 223.
224. 225.
226.
cette partie fait voir qu'en cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les surfaces SV, XY, ce poids est à chacune de leurs charges résultantes de la seule action de la pesanteur de ce poids en cet état sur elles, comme la diagonale AC du parallélogramme ABCD est à chacun de ses côtes AD, AB, qui (*part. 2.*) sont perpendiculaires à ces surfaces en O, Q, c'est-à-dire (le parallélogramme ABCD rendant $AB=CD$) comme le côté AC du triangle ADC est à chacun de ses deux autres côtes AD, CD, ou (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme le sinus de l'angle ADC est à chacun des sinus des angles ACD ou CAB, & DAC. Or (*Déf. 9. Corol. 2.*) le sinus de l'angle ADC est égal au sinus de l'angle DAB. Donc en ce cas d'équilibre la pesanteur du poids EOQF est à chacune des charges ou des résistances des surfaces SV, XY, comme le sinus de l'angle DAB compris entre les perpendiculaires AD, AB, à ces surfaces en O, Q, est à chacun des sinus des angles DAC, BAC, que ces perpendiculaires réciproquement prises font avec la direction LC de la pesanteur de ce poids EOQF.

La seconde démonstration de la part. 3. donne encore la même chose par le moyen du Corol. 4. du Th. 1. parce que les charges ou les résistances des surfaces SV, XY, y sont égales aux puissances P, R, qui en la place de ces surfaces soutiendront le poids EOQF seulement avec des cordes FP, ER, dirigées suivant les perpendiculaires PO, RQ, à ces surfaces; & qu'en ce cas le Cor. 4. du Th. 1. fait voir que ce poids EOQF est à chacune de ces puissances comme le sinus de l'angle PAR est à chacun des sinus des angles RAL, PAL, c'est-à-dire (les angles oppozés au sommet étant égaux entr'eux) comme le sinus de l'angle DAB est à chacun des sinus des angles BAC, DAC. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les surfaces SV, XY, la pesanteur de ce poids est

encore toujours, à chacune de leurs charges ou résistances comme le sinus de l'angle DAB. est à chacun des sinus des angles BAC, DAC.

COROLLAIRE IV.

Toutes choses demeurant les mêmes, si de quelque point M du plan touchant MG de la surface XY en Q, l'on imagine MT perpendiculaire en Z à la direction LC de la pesanteur du poids EOQF, & qui rencontre en T l'autre plan touchant HG de la surface SV en O; les triangles AOb, TZb, rectangles (*Hyp.*) en O, Z, ayant l'angle ZbT commun, auront l'angle OAb = ZTh; de même les triangles AQm, MZm, ayant l'angle ZmM commun, auront aussi l'angle QAm = ZMm: de sorte que l'on aura ici les angles MTG = DAC, TMG = CAB = ACD; & ainsi les triangles TMG, ADC, seront ici semblables entr'eux. Or on vient de voir dans le Corol. 3. que le poids EOQF ou sa pesanteur est ici à chacune des surfaces SV, XY, comme le côté AC du triangle ADC est à chacun de ses deux autres côtez AD, DC. Donc ce poids EOQF est aussi à chacune des charges des surfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle TGM est à chacun de ses deux autres côtez TG, MG, qui touchent ces surfaces en O, Q, quelles que soient ces mêmes surfaces, leurs inclinaisons, & la direction LC de la pesanteur du poids EOQF.

COROLLAIRE V.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que la direction LC de ce poids EOQF soit perpendiculaire à la ligne NK des bases des surfaces SV, XY, ou de leurs plans touchans GH, MG, en O, Q; & conséquemment que MT soit parallèle à cette horizontale NK: cette hypothese rendra les angles HGK = MTG, MGN = TMG. Or le précédent Corol. 4. fait voir que le poids EOQF est ici à chacune des charges des surfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle MGT est à chacun de ses deux au-

res côtez TG , MG , touchans en O , Q , de ces mêmes surfaces ; & conséquemment aussi (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme le sinus de l'angle MGT ou MGH est à chacun des sinus des angles TMG , MTG . Donc ce même poids $EOQF$ ou sa pesanteur est pareillement à chacune de ces charges des surfaces SV , XY , comme le sinus de l'angle MGH compris entre leurs plans touchans HG , MG , en O , Q , est à chacun des sinus des angles MGN , HGK , d'inclinaisons de ces plans, réciproquement pris, quelles que soient ces inclinaisons MGN , HGK , & quelqu'angle MGH que ces deux plans fassent entr'eux.

COROLLAIRE V I.

Si outre ce que dessus (*Corol. 5.*) on suppose que cet angle MGH soit droit, de même que le sont (*Hyp.*) les angles en K , N , cette double hypothèse rendant les triangles HGK , GNM , semblables chacun au triangle MGT , le Corol. 4, donnera encore pour ce cas-ci le poids $EOQF$ à chacune des charges des surfaces SV , XY , comme l'hypoténuse HG du triangle rectangle HKG est à sa base GK & à sa hauteur KH ; & aussi comme l'hypoténuse MG du triangle rectangle GNM est à sa hauteur MN & à sa base NG .

COROLLAIRE V I I.

Quant à la comparaison entr'elles des charges ou (*Déf. 27.*) des résistances en O , Q , des surfaces quelconques SV , XY , fixement inclinées à volonté, entre lesquelles un poids aussi quelconque $EOQF$ de telle direction LC qu'on voudra, est soutenu en équilibre ou en repos ; il suit présentement de la part. 3. & des Corol. 3. 4. 5. 6. qui en résultent, la construction & les hypothèses demeurant les mêmes ici que là, il suit, dis-je,

1°. De la part. 3. en general, que la charge de la surface SV est toujours à la charge de la surface XY , comme le côté AD du parallélogramme $ABCD$ est à son autre côté AB , ou (à cause que ce parallélogramme rend $DC = AB$, &

$AD=BC$) comme le côté AD du triangle ADC est à son côté DC , ou bien aussi comme le côté BC du triangle ABC est à son côté AB .

2°. Du Corol. 3. encore en general que la charge de la surface SV est toujours aussi à la charge de la surface XY , comme le sinus de l'angle BAC est au sinus de l'angle DAC , c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles DAC , BAC , que les perpendiculaires AO , AQ , à ces surfaces SV , XY , font avec la direction AC de la pesanteur du poids $EOQF$, qu'elles soutiennent entre-elles.

3°. Du Corol. 4. en supposant MT perpendiculaire à LC , & le reste en general, il suit que la charge de la surface SV est toujours à la charge de la surface XY , comme le côté TG du triangle MGT est à son côté MT , c'est-à-dire, en raison des côtes de ce triangle, qui touchent ces surfaces SV , XY , aux points O , Q , où tombent perpendiculairement sur elles du point A de LC , & par les bases qu'elles touchent du poids $EOQF$ qu'elles soutiennent, les perpendiculaires AO , BQ .

4°. Du Corol. 5. en supposant de plus la direction LC de la pesanteur de ce poids $EOQF$, perpendiculaire à la ligne NK des bases des surfaces SV , XY ; il suit que la charge de la première SV de ces deux surfaces est à la charge de la seconde XY , comme le sinus de l'angle MGN est au sinus de l'angle HGK , c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles HGK , MGN , d'inclinaison des plans AG , MG , touchans de ces surfaces en O , Q .

5°. Du Cor. 6. en supposant de plus que l'angle HGM compris entre ces plans, est droit; il suit que la charge de la surface SV est à la charge de la surface XY , comme la base GK du plan HG est à sa hauteur HK , & aussi comme la hauteur MN du plan MG est à sa base NG .

6°. Donc si de plus ces plans en angle droit HGM étoient également inclinez, c'est-à-dire, de 45 degrez chacun sur leurs bases horizontales; la base de chacun de ces deux plans se trouvant alors égale à sa hauteur,

les charges des surfaces SV , XY , feroient aussi pour lors égales entr'elles.

C O R O L L A I R E V I I I.

Il suit encore en general de la part. 3. & des Corol. 3. 5. qui en résultent, qu'en cas d'équilibre ou de repos d'un poids quelconque $EOQF$ de telle direction LC qu'on voudra, soutenu entre deux surfaces aussi quelconques SV , XY , fixement inclinées à volonté, & par elles seules; la somme des charges de ces deux surfaces, résultantes de la pesanteur de ce poids, est toujours plus grande que cette pesanteur. Car la part. 3. fait voir que cette somme de charges des surfaces SV , XY , est toujours à cette pesanteur du poids $EOQF$, dont elles résultent, comme la somme des côtes AD , AB , du parallelogramme $ABDC$ est à sa diagonale AC , c'est-à-dire (à cause de $DC=AB$) comme la somme des côtes AD , DC , du triangle ADC est à son troisième côté AC , ainsi qu'on l'a vu dans le Corol. 3. Et en supposant MT perpendiculaire à la direction quelconque LC de la pesanteur du poids $EOQF$, le Corol. 4. fait aussi voir que cette somme de charges des surfaces SV , XY , est toujours pareillement à la pesanteur de ce poids, comme la somme des côtes GT , GM , du triangle MGT est à son troisième côté MT . Or on sçait que la somme de deux côtes quelconques d'un triangle est toujours plus grande que son troisième côté. Donc aussi la somme des charges de deux surfaces quelconques SV , XY , qui seules soutiennent entr'elles un poids quelconque $EOQF$ de direction LC à volonté, est toujours plus grande que la pesanteur de ce poids.

Voilà en general pour toutes sortes de poids, de figures & de directions quelconques, soutenus entre deux surfaces quelconques fixement inclinées à volonté, & qui le soutiennent seules. Voici presentement pour les seuls poids spheriques.

C O R O L L A I R E I X.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Cor. 5. Fig. 216.

Oij

si des points O, Q , d'attouchement de la Sphere $EFQO$ par les surfaces quelconques SV, XY , ou par leurs plans touchans HG, MG , en ces points O, Q , l'on mene Ok, Qn , perpendiculaires en k, n , à l'horizontale NK ; les charges de ces surfaces SV, XY , seront entr'elles en raison réciproque de ces perpendiculaires ou hauteurs Ok, Qn . Car les touchantes GO, GQ de cette Sphere $EFQO$ étant égales entr'elles, si l'on en prend une pour le sinus total, l'on aura Ok pour le sinus de l'angle HGK , & Qn pour le sinus de l'angle MGN . Or (*Corol. 7. nomb. 4.*) la charge de la surface SV est ici à la charge de la surface XY , comme le sinus de l'angle MGN est au sinus de l'angle HGK . Donc la premiere de ces deux charges fera pareillement ici à la seconde comme Qn est à Ok ; c'est-à-dire, en raison réciproque des hauteurs des plans OG, QG , s'ils n'avoient que ces longueurs égales.

COROLLAIRE X.

Fig. 230. Ce qu'on voit de la Fig. 226. dans la Fig. 230. étant le même que dans celle-là, soit de plus dans celle-ci la droite OQ rencontrée en ϖ par la direction Ab de la pesanteur de la Sphere $EFQO$, supposée perpendiculaire en φ à NK : il suit du précédent Corol. 9. que la charge de la surface SV est pareillement ici à la charge de la surface $XY :: Q\varpi. O\varpi :: n\varphi. k\varphi$.

Pour le voir, soient imaginées des points d'attouchement O, Q , les droites $O\mu, Q\lambda$, perpendiculaires en μ, λ , sur Ab . Cela fait, les triangles semblables aisez ici à reconnoître, & les égalitez $OG=QG, AO=AQ$, résultantes de la nature de la Sphere $EFQO$, y donneront $Qn. QG :: \lambda m. Qm :: Q\lambda. AQ :: Q\lambda. AO$. Et $QG. Ok :: OG. Ok :: Ob. k\mu :: AO. O\mu$. Donc (en raison ordonnée) $Qn. Ok :: Q\lambda. O\mu :: Q\varpi. O\varpi$. Or on vient de voir dans le Corol. 9. que la charge de la surface SV est ici à la charge de la surface $XY :: Qn. Ok$. Donc la premiere de ces deux charges est pareillement ici à la seconde :: $Q\varpi. O\pi :: Q\lambda. O\mu :: n\varphi. k\varphi$. Ce qu'il falloit faire voir.

COROLLAIRE XI.

Il suit encore du Corol. 9. que les charges des surfaces SV, XY , sont ici entr'elles en raison renversée ou réciproque des puissances qu'il faudroit pour soutenir chacune seule le poids sphérique $FEQQ$ sur chacun de leurs points O, Q , suivant une direction parallèle à chacun de leurs plans HG, MG , touchans en ces points. Car si l'on appelle M la puissance qui soutiendrait ainsi seule ce poids $EFQQ$ sur le point Q de la surface XY ; & H , celle qui le soutiendrait de même seule sur le point O de la surface SV ; & enfin A , la pesanteur de ce poids sphérique $EFQQ$: le Théoreme 28. pour un seul plan donnera $M.A :: MN.MG :: Qn.QG$ (à cause de $QG = OG$) :: $Qn. OG$. Et $A.H :: HG.HK :: OG.Ok$. Donc (en raison ordonnée) l'on aura ici $M.H :: Qn.Ok$. Par conséquent (Corol. 9.) la puissance (M), qui dirigée parallèlement à MG , soutiendrait seule le poids sphérique $EFQQ$ sur le point Q de la surface XY , seroit à la puissance (H) qui dirigée suivant HG , soutiendrait de même seule ce poids sur le point O de la surface SV , comme la charge de cette surface SV est à la charge de l'autre surface XY , lorsque ces deux surfaces SV, XY , soutiennent ensemble ce poids sphérique $EFQQ$ sur leurs points O, Q , quelqu'angle HGM que fassent entr'eux les plans HG, MG , qui touchent (*Hyp.*) ces surfaces en ces points O, Q .

COROLLAIRE XII.

Cela n'est pas seulement vrai des poids sphériques de directions AC perpendiculaires à la droite NK ; mais encore de toutes sortes de poids de figures & de directions AC quelconques, soutenus entre des surfaces fixes quelconques par ces surfaces seules. Pour le voir, ce qu'il y a des Fig. 223. 224. 225. 226. dans les Fig. 231. 232. demeurant ici le même que là, soient de plus du point C de celles-ci les droites Cl, Cm , perpendiculaires en

FIG. 231.
232.

λ, μ , sur les côtes AB, AD, du parallélogramme ABCD, prolongez, s'il en est besoin.

Cela étant, & les angles de ce parallélogramme opposés en B, D, étant égaux entr'eux; les triangles rectangles CAB, C μ D, seront semblables entr'eux; & par conséquent C λ . C μ :: CB. CD :: AD. AB. Or si l'on prend encore (ainsi que dans le précédent Corol. 11.) A pour la pesanteur du poids EOQF, & M, H, pour les puissances, dont chacune dirigée parallèlement à chacun des plans GM, GH, soutiendrait seule sur lui le poids EOQF; la part. 1. du Th. 25. donnera M. A :: C λ . AC. Et A. H :: AC. C μ . de sorte qu'en raison ordonnée, l'on aura ici M. H :: C λ . C μ . Donc aussi M. H :: AD. AB. c'est-à-dire, en general (part. 3.) que la puissance (M), qui dirigée parallèlement à MG, soutiendrait seule le poids EOQF sur le point Q de la surface XY, seroit à la puissance (H), qui dirigée parallèlement à HG, soutiendrait de même seule le même poids sur le point O de la surface SV, comme la charge de cette seconde surface SV est à celle de la première XY, lorsque ces deux surfaces soutiennent ensemble ce poids EOQF.

COROLLAIRE XIII.

Fig. 231.
232.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Corol. 12. on a vû dans le Corol. 61. du Th. 26. que la somme M+H des puissances M, H, qui dirigée chacune à chacun des plans MG, HG, soutiendroient chacune seule le poids EOQF sur chacun de ces plans: on a vû, dis-je, dans ce Corol. 61. du Th. 26. que cette somme M+H de puissances; peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la pesanteur A de ce poids EOQF. D'un autre côté le précédent Corol. 8. fait voir aussi que ce poids est toujours moindre que la somme O+Q des charges O, Q, qui en résultent sur les surfaces SV, XY, lorsqu'elles seules le soutiennent ensemble comme ici. D'où l'on voit déjà que cette som-

me $O+Q$ des charges de ces surfaces SV, XY , peut être plus grande que la somme $M+H$ des puissances M, H .

Je dis presentement que cette somme $O+Q$ de charges des surfaces SV, XY , ne peut jamais être moindre que la somme $M+H$ des puissances M, H ; mais qu'elle lui est égale, lorsque l'angle MGH est droit, & toujours plus grande tant qu'il ne l'est pas.

Pour le voir, il n'y a qu'à considérer que puisque (*Corol. 12.*) $M. H :: C\lambda. C\mu$. l'on aura (en composant) $M. M+H :: C\lambda. C\lambda+C\mu$. Or (*Th. 26. part. 1.*) $A. M :: AC. C\lambda$. Donc (en raison ordonnée) $A. M+H :: AC. C\lambda+C\mu$. Or aussi en composant (*part. 3.*) $O+Q. A :: AD+AB. AC$. Donc (en raison ordonnée) $O+Q. M+H :: AD+AB. C\lambda+C\mu$. Or, à cause des angles ABC, ADC , toujours égaux chacun à l'angle MGH , les lignes $C\lambda, C\mu$, perpendiculaires (*Hyp.*) aux côtes AB, AD , du parallélogramme $ABCD$, donnent CB ou $AD = C\lambda, CD$ ou $AB = C\mu$, lorsque l'angle MGH est droit; & conséquemment alors $AD+AB = C\lambda+C\mu$: au contraire ces perpendiculaires $C\lambda, C\mu$, aux côtes AB, AD , du parallélogramme $ABCD$ donnent toujours CB ou $AD > C\lambda, CD$ ou $AB > C\mu$, tant que cet angle MGH n'est pas droit; & conséquemment alors $AD+AB > C\lambda+C\mu$. Donc aussi $O+Q = M+H$, lorsque ce même angle MGH est droit, & toujours $O+Q > M+H$, tant qu'il ne l'est pas. Ce qu'il falloit ici faire voir.

Voyez ici la prop. 30. pag. 78. de *Vitalis Jordanus*.

COROLLAIRE XIV.

Puisque (*part. 1. 2.*) un poids ne peut demeurer en repos entre deux surfaces, qui seules le soutiennent ensemble, à moins que dans la direction de sa pesanteur il n'y ait quelque point, duquel on puisse mener deux perpendiculaires à ces deux surfaces, une à chacune, par les bases qu'elles touchent de ce poids; & que ne pouvant s'échapper d'entre ces deux surfaces, elles ne laissent pourtant

pas de l'y retenir en repos, quelles qu'elles soient, & de quelque figure que ce poids soit aussi: il résulte de ces part. 1. 2. du présent Th. 29. qu'en ce cas-ci ce poids quelconque y prend toujours une situation (si on ne la lui donne, dans laquelle la direction de sa pesanteur a toujours quelque point, duquel on peut mener deux perpendiculaires à ces deux surfaces, une à chacune, par les bases que ces surfaces touchent alors de ce poids.

S C H O L I E.

Fig. 230.

On vient de voir dans le Corol. 10. Fig. 230. que dans l'hypothese de la direction Ab du poids sphérique $EOQF$, perpendiculaire à la base horizontale NK commune aux plans MG , HG , d'inclinaisons quelconques; les forces ou puissances M , H , qu'il faudroit pour soutenir chacune séparément ce poids sur chacun de ces plans, suivant des directions parallèles chacune à chacun d'eux, seroient toujours entr'elles en raison réciproque des parties $Q\omega$, $O\omega$, dans lesquelles la direction Ab de ce poids diviserait la soutendante QO du cercle $DKVL$, par les points Q , O , où il toucheroit ces deux plans MG , HG , c'est-à-dire, toujours $M.H::O\omega.Q\omega$.

Fig. 233.
234.

Voici presentement quelque chose de semblable pour deux poids FQ , EO , de pesanteurs & de figures quelconques, lesquels auroient leurs directions AT , ZX , perpendiculaires à la base horizontale MH commune à deux plans GM , GH , d'inclinaisons quelconques, sur chacun desquels chacun de ces poids FQ , EO , seroit soutenu par chacune des deux puissances égales P , R , de directions FP , ER , parallèles chacune à chacune des longueurs GM , GH , de ces deux plans. Car si l'on imagine un plan vertical, qui passant par les directions ZX , AT , des poids FQ , EO , coupe ces plans GM , GH , avec leur base commune MH , en des sections qui forment le triangle MGH , dans lequel soit inscrit un cercle $DKVL$, qui en touche les côtes ou ces sections en K , L , D , & dont la soutendante KL soit coupée en S par son diamètre DV parallèle

parallèle aux directions des poids ; l'on aura toujours $FQ. EO :: LS. KS.$

Pour le voir, soient des points K, L, par le centre C du cercle DKVL, les rayons KC, LC, avec les perpendiculaires KB, LN, sur son diamètre DV. Cela fait, les points d'attouchement D, K, L, rendant les angles $M + DCK = KCV + DCK$, & $H + DCL = LCV + DCL$, rendent aussi les angles $M = KCV$, $H = LCV$; par conséquent (en prenant \int pour la marque des sinus) le Corol. 2. du Lem. 8. donnant $GM. GH :: \int H. \int M.$ l'on aura ici $GM. GH :: \int LCV. \int KCV :: LN. KB :: LS. KS.$ Or ce cas des puissances égales P, R, dirigées parallèlement aux plans GM, GH, & des poids FQ, EO, dirigez parallèlement à la verticale VD ; le nomb. 3. du Cor. 56. du Th. 26. fait voir que $FQ. EO :: GM. GH.$ Donc aussi en ce cas le poids FQ est au poids EO :: LS. KS. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà dans ce Th. 29. pour les charges résultantes de la pesanteur d'un poids quelconque perpendiculairement sur deux surfaces fixes qui le soutiennent entr'elles. Voici présentement pour les charges résultantes de celles-là perpendiculairement aussi sur les plans des bases & des hauteurs de ces surfaces ou de leurs plans touchans aux points de leurs charges.

THEOREME XXX.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la part. 3. du précédent Th. 29. si des angles B, D, du parallélogramme ABCD l'on mène Bβ, Dδ, perpendiculaires en β, δ, sur la diagonale AC de ce parallélogramme dans les Fig. 223. 224. 225. 226. & que l'on prenne à l'ordinaire la direction AC du poids EO QF parallèle aux verticales HK, MN, c'est-à-dire (Hyp.) perpendiculaire à l'horizontale NK ;

I. Les charges particulières des bases GK, GN, seront entr'elles :: AD. CD.

II. Les charges particulières des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN, seront égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

Pour abréger le calcul, & le rendre plus intelligible, soient appellées A, la pesanteur du poids EOQF; O, Q, les charges qui en résultent perpendiculairement sur les surfaces SV, XY; V, Y, les résultantes de celles-ci perpendiculairement sur les bases particulières GK, GN; & S, X, celles qui en résultent aussi perpendiculairement sur ou contre les hauteurs ou plans verticaux HK, MN: noms dont voici la liste pour le soulagement de la mémoire.

La pesanteur du poids EOQF,	A.
à la surface SV,	O.
à sa base GK,	V.
Charges qui en résultent { à sa hauteur HK,	S.
à la surface XY,	Q.
à sa base GN,	Y.
à sa hauteur MN,	X.

Après cela, si l'on considère que les droites D δ , B β , perpendiculaires (*Hyp.*) sur la diagonale AC du parallélogramme ABCD, rendant les triangles A β B, C δ D, semblables entr'eux, rendent aussi A β . AC :: AB. CD :: B β . D δ . on verra que A β =C δ , & B β =D δ ; puisque ce parallélogramme ABCD rend AB=CD. Cela posé,

PART. I. La présente hypothèse de AC perpendiculaire à la base totale NK, donnera (*Th. 28. Corol. 3. nomb. 1.*) V. A :: A δ . AC. Et A. Y :: AC. A β :: AC. C δ . Donc (en raison ordonnée) V. Y :: A δ . C δ . *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. La même hypothèse de AC perpendiculaire sur NK, donnera aussi (*Th. 28. Corol. 3. nomb. 2.*) S. A :: D δ . AC. Et A. X :: AC. B β :: AC. D δ . Donc (en raison ordonnée) S. X :: AC. AC :: 1. 1. Et conséquemment S=X. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE.

Puisque (*part. 1.*) $V.Y :: AD.CD$. l'on aura (en composant) $V.V+Y :: AD.AD+CA :: AD.AC$. Or (*Th. 28. Corol. 3. nomb. 1.*) $A.V :: AC.AD$. Donc (en raison ordonnée) $A.V+Y :: AC.AC :: 1.1$. Et conséquemment $V+Y=A$: c'est-à-dire, que la charge entiere ($V+Y$) de la base totale NK , est toujours égale à la pesanteur (A) du poids $EOQF$ soutenu entre les deux surfaces SV, XY , fixement appuyées sur cette base commune, & contre les plans HK, MN , perpendiculaires (*Hyp.*) de même que AC à cette base NK .

Voici encore la même chose, mais plus généralement ; savoir, pour toutes les directions imaginables AC de la pesanteur du poids $EOQF$.

THEOREME XXXI.

En general, quelle que soit la direction AC du poids $EOQF$, tout le reste demeurant le même que dans le précédent *Th. 30.* FIG. 225.
24. 225.
226.

I. Les charges particulieres des bases GK, GN , seront entre-elles :: $AD \times GK \times MG. AB \times GN \times HG$.

II. Les charges particulieres des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN , seront entr'elles :: $AD \times HK \times MG. AB \times MN \times HG$.

DEMONSTRATION.

PARL. I. Les noms demeurant ici les mêmes que dans la démonstration du précédent *Th. 30.* l'on aura (*Th. 28. Corol. 2. nomb. 2. 4.*) $Y.A :: AD \times GK. AC \times GH$. Et $A.Y :: AC \times MG. AB \times NG$. Donc (en multipliant par ordre) $V.Y :: AD \times GK \times MG. GH \times AB \times NG$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. L'on aura aussi (*Th. 28. Corol. 2. nomb. 2. 4.*) $S.A :: AD \times HK. AC \times HG$. Et $A.X :: AC \times MG. AB \times MN$. Donc (en multipliant par ordre) $S.X :: AD \times HK \times MG. AB \times MN \times HG$. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de la part. I. (en composant) que $V. V \rightarrow Y :: AD \times GK \times MG. AD \times GK \times MG \rightarrow GH \times AB \times NG.$ Or (*Th. 28. Corol. 2. nomb. 2.*) $A. V :: AC \times GH. AD \times GK.$ Donc (en multipliant par ordre) $A. V \rightarrow Y :: AC \times GH \times MG. AD \times GK \times MG \rightarrow GH \times AB \times NG.$ c'est-à-dire , en general , quel que soit la direction AC du poids quelconque EOQF, sa pesanteur (A) est toujours en cette raison à la charge entiere ($V \rightarrow Y$), qui de sa pression sur les surfaces SV, XY, résulte au plan horisontal NK de leurs bases GK, GN, ou à ces deux bases ensemble.

COROLLAIRE II.

Or si l'on suppose (comme dans le précédent Th. 30.) que la direction AC du poids EOQF soit parallele aux verticales HK, MN; les triangles (*Hyp.*) rectangles HKG, DδA, BβC, se trouvant alors semblables entr'eux, de même que les triangles (*Hyp.*) rectangles MNG, BβA, DδC; l'on aura ici $AD. A\delta :: HG. GK.$ Et $AB. A\beta :: MG. NG.$ D'où résulte $AD \times GK = A\delta \times HG,$ & $AB \times NG = A\beta \times MG.$ Donc en substituant ces valeurs de $AD \times GK,$ $AB \times NG,$ dans la dernière analogie du précédent Cor. I. l'on aura ici $A. V \rightarrow Y :: AC \times GH \times MG. A\delta \times GH \times MG \rightarrow GH \times A\beta \times MG :: AC. A\delta \rightarrow A\beta$ (les triangles semblables BβA, DδC, auxquels le parallelogramme ABCD donne $AB = CD,$ ayant consequemment aussi $A\beta = C\delta$) $:: AC. A\delta \rightarrow C\delta :: AC. AC :: 1. 1.$ c'est-à-dire, qu'en ce cas de la direction AC du poids EOQF, perpendiculaire à NK, la charge entiere ($V \rightarrow Y$) de ce plan NK des bases GK, GN, des surfaces SV, XY, est toujours égale à la pesanteur (A) de ce poids EOQF que ces deux surfaces seules soutiennent ensemble entr'elles, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le Corollaire du précédent Th. 30.

COROLLAIRE III.

Cette hypothese de AC perpendiculaire sur NK, aussi-

bien que HK, MN, en rendant les triangles HKG, DMA, semblables entr'eux, aussi-bien que les triangles MNG, BBA, ne rend pas seulement $AD \times GK = A^d \times GH$, & $AB \times NG = A\beta \times MG$, ainsi qu'on le vient de trouver dans le précédent Cor. 2. mais elle rend de plus $AD. D^d :: HG. HK$. Et $AB. B\beta :: MG. MN$. D'où résulte aussi $AD \times HK = D^d \times HG$, & $AB \times MN = B\beta \times MG$. Donc en substituant ces quatre valeurs de $AD \times GK$, $AB \times NG$, $AD \times HK$, $AB \times MN$, dans les part. 1. 2.

1°. La part. 1. donnera ici $V. Y :: AD \times GK \times MG. HG \times AB \times NG :: A^d \times HG \times MG. A\beta \times HG \times MG :: A^d. A\beta$ (à cause de $A\beta = C^d$) $:: A^d. C^d$, c'est-à-dire, que les charges particulieres (V, Y,) des bases GK, GN, auxquelles ces charges résultent de celles (O, Q,) des surfaces SV, XY, qui soutiennent entr'elles le poids EOQF, doivent être ici entr'elles comme les parties correspondantes A^d , C^d , de la diagonale AC du parallelogramme ABCD, ainsi qu'on l'a déjà vû dans la part. 1. du précédent Théoreme 30.

2°. La part. 2. donnera pareillement $S. X :: AD \times HK \times MG. AB \times MN \times HG :: D^d \times HG \times MG. B\beta \times HG \times MG :: D^d. B\beta$ (les triangles semblables BBA, DDC, auxquels le parallelogramme ABCD donne $AB = CD$, ayant conséquemment aussi $D^d = B\beta$) $:: D^d. D^d :: 1. 1$. c'est-à-dire, qu'en ce cas les charges ou impressions horisontales directement contraires aux plans verticaux HK, MN, ou à leurs résistances, seroient égales entr'elles, ainsi qu'on l'a déjà vû dans la part. 2. du précédent Th. 30.

T H E O R E M E X X X I I.

Soient deux Roues, une grande quelconque CO, & une petite aussi quelconque DO, chargées sur leurs Essieux A, B, de fardeaux, qui avec les pesanteurs particulieres de ces Roues, fassent des charges ou des poids totaux quelconques appellez K pour la grande Roue, & L pour la petite; avec lesquels poids K, L, dirigez, à volonté suivant AK, BL, ces deux Roues

Fig. 235.
& suivantes
jusqu'à 242.

Soient sur le même point O d'une élévation MO de chemin MON , qu'elles aient à surmonter; sur lequel point O elles soient retenues par l'inégalité du chemin, qui l'empêche de glisser, ainsi qu'on verra dans le Schol. art. 3. qu'il pourroit arriver, & par les puissances P, R , appliquées aux Effieux, ou aux centres A, B , de ces Roues, suivant des directions quelconques AP, BR , qui les empêchent de rouler dans le fond OM .

Cela étant, si après avoir imaginé EO, OG , parallèles à AK, BL , & qui rencontrent AP, BR , en E, G , l'on imagine aussi OF, OH , qui fassent avec AK, BL , des angles $OFA = EAO, OHB = GBO$: je dis que les puissances P, R , ainsi en équilibre avec les charges K, L , des Roues CO, DO , sur le point O de l'éminence à surmonter du chemin MON , seront entr'elles comme les produits $K \times OF \times OB, L \times OH \times OA$: c'est-à-dire, $P. R. :: K \times OF \times OB. L \times OH \times OA$.

DEMONSTRATION.

Puisque (Hyp.) OE est parallèle à AK & OG parallèle à BL , l'on aura ici les angles $OAF = EOA, OBH = GOB$. Donc ayant aussi (Hyp.) les angles $OFA = EAO, OHB = GBO$, l'on aura ici les deux triangles AFO, OAE , semblables entr'eux, & les deux autres BAO, OBG , semblables aussi entr'eux. Par conséquent $OF. OA :: EA. EO$. Et $OH. OB :: GB. GO$. Donc le Corol. 7. du Th. 26. donnant ici de plus $P. K :: EA. EO$. Et $R. L :: GB. GO$. l'on y aura aussi $P. K :: OF. OA$. Et $R. L :: OH. OB$. Ce

qui donne $P = \frac{K \times OF}{OA}$, & $R = \frac{L \times OH}{OB}$. Donc $P. R. :: \frac{K \times OF}{OA}$

$\frac{L \times OH}{OB} :: K \times OF \times OB. L \times OH \times OA$. Ce qu'il falloit démon-
trer.

COROLLAIRE I.

Si presentement on suppose à l'ordinaire les directions AK, BL , des poids K, L , parallèles entr'elles, & de plus les angles quelconques EAO, GBO , égaux entr'eux;

Fig. 220.

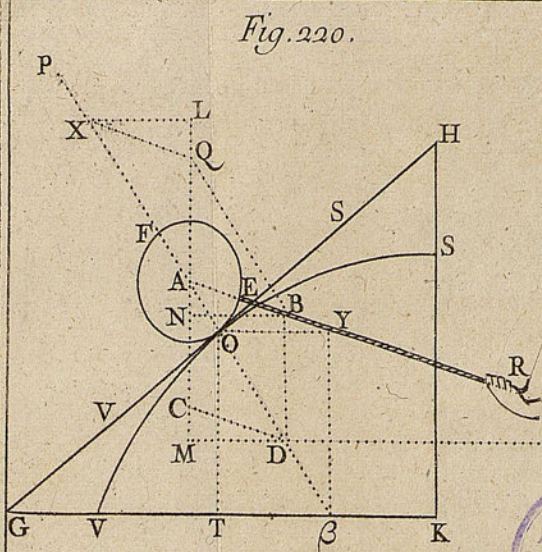


Fig. 221.

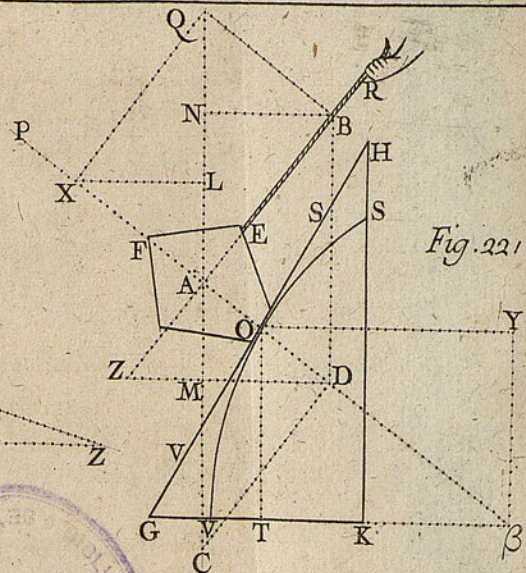


Fig. 224.

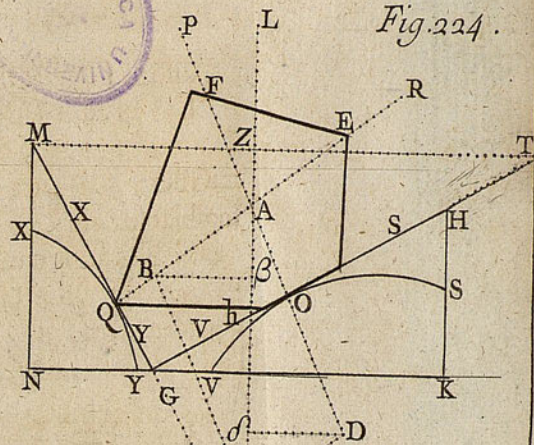


Fig. 222.

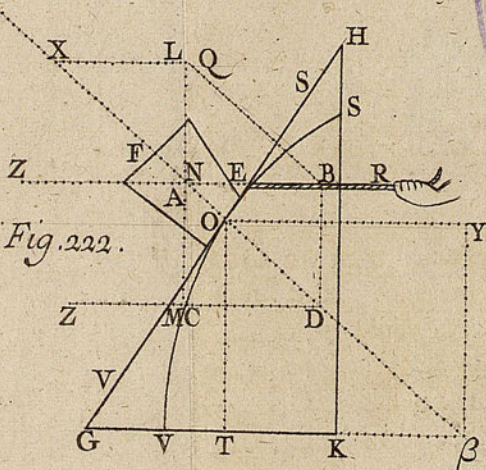


Fig. 223.

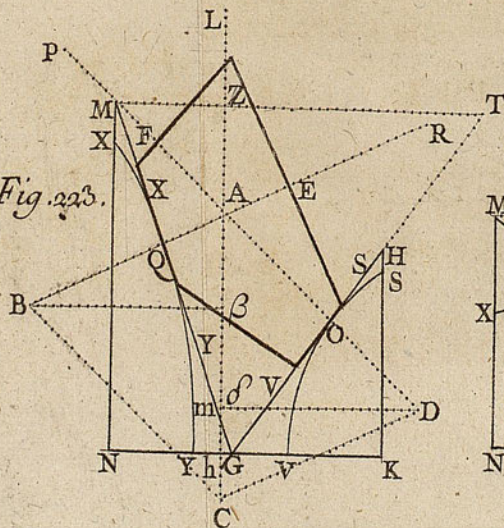
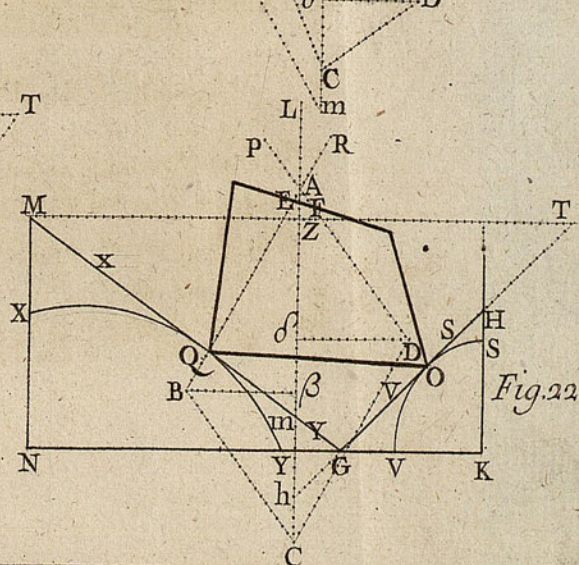


Fig. 225



cette double hypothese faisant tomber OG en OT sur EO, & OH en OS sur OF, comme dans les Fig. 237. 238. 239. l'on aura ici $OF.OH :: OF.OS$ (à cause de AK supposée parallèle à BL, qui prolongée rencontre AO en Q) $:: OA.OQ$. Ce qui donnant $OF \times OQ = OH \times OA$, change ici l'analogie du Théoreme en P. R. $:: K \times OF \times OB. L \times OF \times OQ :: K \times OB. L \times OQ$.

C O R O L L A I R E II.

Si de plus on suppose les deux directions AK, BL, des poids K, L, confondues en une, comme dans la Fig. 239. cette addition d'hypothese faite à la précédente du Corol. 1. rendant Q en A, & H, S en F, donne $OQ = OA$, & OH ou $OS = OF$; ce qui change encore l'analogie generale du Théoreme en P. R. $:: K \times OB. L \times AO$. de sorte que si les charges K, L, des Roues étoient en raison réciproque de leurs rayons OA, OB; les puissances P, R, seroient ici égales entr'elles.

Fig. 239.

C O R O L L A I R E III.

Si outre les directions AK, BL, des poids KL, confondues en une, on veut presentement que les angles EAO, GBO, soient complemens l'un de l'autre à deux droits, le tout comme dans la Fig. 240. la premiere de ces deux hypotheses rendant H, F, B, sur cette direction commune AK ou BL, & la seconde rendant les angles AFO, BHO, complemens l'un de l'autre à deux droits, puisque le Théoreme suppose $AFO = EAO$, $BHO = GBO$; l'on aura ici les angles OFH, OHF, égaux entr'eux, & conséquemment $OH = OF$. Donc l'égalité generale du Théoreme se réduira encore ici à P. R. $:: K \times OB. L \times AO$. comme dans le précédent Corol. 2. ce qui fait voir comme là, que si les charges K, L, des Roues étoient en raison réciproque de leurs rayons OA, OB, les puissances P, R, seroient encore ici égales entr'elles.

Fig. 240.

COROLLAIRE I V.

FIG. 242. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Corol. 1. qui a donné $P.R :: K \times OB. L \times OQ$. si l'on y suppose de plus que OB soit sur OA, comme dans la Fig. 242. le point B y tombant en Q, l'on auroit alors $OB = OQ$; ce qui y réduiroit l'analogie de ce Corol. 1. à $P.R :: K.L$. c'est-à-dire, qu'en ce cas les puissances P, R, qui (*Hyp.*) soutiennent les Roues CO, DO, sur le point O de la pente OM, feroient entr'elles en raison des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE V.

FIG. 235. & suivantes jusqu'à 242. Si presentement on suppose que ces charges K, L, des Roues CO, DO, c'est-à-dire, les sommes faites des pesanteurs de ces Roues, & des fardeaux qu'elles portent: si l'on suppose, dis-je, presentement que ces charges ou sommes de pesanteurs soient égales entr'elles;

1°. Cette hypothese de $K=L$ changeroit l'analogie generale du present Th. 32. en $P.R :: OF \times OB. DH \times OA$.

FIG. 237. 238. 242. 2°. Cette hypothese de $K=L$, jointe à celle du Corol. 1. changeroit son analogie en $P.R :: OB. OQ$.

FIG. 239. 241. 3°. Cette même hypothese de $K=L$, jointe à celle de chacun des Corol. 2. 3. changeroit aussi chacune de leurs analogies en $P.R :: OB. OA$. c'est-à-dire, qu'alors les puissances P, R, feroient entr'elles en raison réciproque des rayons des Roues qu'elles soutiennent avec leurs fardeaux.

FIG. 242. 4°. Cette même hypothese de $K=L$, jointe à celle du Corol. 4. y rendroit aussi $P=R$.

Voilà jusqu'ici pour le rapport des puissances P, R, qui soutiennent les Roues CO, DO, sur le point O de la pente OM: voici presentement pour le rapport des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE V I.

FIG. 235. La multiplication des termes entr'eux de l'analogie generale

generale du present Th. 3 2. donnant en general $P \times L \times OH \times OA = R \times K \times OF \times OB$, l'on aura aussi en general $K. L :: P \times OH \times OA. R \times OF \times OB$. Donc, & suivantes jusqu'à 242.

1°. L'hypothese du Corol. 1. donnant $OH \times OA = OF \times OQ$, l'on y aura $K. L :: P \times OF \times OQ. R \times OF \times OB :: P \times OQ. R \times OB$. FIG. 237. 238. 242.

2°. L'hypothese du Corol. 2. rendant $OQ = OA$, l'on y aura $K. L :: P \times OA. R \times OB$. c'est-à-dire, les charges K, L , des Roues CO, DO , en raison composée de celle de leurs rayons OA, OB , & de celles des puissances P, R , qui les soutiennent sur le point O de la pente OM . FIG. 239.

3°. L'hypothese du Corol. 3. rendant $OH = OF$, l'on y aura encore $K. L :: P \times OA. R \times OB$. comme dans le précédent nomb. 2. FIG. 240.

4°. L'hypothese du Corol. 4. rendant $OB = OQ$, outre $OA. OQ :: OF. OH$. ce qui donne $OA \times OH = OQ \times OF = OB \times OF$, change également la précédente analogie generale, & celle du nomb. 1. en $K. L :: P. R$. ainsi que dans ce Corol. 4. FIG. 242.

COROLLAIRE VII.

Si presentement on suppose les puissances P, R , égales entr'elles, c'est-à-dire, $P = R$, FIG. 235. & suivantes jusqu'à 242.

1°. L'analogie generale du précédent Corol. 6. se changera pour ici en $K. L :: OH \times OA. OF \times OB$.

2°. Celle du nomb. 1. de ce Corol. 6. se changera en $K. L :: OQ. OB$. FIG. 237. 238. 242.

3°. Celle des nomb. 2. 3. de ce Corol. 6. se changera en $K. L :: OA. OB$. c'est-à-dire, qu'alors les charges K, L , des Roues CO, DO , seront entr'elles comme les rayons de ces mêmes Roues. FIG. 239.

4°. Le nomb. 4. du même Corol. 6. donnera $K = L$. FIG. 242.

SCHOLIE.

I. Pour juger de l'avantage ou du desavantage des Roues CO, DO , de differentes grandeurs dans l'usage, supposons aux puissances P, R , qui les soutiennent, des dire- FIG. 237. & suivantes jusqu'à 242.

ctions AP, BR, qui fassent des angles égaux PAO, RBO, avec les rayons AO, BO, sur le bout O desquels ces deux Roues sont appuyées, ainsi que dans les Fig. 237. 238. 239. 242. supposons-y de plus ces Roues chargées sur leurs Effieux A, B, de fardeaux, qui avec les pesanteurs de ces Roues leur fassent des charges égales K, L, lesquelles aient leurs directions AK, BL, paralleles entre-elles. Cela étant,

Fig. 237.
238.

1°. Lorsque ces deux Roues CO, DO, seront inégalement élevées sur le même point O d'une pente OM; en sorte que les directions paralleles AK, BL, de leurs charges soient différentes verticales, comme dans les Fig. 237. 238. Ce cas rendant (Cor. 5. nomb. 2.) $P.R.::OB.OQ$. Et conséquemment $P > R$ dans la Fig. 237. qui a $OB > OQ$; & au contraire $P < R$ dans la Fig. 238. qui a $OB < OQ$: ce cas, dis-je, fait voir que lorsque la petite Roue DO est plus avancée que la grande DO sur le point O, comme dans la Fig. 237. il faut une plus grande force (P) pour soutenir celle-ci, que (R) pour soutenir l'autre; & qu'au contraire il la faut moindre lorsque la petite Roue est moins avancée que la grande sur le point O, comme dans la Fig. 238.

Fig. 239.

2°. Lorsque les directions AK, BL, des charges K, L, de ces deux Roues CO, DO, inégalement avancées sur le point O, se confondent en une même verticale, comme dans la Fig. 239. Ce cas rendant (Corol. 5. nomb. 3.) $P.R.::OB.OA$. c'est-à-dire, les puissances P, R, entr'elles en raison réciproque des rayons OA, OB, des Roues CO, DO, qu'elles soutiennent, on voit qu'en ce cas il faut toujours moins de force pour soutenir la même charge avec la grande Roue CO qu'avec la petite DO.

Fig. 242.

3°. Enfin lorsque ces deux Roues sont également avancées sur le point O, en sorte que leurs rayons AO, BO, se confondent ensemble, comme dans la Fig. 242. Ce cas rendant (Cor. 5. nomb. 3.) $P=R$, on voit qu'alors ces puissances P, R, qui soutiendroient ces deux Roues sur le point O, seroient égales entr'elles.

II. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent art. 1. cet art. 1. faisant voir que lorsque les Roues CO, DO, sont inégalement avancées sur le point O, il peut également arriver (*art. 1. nomb. 1.*) qu'il faille tantôt plus & tantôt moins de force pour y soutenir la grande Roue CO, que pour y soutenir la petite DO, tant que les directions AK, BL, de leurs charges (*Hyp.*) égales K, L, sont des verticales différentes, comme dans les Fig. 237. 238. qu'au contraire il en faut toujours moins (*art. 1. nomb. 1.*) pour y soutenir la grande Roue CO, que pour y soutenir la petite DO, lorsque les directions de leurs charges (*Hyp.*) égales, se confondent en une seule & même verticale, comme dans la Fig. 239. Et qu'enfin lorsque ces deux Roues sont également avancées sur ce point O, comme dans la Fig. 242. les forces P, R, requises pour les y soutenir sont (*art. 1. n. 3.*) toujours égales entr'elles : vû (dis-je) tout cela, il paroît qu'il y a un plus grand nombre de cas où il faut moins de force pour soutenir ici la grande Roue CO sur le point O de la pente OM, que pour y soutenir la petite Roue DO, qu'il n'y en a où la grande exige pour cela moins ou autant de force que la petite. Donc la moindre augmentation de force qu'on fasse aux puissances P, R, ici en équilibre (*Hyp.*) avec ces deux Roues de leurs charges totales (*Hyp.*) égales, suffisant pour les faire rouler de O vers N, il y a plus de cas où il faudra moins de force à la puissance P pour faire rouler ainsi la grande Roue CO, qu'à la puissance R pour faire rouler de même la petite DO, qu'il n'y en a où il en faudroit à celle-là autant ou moins qu'à celle-ci. Par conséquent il est plus avantageux du côté des forces, de se servir de grandes Roues que de petites, à moins que l'incommodité de s'en servir ne contrebalançât ou ne surpassât cet avantage, lequel est encore augmenté dans les chemins fort inégaux, dont les petites buttes ou éminences sont par rapport à une petite Roue, comme autant de plans ou surfaces inclinées, par dessus lesquelles cette Roue doit monter ; au lieu que la grande Roue les touche seu-

FIG. 237.
238. 239.
242.

lement par leurs sommets, & qu'elle peut passer facilement par dessus, faute de pouvoir entrer, comme la petite, dans une infinité de petits creux ou profondeurs qui en résultent à ces chemins inégaux ou raboteux, qui le sont ainsi plus pour la petite Roue que pour la grande.

Tel est l'avantage des grandes Roues sur les petites dans les conditions de l'art. 1. Pour dans d'autres conditions il pourroit arriver plusieurs varietez aux rapports des forces P, R , lesquelles varietez se détermineront de même par le présent Th. 32. joint au Th. 26. & à ses Corollaires.

FIG. 235.
& suivantes
jusqu'à 242.

III. Au reste, il est à remarquer, suivant les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & suivant la part. 1. du Th. 26. que pour l'équilibre qu'on vient de supposer dans le présent Th. 32. entre chacune des puissances P, R , & chacune des Roues CO, DO , chargées en leurs Essieux ou centres A, B , de fardeaux ou poids K, L ; les rayons AO, BO , sur lesquels ces deux Roues s'appuyent, devroient être perpendiculaires en O aux surfaces MON , sur lesquelles ces rayons, eux-mêmes, sont appuyez, si ces surfaces étoient mathématiquement polies. Mais l'âpreté & les inégalitez tant des circonférences de ces Roues, que du terrain sur lequel on les suppose, les y accrochent assez pour les y empêcher de glisser, comme il leur arriveroit (*Lem. 3. Cor. 8. 9.*) faute de cette perpendicularité, qui ne peut être à la fois pour ces deux rayons AO, BO , appuyez sur un même point O de la surface MON , tant qu'ils ne se confondent pas en une même ligne droite, comme dans la Fig. 242. On se peut passer même de cet accrochement dans tous les autres cas des Fig. 235. 236. 237. 238. 239. 240. en supposant ces deux rayons AO, BO , perpendiculaires à une surface en deux points O (chacun en chacun) assez voisins pour pouvoir passer sensiblement pour le même, & pour ne pas s'éloigner sensiblement non plus de la rigueur mathématique, suivant laquelle le tout vient d'être considéré.

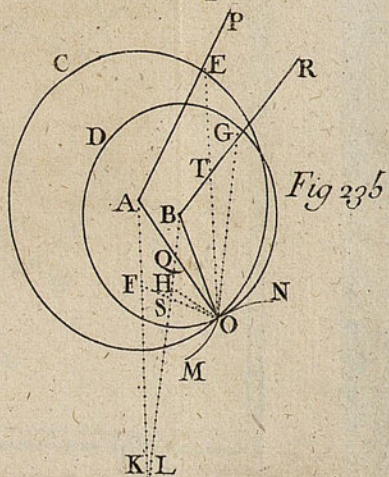
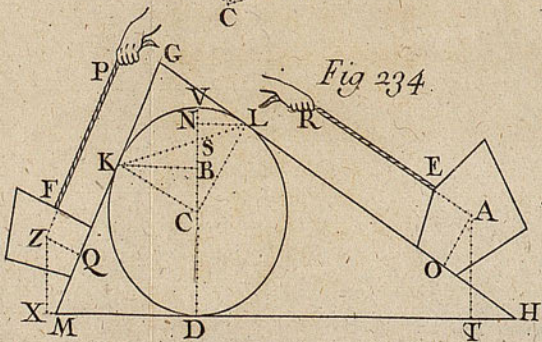
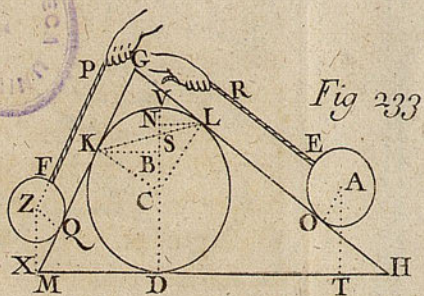
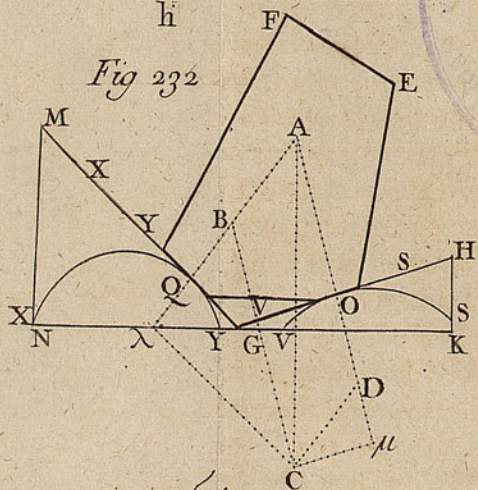
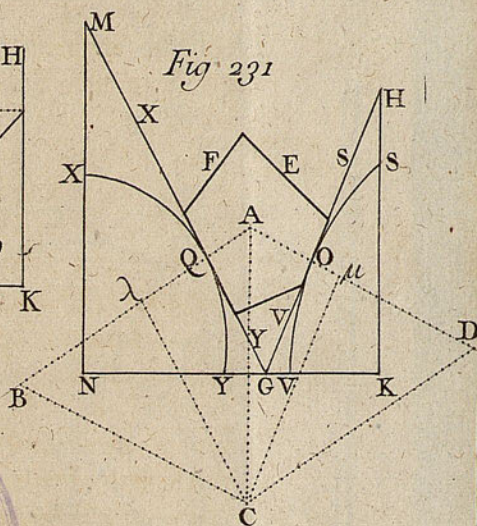
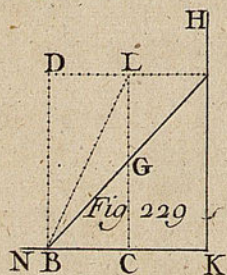
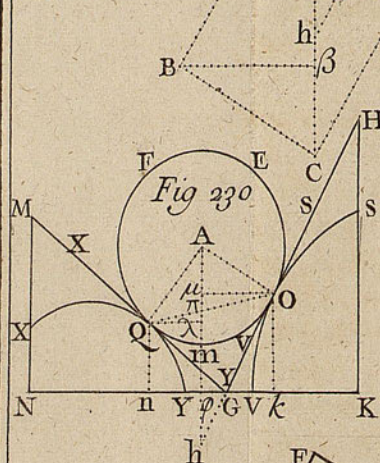
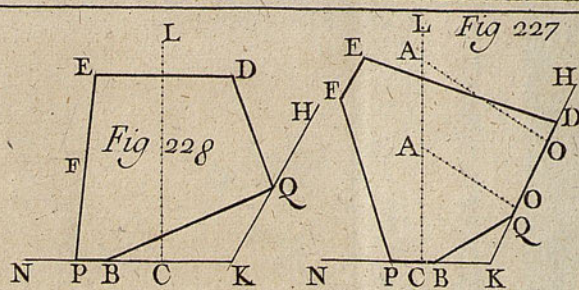
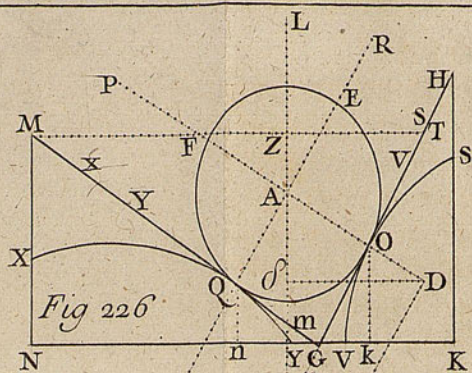


Fig 236

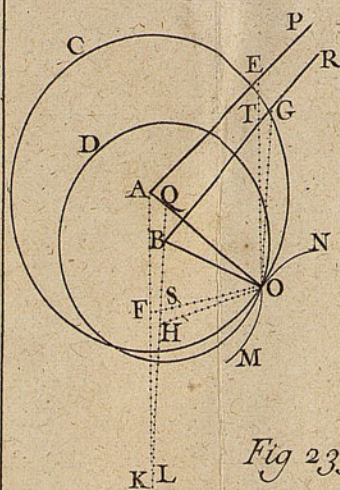


Fig 237

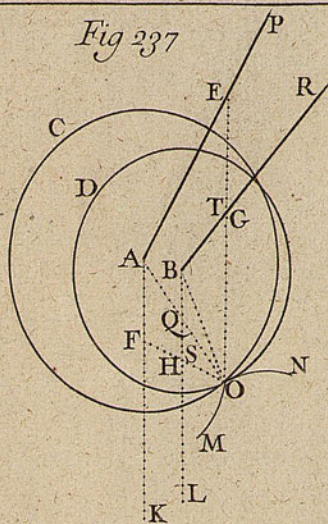


Fig 238

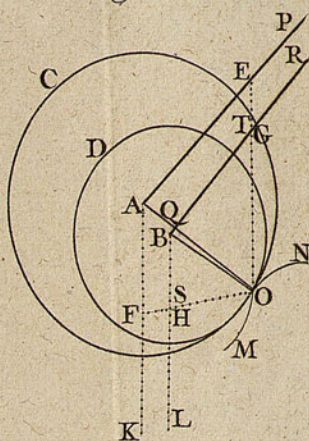


Fig 239

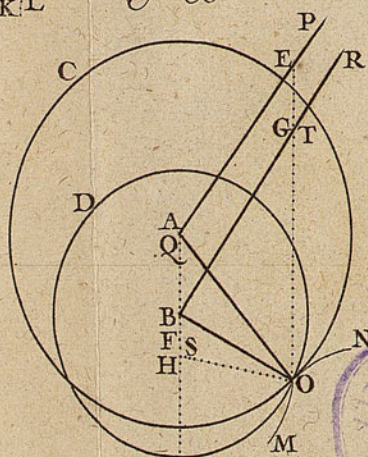


Fig 240

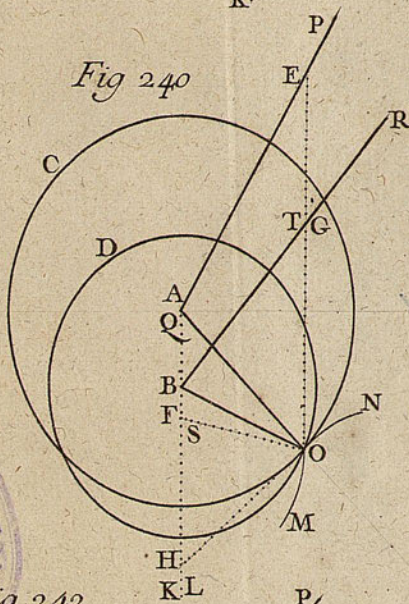


Fig 241

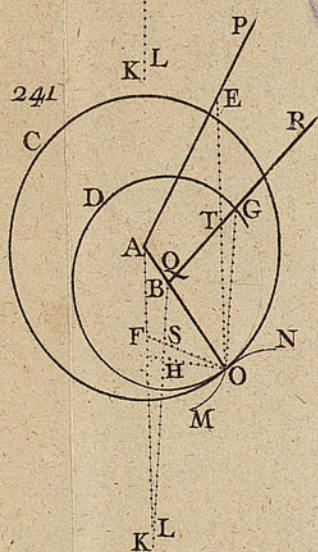
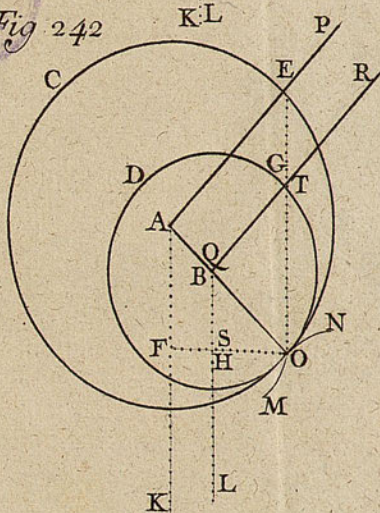


Fig 242





S E C T I O N V I I.

De la Vis.

D E F I N I T I O N X X V I I I.

LA *Vis* est un cylindre droit , creusé exterieurement en spirale , qui forme en relief comme un cordon spiralement entortillé autour d'un autre cylindre droit restant de celui-là , moins gros que lui de deux fois la grosseur de ce cordon spiral par tout également incliné sur la longueur de ce moindre cylindre , appelé *le cylindre de la Vis* , autour duquel ce cordon est ainsi tellement entortillé , que les tours de ce cordon sont tous également distans entr'eux , comme si ce cordon (à son relief près) étoit l'hypoténuse d'un triangle rectangle rectiligne , qui de hauteur parallèle & égale à celle du cylindre de la *Vis* , seroit roulé autour de ce cylindre , autour de la base duquel seroit roulée celle de ce triangle ; ou comme si ce cordon (encore à son relief près) étoit sur le cylindre de la *Vis* , la trace d'un point uniformement mû le long d'une ligne droite , mûe aussi d'un mouvement uniforme quelconque autour de la base de ce cylindre parallèlement à son axe. La distance de chacun des tours à son voisin de la spirale ainsi tracée autour de ce cylindre , prise suivant la longueur de ce cylindre ou de la *Vis* , est ce qu'on appelle le *Pas* de cette *Vis* , laquelle a pour axe celui de ce cylindre.

Cette *Vis* entre dans un trou de pareille grosseur d'un autre corps , appelé *Ecroue* , creusé interieurement en demi-canal spiral propre à recevoir exactement le cordon de la *Vis* , lequel s'y engage en la tournant , ou en tournant son *Ecroue* d'un certain sens , & s'en dégage en tournant l'un ou l'autre de ces deux corps en sens contraire , un des deux demeurant immobile ou fixe pendant

que l'autre tourne de chacune de ces deux manieres. Celui de ces deux corps qui entre ainsi ou sort de l'autre, est (dis-je) ce qu'on appelle la *Vis*, l'autre en est appelé l'*Ecroue*; chaque tour du cordon de la *Vis* s'appelle *Spire* ou *Helice*.

Tout cela est si connu, que je n'ai pas crû le devoir expliquer sur des figures, qui peut-être l'auroient rendu moins clair par la difficulté d'y marquer sensiblement le relief du cordon spiral de la Vis, & le creux du canal spiral de son Ecroue.

REMARQUES.

I. On se sert de la *Vis* pour comprimer, pour écraser ou briser, pour pousser ou repousser, pour attirer, en un mot pour surmonter avec force des obstacles de quelque une de ces manieres. D'où l'on voit que tout l'usage de la *Vis* est de tirer ou de pousser suivant la direction de son axe, c'est-à-dire, de l'axe de son cylindre, tout ce qui lui fait quelque résistance; de sorte que si elle est fixe, la force ou l'obstacle contre lequel on s'en sert, doit tirer ou presser l'*Ecroue* de cette *Vis* vers le côté opposé à celui vers lequel cette *Ecroue*, en tournant, force cet obstacle d'avancer: au contraire, si c'est l'*Ecroue* qui soit fixe, cette force ou cet obstacle doit tirer ou presser la *Vis*, elle même vers le côté opposé à celui vers lequel cette *Vis*, en tournant, le force d'avancer. C'est ce qui fait regarder d'ordinaire la charge de la *Vis*, ou de son *Ecroue*, comme d'une direction parallele à son axe.

II. Suivant cela, dans l'usage de la *Vis*, lorsqu'elle est fixe, l'on doit regarder tous les points de son *Ecroue*, comme tirez ou pressés parallelement entr'eux vers le côté vers lequel cette *Ecroue* est pressée ou tirée par la force ou par le poids dont elle est chargée, & que l'on appellera sa *charge*, differente de ce qu'on a ainsi appelé (*Def. 16.*) par rapport aux surfaces inclinées, dont cette charge-ci exprime le poids soutenu sur elles.

III. On voit de-là que les lignes de direction de tous ces points de l'*Ecroue*, sont toutes obliques au cordon de

cette Vis aux points où ceux-là le touchent & s'appuyent sur lui. Par conséquent (*Lem. 3. Corol. 7. 8.*) si cette Vis & son Ecroue étoient mathématiquement justes, chacun des points de cette Ecroue tendroit à couler du côté que sa ligne de direction s'écarteroit de la perpendiculaire menée de lui à la partie du cordon, qui lui sert de plan incliné : & parce que cet écartement se feroit du même côté pour tous ces points de l'Ecroue, à cause du parallélisme (*art. 2.*) de toutes leurs lignes de direction, & de la pente uniforme (*Déf. 28.*) du cordon de cette Vis dans toute sa longueur ; il suit évidemment que tous ces points de l'Ecroue devroient s'accorder dans un même mouvement, qui emportât de ce côté-là cette Ecroue suivant le fil de ce cordon, c'est-à-dire, en tournoyant du côté de cet écartement, si dans son frottement avec la Vis l'inégalité de leurs parties ne les accrochoit point ensemble.

I V. La même chose se doit entendre de la Vis, si c'est l'Ecroue qui soit fixe.

V. Ainsi à regarder l'un & l'autre dans une justesse mathématique, il faut nécessairement quelque force pour retenir celle des deux qui est mobile, contre l'impression de la force ou du poids qui la charge : la voici cette force supposée à l'ordinaire d'une direction perpendiculaire à un Levier droit, qui passe par l'axe de la Vis, & avec lequel Levier cette direction est dans un plan perpendiculaire à cet axe, auquel on suppose aussi d'ordinaire que la direction de la charge de la Vis ou de son Ecroue est toujours parallèle.

T H E O R E M E X X X I I I .

Dans cette hypothèse ordinaire du précédent art. 5. je dis que lorsqu'une puissance soutient quelque poids, ou l'action de quelque autre force, à l'aide d'une Vis, soit que cette Vis soit fixe, ou que ce soit son Ecroue : cette puissance est toujours à ce poids ou à cette force (quelle qu'elle soit) comme un pas de cette Vis est à la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à la distance qui est entre cette puissance & l'axe de cette même Vis.

DEMONSTRATION.

FIG. 243.

I. Premièrement, si la Vis VXYZ est fixe, concevons que le point A de son Ecroute PQ soit retenu sur la partie GH de son cordon par quelque puissance R, dont la direction AB soit dans le plan de cette Ecroute, & perpendiculaire à EP, qui y est aussi, & qui passant par le point A, passe aussi en E par l'axe MS de la Vis.

Il est clair que cette puissance R retenant par ce moyen toute l'Ecroute PQ, ce point A de cette Ecroute fait sur cette puissance la même impression que s'il soutenoit lui seul toute l'action du poids ou de la force, quelle qu'elle soit, qui pousse ou qui tire cette Ecroute (*Remarg. 1. 5.*) vers ZY parallèlement à l'axe MS de cette Vis. Ainsi le point A de cette Ecroute peut être regardé comme ayant lui seul suivant AC perpendiculaire au plan de cette Ecroute, & parallèle à MS, toute l'impression que cette Ecroute reçoit de sa charge: de sorte que si l'on fait AD perpendiculaire à la partie GH du cordon de cette Vis, & que de quelque point D de cette ligne l'on acheve le parallélogramme BACD; l'on verra (*Th. 26. Corol. 6.*) que la puissance R sera à la charge de l'Ecroute PQ, c'est-à-dire (*Remarg. art. 2.*) au poids, à la force, ou à la résistance qu'elle soutient, comme AB est à AC, ou à son égale BD; c'est-à-dire (à cause que le triangle HFG roule sur la Vis VXYZ, est semblable au triangle ABD) comme HF à la demi-circonférence FG de cette Vis, ou comme $2 \times HF$ ou HK est à cette circonférence entière. Or regardant la droite EAP comme un Levier dont l'appui est le point E de l'axe MS de cette Vis, & qui se trouve (*Hyp.*) dans le plan de son Ecroute; la puissance P (qu'on suppose aussi dans ce même plan, dirigée suivant lui perpendiculairement à EP, & parallèlement à AB supposée aussi perpendiculaire à EP) soutenant ainsi (*Hyp.*) le point A, ou la charge de l'Ecroute PQ au lieu de la puissance R, est à cette autre puissance R (*Th. 21. Cor. 2. 9.*) comme EA est à EP, ou comme la circonférence entière de

de cette Vis qui a EA pour rayon, est à la circonference entiere d'un cercle dont le rayon seroit EP. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura la puissance P à la charge de l'Ecroute PQ, comme HK (qui est un des pas de la Vis) est à la circonference d'un cercle dont le rayon seroit égal à la distance EP de cette puissance P à l'axe MS de la Vis. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

II. Secondement, si c'est l'Ecroute PQ qui soit fixe, concevons que le point A appartient à la Vis VXYZ, c'est-à-dire, à son cordon, & qu'il est retenu (comme sur un plan incliné) dans le canal spiral AO de cette Ecroute PQ par quelque puissance R, dont la direction soit encore suivant AB supposée dans le plan de cette Ecroute, & perpendiculaire à EP qu'on y suppose aussi.

Il est encore évident que cette puissance R retenant par ce moyen toute la Vis VXYZ, ce point A fait encore sur elle la même impression suivant AC parallèle à MS, que s'il soutenoit seul toute l'action de ce qui (*Remarq. 1. 5.*) pousse ou tire cette Vis vers ZY. Donc par la même raison que ci-dessus (*art. 1.*) la puissance R fera encore ici à la charge de cette Vis, comme AB est à BD, c'est-à-dire, comme HF à FG, ou comme HK à la circonference entiere de cette Vis; & la puissance T, qui au lieu de la puissance R retient cette même Vis, est aussi à cette puissance R (*Th. 2. 1. Corol. 2. 9.*) comme EA à ST, ou comme cette circonference entiere de la Vis est à la circonference entiere d'un cercle qui auroit ST pour rayon. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura encore la puissance T à la charge de cette Vis, comme HK (qui est un des pas de la même Vis) est à la circonference entiere d'un cercle, dont le rayon seroit égal à la distance ST de la puissance T à l'axe MS de cette Vis. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

III. Donc (*art. 1. 2.*) lorsqu'une puissance soutient un poids, ou l'action de quelqu'autre force que ce soit, à l'aide d'une Vis, soit que cette Vis soit fixe, ou que ce

soit son Ecroue ; cette puissance est toujours à ce poids , ou à cette force , comme un des pas de cette Vis est à la circonference entiere d'un cercle qui auroit pour rayon la distance de cette puissance à l'axe de cette même Vis. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

On voit de-là que pour peu que la raison d'une puissance à un poids , ou à quelqu'autre force , surpasse celle d'un des pas d'une Vis , à la circonference d'un cercle qui auroit pour rayon la distance de cette puissance à l'axe de cette Vis ; cette puissance ainsi appliquée à cette Vis , pourra par le moyen de cette machine surmonter la résistance de ce poids ou de cette force , & ce d'autant plus aisément que cette raison sera plus grande.

C O R O L L A I R E II.

D'où il suit que plus les pas d'une Vis seront petits , ou que les tours de son cordon spiral seront plus serrez , & que la distance de son axe à la puissance qui est appliquée , sera plus grande , plus il sera facile à cette puissance de surmonter le poids ou la force qui agit contr'elle.

C O R O L L A I R E III.

Il suit encore de ce Théoreme-ci qu'une même puissance peut également mouvoir un même poids , ou surmonter une même force ou résistance , à l'aide d'une même Vis , soit qu'on suppose cette puissance appliquée à cette Vis , ou à son Ecroue ; pourvû qu'elle soit également distante de l'axe de cette Vis dans l'un & dans l'autre cas.

L'obstacle que le frottement de la Vis avec son Ecroue fait au mouvement de l'une des deux par rapport à l'autre , doit être compté comme faisant partie de sa charge : c'est ainsi qu'on peut réduire cette machine , de même que toute autre , à une juste mathématique.

A V E R T I S S E M E N T.

Dans le précédent Th. 33. on vient de faire les trois suppositions qu'on fait d'ordinaire dans l'examen des propriétés de la Vis: ſçavoir,

1°. Que la direction de la puissance appliquée à cette machine, est dans un plan perpendiculaire à son axe.

2°. Que cette direction de la puissance est aussi perpendiculaire à la droite menée ou imaginée dans ce plan, du point d'application de la puissance par l'axe de la Vis.

3°. Enfin que la direction de la charge de cette Vis ou de son Ecroue, c'est-à-dire, de ce qui y agit contre la puissance, ou de ce qui lui résiste, est parallèle à cet axe.

Mais depuis le Projet de cette Mécanique-ci, que j'exposai au jugement des Connoisseurs en 1687. & dans lequel je démontrai, comme ci-dessus, le précédent Th. 33. fondé sur ces trois hypothèses ordinaires; ayant remarqué à la campagne pendant les Vendanges, que de plusieurs hommes appliquez aux Leviers, qui servent à faire tourner la Vis de chaque Pressoir, il n'y en avoit presque pas un dont la direction fût dans un plan perpendiculaire à l'axe de cette Vis, ni même perpendiculaire au Levier auquel il étoit appliqué, s'appuyant presque tous sur ces Leviers, & contre tout ce qu'ils pouvoient rencontrer, avec des efforts dirigez de toutes parts, suivant des lignes différemment inclinées à l'horison & à ces Leviers. Cette contrariété aux deux premières des trois suppositions précédentes, me fit repenser à la troisième; & voyant qu'elle peut varier de même en mille manières différentes, comme lorsque la Vis est oblique à l'horison, & que sa charge, ou celle de son Ecroue, est un poids, &c. Je m'avisai enfin de rechercher le tout en general, c'est-à-dire, pour toutes les directions imaginables, tant de la charge de la Vis, ou de son Ecroue, que de la puissance qui lui est appliquée. Voici le tout plus généralement encore que je ne le donnai dans les Memoires de 1709. y ayant perdu de vûe que la direction de la puis-

sance étoit hors du plan de l'Ecroute, ou (plus generale-
ment) hors d'un plan perpendiculaire à l'axe de la Vis,

THEOREME XXXIV.

FIG. 244.

En general pour toutes les directions imaginables de la charge quelconque de la Vis, ou de son Ecroute, & de la puissance qui lui est appliquée, & en équilibre avec cette charge ou résistance: si l'on appelle cette puissance quelconque, R: & cette charge ou résistance aussi quelconque, P, l'on aura toujours $R : P :: 2 \times AC \times PE \times SM \times GM \times TM + O \times EF \times SM \times GM \times TM. O \times SM \times SM \times TD \times PN + 2 \times AC \times GS \times GM \times TM \times PN$ *dont on va déterminer les lignes & les signes dans la démonstration suivante.*

DEMONSTRATION.

I. Soit la Vis VXYZ avec son Ecroute QM & AB un demi-tour de son cordon spiral, qui, lorsque cette Vis est fixe, soutient cette Ecroute ou sa charge; laquelle charge étant par tout la même, c'est-à-dire, de même effort & de même direction quelconques, tant sur ce cordon AB, que sur son point P, peut être considérée comme toute entière en P: c'est pour cela, & pour abréger nos expressions, que cette charge ou résistance entière s'appellera toujours P dans la suite. Si c'est l'Ecroute QM qui soit fixe, P exprimera de même la charge de la Vis, soutenue sur le point P du canal spiral PO de cette Ecroute QM, dans lequel loge ou coule le cordon AB de la Vis. Soit aussi la puissance R appliquée comme l'on voudra à cette Ecroute en M extrémité d'une droite, qui prolongée suivant le plan QM de la même Ecroute, rencontre en D l'axe $\beta\omega$ de la Vis: si c'est cette Vis qui soit fixe, ou qui soit appliquée en M à un tel Levier droit DPM, si c'est l'Ecroute qui le soit; & cela de part & d'autre, soit que la direction RMG de cette puissance R soit ou ne soit pas dans le plan QM de cette Ecroute; ou (plus généralement) dans un plan perpendiculaire à l'axe $\beta\omega$ de la Vis, lequel

passé par le Levier droit DPM, avec lequel il soit imaginé ne faire qu'un tout qui se meuve avec lui; lequel plan (que j'appellerai *Plan du Levier DM*) sera celui de l'Ecroute, lui-même, quand la Vis sera fixe; & quand elle sera mobile, l'Ecroute étant fixe, ce plan sera imaginé comme d'une pièce avec cette Vis & son Levier, pour concevoir sur ce plan imaginaire par rapport à la Vis ainsi mobile avec lui, lorsque l'Ecroute est fixe, ce qu'on va remarquer d'action ou de force de la puissance R & de la charge P sur l'Ecroute QM par rapport à elle, lorsque c'est la Vis qui est fixe: soit aussi que la direction RMG de la puissance R soit perpendiculaire, ou non, à la droite DPM; soit enfin que la direction PN de la charge P de l'Ecroute ou de la Vis, soit ou ne soit pas parallèle à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis.

II. Quelles que soient (dis-je) toutes ces directions, tant de la charge P de la Vis ou de son Ecroute, que de la puissance R appliquée à une des deux; d'un point quelconque de la direction PN de cette charge P, pris du côté de π ; vers lequel cette charge tend, imaginons NF perpendiculaire en F à un plan perpendiculaire en P à la droite DM, lequel plan sera ainsi perpendiculaire au plan MD π , & touchant de la Vis en quelque droite PE parallèle à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, lequel axe $\beta\pi$ étant (*Hyp.*) perpendiculaire à DM; rend cette parallèle PE perpendiculaire aussi à cette même DM, & section commune de ces deux plans: de sorte que si du point F du plan touchant FPE on mène une perpendiculaire à son orthogonal MD π , cette perpendiculaire sera FE, qui rencontrera perpendiculairement en quelque point E cette section commune PE, soit par le point P la droite PL parallèle à FE, & conséquemment perpendiculaire (comme elle) au plan MD π ; & conséquemment aussi perpendiculaire en P à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroute, ou plus généralement dans le plan de ce Levier DM, défini dans

Part. I.

III. Cela fait ou imaginé, le Corol. 7. du Lem. 3. fera

R. iiij.

voir qu'en appellant F ce qu'il résulte d'effort ou d'impression suivant PF de ce que la charge P de la Vis ou de son Ecroue en fait suivant sa direction quelconque PN; E, ce qu'il en résulte suivant PE de cet effort F suivant PF; & enfin L, ce qu'il en résulte aussi suivant EF du même effort F suivant PF; l'on aura $P.F::PN.PF.$ Et $F.E::PF.PE.$ Et $F.L::PF.EF.$ Desquelles analogies (en raison ordonnée) la première avec la seconde donnera $P.E::PN.PE.$ Et la première avec la troisième donnera $P.L::PN.EF.$ De sorte que par le moyen de la

première de ces deux-ci l'on aura $E = \frac{P \times PE}{PN}$ pour ce que

la charge P de la Vis ou de son Ecroue fait d'impression ou de résistance de P vers E suivant PE parallèle (*art. 2.*) à l'axe $\beta\omega$ de cette Vis; & par le moyen de la seconde l'on

aura $L = \frac{P \times EF}{PN}$ pour ce que la même charge absolue P

fait d'impression de E vers F suivant EF perpendiculaire (*art. 2.*) au plan MD ω , ou de P vers L suivant sa parallèle PL perpendiculaire aussi (*art. 2.*) à ce plan & à sa droite DM en P dans le plan QM de ce Levier DM.

IV. Si présentement de quelque point G de la direction prolongée RM de la puissance R, on imagine GS perpendiculaire en S à ce plan QM du Levier DM, duquel point S soit sur ce plan la droite SMH rencontrée en quelque point T par DT perpendiculaire à DM sur ce même plan, sur lequel soit aussi MK perpendiculaire en M à la même DM; le Corol. 7. du Lem. 3. fera voir pareillement ici que l'effort absolu de la puissance R suivant sa direction GMR, est à ce qu'il en résulte suivant SM prolongée vers H, comme GM à SM; & que ce qu'elle en fait ainsi suivant SM, est à ce qu'il en résulte suivant TD ou suivant sa parallèle MK, comme TM est à TD. Donc (en appellant H, K, ces efforts dérivez suivant SH, MK,) l'on aura ici $R.H::GM.SM.$ Et $H.K::TM.TD.$ Ce qui

(en multipliant par ordre) donne ici $R. K :: GM \times TM.$

$SM \times TD.$ D'où résulte $K = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM}$ pour ce que la

puissance R fait d'effort de M vers K suivant MK perpendiculaire (*Hyp.*) comme DT , à la droite DM dans le plan de l'Ecroute QM employé jusqu'ici pour le plan du Levier DM , conformément à l'art. 1. Ce qui est tout ce qui reste de force agissante de cette puissance R pour mouvoir l'Ecroute autour de la Vis fixe, ou la Vis dans l'Ecroute fixe; puis que l'effort que cette puissance fait de plus de G vers S suivant GS perpendiculaire (*Hyp.*) au plan QM de l'Ecroute ou du Levier DM , est employé (*Ax. 3.*) tout entier contre ce plan. Ce qui en augmente ou diminue de la valeur de cet effort suivant GS , la charge de l'Ecroute lorsque la Vis est fixe, ou de la Vis lorsque c'est l'Ecroute qui est fixe: voici comment.

V. Cet effort de G vers S , résultant de la puissance R suivant une direction GS perpendiculaire (*art. 4.*) au plan QM de l'Ecroute ou du Levier DM , & conséquemment parallèle à l'axe $\beta\omega$ de la Vis, étant (dis-je) employé tout entier contre ce plan, le charge ou le soulage de toute sa valeur, selon que le point G , ou la partie GM de la direction de la puissance R , est du côté de β au dessus de ce plan QM du Levier DM , ou au dessous de ce même plan du côté de ω , vers lequel tend (*Hyp.*) la charge absolue P de l'Ecroute ou de la Vis; & conséquem-

ment l'effort $E = \frac{P \times PE}{PN}$, qu'on vient de trouver (*art. 3.*)

résulter de cette charge P à cette Ecroute, ou à cette Vis, de P vers E suivant PE parallèle aussi (*art. 2.*) à l'axe $\beta\omega$ de cette même Vis, doit être augmenté ou diminué de la valeur de cet effort résultant de la puissance R , de G vers S suivant GS , selon que le point G , ou la partie GM de la direction de cette puissance, sera au dessus ou au dessous du plan QM du Levier DM . D'où l'on voit qu'en

appelant S cet effort suivant GS , la charge précise de l'Ecroute ou de la Vis, suivant PE parallele (*art. 2.*) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis sera ici $E + S$ lorsque le point G y sera du côté de β au dessus du plan QM du Levier DM , & $E - S$ lorsque ce point G sera au dessous de ce plan du côté de π .

Or (*Lem. 3. Corol. 7.*) $GM. GS :: R. S = \frac{R \times GS}{GM}$. Donc

ayant déjà (*art. 3.*) $E = \frac{P \times PE}{PN}$, la charge de l'Ecroute QM

ou de la Vis suivant PE , parallele (*art. 2.*) à l'axe $\beta\pi$ de

cette Vis, sera ici $E + S = \frac{P \times PE}{PN} + \frac{R \times GS}{GM}$, lorsque le point

G y sera du côté de β , au dessus du plan QM de l'Ecroute

ou du Levier DM , & $E - S = \frac{P \times PE}{PN} - \frac{R \times GS}{GM}$, lorsque ce

point G sera du côté de π au dessous de ce plan; c'est-à-dire, en general, que la charge précise de l'Ecroute ou de la Vis, de P vers E suivant PE parallele (*art. 2.*) à l'axe $\beta\pi$

de la Vis, sera ici $E \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{GM}$, dont le supe-

rieur du double signe (\pm) sera pour le cas du point G au dessus du plan QM de l'Ecroute ou du Levier DM , & l'inférieur pour le cas où ce point G sera au dessous de ce plan.

V I. Telle est (*art. 5.*) la charge précise de l'Ecroute QM , ou de la Vis $VXYZ$, de P vers E suivant PE parallele (*art. 2.*) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis; & c'est tout ce qui lui en résulte, tant de la part de l'absolue P suivant PN , que de la puissance R suivant GR , le surplus de cette charge absolue P , étant tout employé (*art. 3.*) parallelement au plan QM du Levier DM , contre le plan touchant FPE , & contre son orthogonal $MD\pi$; & la puissance R ne faisant d'impression qui charge ou soulage ce plan QM du Levier DM , que suivant ce qu'on lui en compte

compte ici suivant GS perpendiculaire à ce plan. Quant à la force employée à soutenir cette charge précise (art. 5.)

$$F \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{GM}$$

de la Vis ou de son Ecroue suivant

PE parallèle (art. 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, l'art. 4. vient de faire voir que la force $K = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM}$ de M vers

K suivant MK perpendiculaire à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM, ou du Levier DM, est tout ce qu'il en reste à la puissance R pour soutenir cette charge. On a vû aussi dans l'art. 3. que de la charge absolue P suivant PN, il résulte aussi une force $L = \frac{P \times EF}{PN}$ de E vers F

suivant EF, ou de P vers L suivant sa parallèle PL perpendiculaire aussi (art. 2.) à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroue, ou du Levier DM; laquelle force L est conséquemment pour ou contre la force K, selon que le point F, ou que la direction PN de la charge absolue P, est du côté de K, ou du côté opposé par rapport au plan MD π . Ainsi ces deux forces K, L, ayant (art. 3. 4.) des directions parallèles en M, P, l'employée à soutenir la charge suivant PE, qu'on vient de trouver (art. 5.) à la

$$\text{Vis, ou à son Ecroue, sera ici } K \pm L = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN}$$

dont le supérieur du double signe (\pm) sera pour, lorsque le point F, ou la direction PN de la charge absolue P, sera du côté de K par rapport au plan MD π ; & l'inférieur pour le cas où ces points F, K, seront de part & d'autre de ce plan.

VII. Donc (art. 5. 6.) toute la question se réduit ici à

$$\text{une charge } E \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$$

de l'Ecroue QM ou de la Vis VXYZ, dirigée de P vers E suivant PE parallèle

(art. 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, & en équilibre avec une

puissance $K \pm L = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN}$, dont les forces par-

tiales K, L , ont en M, P , des directions MK, PL , perpendiculaires à la droite DM dans le plan de l'Ecroute QM ou de ce Levier DM : le tout en prenant ici les particuliers des signes generaux (\pm), comme dans les art. 5. 6.

VIII. Or si l'on appelle M une force qui, dirigée de M vers K suivant MK , ou en sens directement contraire, c'est-à-dire, dans le sens que la force L le feroit de P vers L suivant PL parallele à MK , auroit en M le même Moment (Def. 22.) sur le Levier DM , que cette force L auroit en P sur le même Levier DM , & de même appui D : le Corol. 9. du Th. 2. donnera $L \times DP = M \times DM$, & con-

sequemment $\frac{M \times DM}{DP} = L$ (art. 3.) $= \frac{P \times EF}{PN}$. Donc (art. 7.)

toute la question se réduit ici à une charge $= \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$

de la Vis ou de son Ecroute, en équilibre avec une force

ou puissance $= \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{M \times DM}{DP}$, appliquée en M au

Levier DM suivant une direction MK perpendiculaire à ce Levier dans le plan de l'Ecroute QM ou de ce Levier DM . Par consequent ce cas étant celui du Th. 3. un raisonnement semblable à celui de la démonstration de ce Théoreme, donnera ici (en prenant O pour la circonférence d'un cercle décrit du rayon DM) $2 \times AC.O$:

$\frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{M \times DM}{DP} = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$ (venant de trouver

$\frac{M \times DM}{DP} = \frac{P \times EF}{PN}$) $\therefore \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN} = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$.

D'où résulte $\frac{2 \times P \times AC \times PE}{PN} \pm \frac{2 \times R \times AC \times GS}{SM} = \frac{R \times O \times SM \times TD}{GM \times TM}$

$$\frac{+ P \times O \times E \times F}{PN}, \text{ ou } \frac{2 \times P \times A \times C \times P \times E + P \times O \times E \times F}{PN} =$$

$$\frac{R \times O \times S \times M \times S \times M \times T \times D + 2 \times R \times A \times C \times G \times S \times G \times M \times T \times M}{S \times M \times G \times M \times T \times M}, \text{ ou bien aussi}$$

$$2 \times P \times A \times C \times P \times E \times S \times M \times G \times M \times T \times M + P \times O \times E \times F \times S \times M \times G \times M \times T \times M \\ = R \times O \times S \times M \times S \times M \times T \times D \times P \times N + 2 \times R \times A \times C \times G \times S \times G \times M \times T \times M \times P \times N;$$

dans laquelle équation,

1°. L'art. 6. fait voir que le supérieur du double signe (+) du premier terme est pour lorsque le point F ou la direction PN de la charge absolue P de la Vis ou de l'Ecroute, sera du côté de K par rapport au plan MD ϖ ; & l'inférieur, pour lorsque ces deux points F, K, seront de part & d'autre de ce plan.

2°. L'art. 5. fait pareillement voir que le supérieur du double signe (+) du second terme de cette dernière équation, est pour lorsque le point G, ou la partie MG de la direction RM prolongée de la puissance R, est du côté de β au dessus du plan QM de l'Ecroute, ou du Levier DM; & l'inférieur, pour lorsque ce point G ou cette partie MG de la direction RM prolongée de la puissance R, est au dessous de ce même plan du côté de ϖ .

Donc R. P. :: $2 \times A \times C \times P \times E \times S \times M \times G \times M \times T \times M + O \times E \times F \times S \times M \times G \times M \times T \times M$. $O \times S \times M \times S \times M \times T \times D \times P \times N + 2 \times A \times C \times G \times S \times G \times M \times T \times M \times P \times N$. dans laquelle analogie les signes particuliers des généraux (+) sont pour les cas marquez dans les précédens nomb. 1. 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si la direction PN de la charge absolue P de la Vis VXYZ, ou de son Ecroute QM étoit en PF dans le plan touchant FPE de cette Vis en PE; cette hypothèse, qui feroit tomber N en F, rendroit seulement NF = O, & PN = PE; ce qui n'apporteroit aucune autre variété à la précédente analogie générale de ce Théoreme-ci, que d'y changer PN en PF.

Mais si la direction PN de cette charge absolue P, se trouvoit en PE parallèle (*dém. art. 2.*) à l'axe $\xi\pi$; la confusion qui se trouveroit alors des points N, F, avec le point E, rendant $NF=O=FE$, & $PN=PF=PE$, changeroit pour lors la précédente analogie generale du Théoreme en R. P :: $2 \times AC \times SM \times GM \times TM$. $O \times SM \times SM \times TD$ $\frac{1}{2}$ $2 \times AC \times GS \times GM \times TM$.

COROLLAIRE II.

Si outre cette hypothese de PN en PE, c'est-à-dire, de la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, dirigée suivant PE parallèle à l'axe $\xi\pi$ de cette Vis, on suppose la direction RMG de la puissance R dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM; cette nouvelle hypothese, qui confond le point G avec le point S, & GMR avec SMH, rendant ainsi $GS=O$, & $GM=SM$, changera pour ici l'analogie du précédent Corol. 1. en R. P :: $2 \times AC \times TM$. $O \times TD$.

COROLLAIRE III.

Enfin si aux deux hypotheses du précédent Corol. 2. on ajoute celle de MR ou MH en MK perpendiculaire à DM dans le plan de ce Levier ou de l'Ecroue QM; cette troisième hypothese rendant MS ou MT (prolongement de RM confondue avec HM par la seconde des deux autres dans le Corol. 2.) perpendiculaire aussi à DM, rendroit l'angle TMD droit, de même que l'est (*démonstr. art. 4.*) TDM; & rendant ainsi MT, DT, parallèles infinies & égales entr'elles, changeroit l'analogie du précédent Corol. 2. en R. P :: $2 \times AC$. O. pour ce cas-ci, qui est celui du Th. 3 2. d'où l'on voit, comme dans ce Th. 3 2. que l'on aura ici la puissance R à la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, comme un pas ($2 \times AC$) de cette Vis à la circonférence (O) d'un cercle décrit du rayon DM.

Ce dernier cas de la direction PN de la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, parallèle à l'axe $\xi\pi$ de cette Vis, &

de la direction MR de la puissance R perpendiculaire en M à DM dans le plan QM de l'Ecroute ou de ce Levier DM , lequel est celui du Th. 33. & le plus simple de tous, est le seul que je sçache avoir été proposé jusqu'ici sur la Vis; & la démonstration qu'on en voit dans le précédent Corol. 3. fait voir que ce Th. 33. n'est qu'un cas ou un Corollaire très-limité du précédent Th. 34.

S C H O L I E.

I. Pour faciliter le calcul du précédent Th. 34. & de ses Corollaires, il est à considérer,

1°. Que la direction GMR de la puissance R étant donnée de position par rapport au plan QM de l'Ecroute ou du Levier DM , sur lequel plan GS est (*démonstr. art. 4.*) perpendiculaire en S ; l'angle GMS de cette direction avec ce plan, fera pareillement donné avec son complément MGS à un droit; & avec la position de MS sur ce plan, & conséquemment aussi avec l'angle DMS ou DMT compris entr'elle & DM sur le même plan.

2°. Que la direction PN de la charge absolue P de la Vis, ou de son Ecroute, étant aussi donnée par rapport à l'axe $βγ$ de cette Vis pareillement donné de position, & conséquemment au plan touchant FPE de cette Vis en PE parallèle (*démonstr. art. 2.*) à son axe $βγ$, sur lequel plan NF est (*démonstr. art. 2.*) perpendiculaire en F ; la position de PF sur ce plan touchant FPE , fera aussi donnée avec celle de la section commune PE de ce plan avec le plan $MDα$; & conséquemment les angles NPF , FPE , le seront de même avec les compléments PNF , PFE , de chacun d'eux à un droit, la construction supposée rendant (*démonstr. art. 2.*) FE perpendiculaire en E sur PE , comme NF en F sur PF .

II. Cela posé, soient appelez a , le sinus total; b , le sinus de l'angle GMS donné suivant le nomb. 1. de l'art. 1. c , le sinus de son complément GMS à un droit; m , le sinus de l'angle DMS ou DMT pareillement donné suivant le même nomb. 1. de cet art. 1. n , le sinus de l'ar-

gle PNF, aussi donné suivant le nomb. 2. de ce même art. 1. p , le sinus de l'angle PFE, pareillement donné dans le même nomb. 2. de cet art. 1. & q , le sinus de son complément FPE. Voici ces noms en liste pour les rendre plus presens.

Sinus total ou de l'angle droit,	a .
Sinus de l'angle MGS,	b .
Sinus de son complément GMS,	c .
Sinus de l'angle DMS ou DMT,	m .
Sinus de l'angle PNF,	n .
Sinus de l'angle PFE,	p .
Sinus de son complément FPE,	q .

III. Suivant ces noms de l'art. 2. le Corol. 2. du Lem.

8. donnera $a. b :: GM. SM = \frac{b}{a} \times GM$. Et $a. m :: TM. TD = \frac{m}{a} \times TM$. Et $q. p :: EF. PE = \frac{p}{q} \times EF$. De plus $p. a :: PE. PF$. Et $n. a :: PF. PN$. Ce qui (en multipliant par ordre) donne $np. aa :: PE. PN$ (à cause de $PE = \frac{p}{q} \times EF$) $:: \frac{p}{q} \times EF. PN = \frac{aa}{nq} \times EF$. De plus encore $b. a :: SM. GM$. Et $a. c :: GM. GS$. Ce qui (en raison ordonnée) donne aussi $b. c :: SM. GS = \frac{c}{b} \times SM$.

Par consequent on aura ici $PE = \frac{p}{q} \times EF, SM \times TD \times PN = \frac{b}{a} \times GM \times \frac{m}{a} \times TM \times \frac{aa}{nq} \times EF = \frac{bm}{nq} \times GM \times TM \times EF$, & $GS \times PN = \frac{c}{b} \times SM \times \frac{aa}{nq} \times EF = \frac{aac}{bnq} \times SM \times EF$.

Donc en substituant ces valeurs de $PE, SM \times TD \times PN, GS \times PN$, en leur place dans l'analogie generale du precedent Th. 34. elle deviendra encore en general $R. P :: \frac{2p}{q} \times AC \times EF \times SM \times GM \times TM + O \times EF \times SM \times GM \times TM. \frac{bm}{nq} \times O \times SM \times GM \times TM \times EF + \frac{aac}{bnq} \times AC \times SM \times EF \times GM \times TM :: \frac{2p}{q} \times$

$$AC \mp O \cdot \frac{bm}{nq} \times O \mp \frac{2aac}{bnq} \times AC :: 2bnp \times AC \mp bnq \times O \cdot bbm \times O$$

$\mp 2aac \times AC$. c'est-à-dire, $R. P :: 2bnp \times AC \mp bnq \times O \cdot bbm \times O \mp 2aac \times AC$. toute exprimée en sinus, qui multiplient le pas ($2 \times AC$) de la Vis, & la circonference (O) d'un cercle décrit du rayon DM : les signes particuliers des generaux (\mp) se prendront encore ici comme dans l'analogie generale du Théoreme transformée en celle-ci, dont les sinus en rendent le calcul le plus facile qu'il puisse être, sans rien diminuer de sa generalité.

IV. Quant aux analogies particulieres des Corollaires précédens de ce Th. 34. résultantes de sa generale, les voici de même en sinus, résultantes de la dernière du précédent art. 3.

1°. Si, comme dans le Corol. 1. la direction PN de la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, étoit en PF parallele (démonstr. art. 2.) à l'axe BN de cette Vis, cette hypothese, qui confond PN , PF , avec cette parallele PE , & leurs points N , F , avec le sien E rendant ainsi droits les angles PNF , PFE , à l'instant de cette confusion, & leurs complemens infiniment petits ou nuls en P par rapport à eux, rendroit alors (suivant les noms de l'art. 2.) leurs sinus $n=a$, $p=a$, & $q=0$: ce qui réduiroit pour ici la dernière analogie generale du précédent art. 3. à $R. P :: 2aab \times AC \cdot bbm \times O \mp 2aac \times AC$.

2°. Si de plus on suppose que la direction GMR de la puissance R soit dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM , comme dans le Corol. 2. Cette autre hypothese, qui confond aussi cette direction GMR avec SMH dans ce plan, & son point G avec celui S de celle-ci, rendant ainsi l'angle MGS droit à l'instant cette confusion, & son complement GMS infiniment petit ou nul par rapport à lui, rendroit alors (suivant les noms de l'art. 2.) le sinus $b=a$, & le sinus $c=0$: ce qui réduiroit pour ici l'analogie précédente du nomb. 1. à $R. P :: 2a^3 \times AC \cdot aam \times O :: 2a \times AC \cdot m \times O$.

3°. Enfin si aux deux hypotheses du précédent nomb. 2.

dont la seconde confond la droite GMR avec SMH dans le plan QM de l'Ecroute ou du Levier DM, l'on ajoute celle de MR ou de MH en MK perpendiculaire à DM dans ce plan, ainsi que dans le Corol. 3. ce qui est le cas du Th. 33. Cette troisième hypothese rendant l'angle DMS droit, & conséquemment son sinus $m=a$, réduiroit alors l'analogie du précédent nomb. 2. à cette autre, R. P.: $2 \times AC. O.$ qui est la même qu'on a déjà trouvée pour ce cas-ci dans le Th. 33. & dans le précédent Corol. 3.

DEFINITION XXIX.

FIG. 243.
244.

La Vis employée comme ci-dessus (Th. 33. & Corol. 3. du Th. 34.) avec son Ecroute seulement, s'appelle *Vis simple*, ou simplement *Vis*; & lorsqu'elle est appliquée à d'autres Machines, elle s'appelle *Vis composée*, laquelle prend le nom de *Vis sans fin*, quand, sans Ecroute, son cordon s'engraine dans une roue dentée, comme dans la Fig. 245. parce qu'alors en tournant sur son axe fixe, elle fait tourner sans fin cette roue par l'engrenement continu des spires ou helices de son cordon entre les nouvelles dents que le tournoyement de la roue lui presente, & fait entrer ces dents sans cesse les unes après les autres entre ces mêmes spires à mesure que d'autres dents de cette roue en sortent aussi les unes après les autres.

THEOREME XXXV.

FIG. 245.

Soit la Vis DAGP mobile autour de son axe fixe DG par le moyen d'une Manivelle DFR, & dont les spires ou helices AP, BP, du cordon s'engraineront entre les dents P de la Roue PS d'un Tour mobile aussi autour de son centre fixe C avec son rouleau HE, sur lequel s'entortille la corde QHE, à laquelle pende un poids quelconque Q, que la puissance R, appliquée en R au manche FR de la Manivelle DFR, soutienne en équilibre ou en repos par le moyen de toute la Machine.

Je dis que si l'on imagine le rayon CP de la Roue dentée

PS,

PS, lequel rencontre son rouleau *HE* en *E*, & une perpendiculaire *RK* à l'axe *GD* prolongé en *K*, l'équilibre ici supposé entre la puissance *R* & le poids *Q* sur une telle Machine, y donnera toujours cette puissance *R* à ce poids *Q*, comme le produit d'un des pas *AB* de la Vis par le rayon *EC* du rouleau, sera au produit du rayon *CP* de la Roue par la circonference entiere du cercle décrit du rayon *RK*; c'est-à-dire, qu'en appelant *O* cette circonference circulaire, l'on aura toujours ici $R. Q :: AB \times EC. CP \times O$.

D E M O N S T R A T I O N.

Soit appelée *P* la résistance que le poids *Q* fait faire à la Roue dentée au tournoyement de la Vis, par le moyen duquel la puissance *R* tend à enlever ce poids *Q*; l'on aura (*Th.* 33. & *Corol.* 2. du *Th.* 34. & *Corol.* 3. du *Th.* 34.) cette puissance *R* à cette résistance *P*, comme le pas *AB* de la Vis à la circonference *Z* du cercle, que la même puissance *R* tend ainsi à décrire du rayon *KO* autour du centre *K*; c'est-à-dire, $R. P :: AB. O$. De plus on aura (*Th.* 19. *Corol.* 1.) $P. Q :: CE. CP$. Donc (en multipliant par ordre) l'on aura $R. Q :: AB \times CE. CP \times O$. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

I. On a vû dans les art. 2. des Schol. des *Th.* 17. 18. comment un homme peut s'enlever soi-même à la hauteur d'une voûte par le moyen des Poulies à Mouffles; on a vû aussi dans l'art. 3. du Schol. du *Th.* 20. comment cet homme le peut aussi seul par le moyen d'un Cric: voici presentement comment il le peut faire encore par le moyen de la Vis sans fin. Il n'a qu'à attacher la cage de cette Machine fermement au bord ou au dedans du panier dans lequel il se veut mettre, en sorte qu'il ait la liberté de tourner la Manivelle, & par son moyen la Vis & la Roue avec son rouleau; attacher ensuite sur ce Rouleau la corde déjà attachée au haut de la voûte; se mettre

après cela dans le panier ; & tourner la Manivelle de la Machine, qui peut être très-légère avec beaucoup d'effet ; la corde s'entortillant ainsi autour du Rouleau, enlèvera cet homme vers la voûte. Car le présent Th. 35. fait voir que pour cela il faudra beaucoup moins de force à cet homme que lui, le panier, la machine & la corde n'auront ensemble de pesanteur. Cela seroit encore plus commode, si la corde attachée par un bout au panier, & par l'autre à la machine, passoit par dessus une poulie attachée par sa chape à la voûte, d'où elle revint se rouler par l'autre bout sur le rouleau de la machine.

Fig. 245.
246.

II. Tout cela seroit encore plus facile, si la machine étoit composée de plusieurs Vis sans fin, engrenées dans autant de roues à dents, qui eussent toutes des pignons, excepté la dernière, sur le rouleau de laquelle la corde doit se rouler ; & dans lesquels pignons toutes ces Vis s'engrènaient aussi chacune dans chacun, excepté la première à manivelle, qui ne doit s'engrener que dans la première des roues à dents : le tout de la manière qu'on le voit dans la Fig. 243. & qu'on le va voir dans le suivant Th. 36. qui fera voir aussi combien il seroit plus facile à cet homme de s'enlever soi-même par le moyen de cette machine représentée dans la Fig. 246. que par le moyen de l'autre représentée dans la Fig. 245. Soit donc

THEOREME XXXVI.

Fig. 246.

La puissance R soutenant un poids quelconque Q par le moyen de plusieurs Vis engrenées dans des roues dentées, & dans leurs pignons, comme l'on voit dans la Fig. 246. & comme on le va expliquer ; l'on aura toujours $R. Q :: AB \times EC \times HK \times LN \times ST \times VX. Z \times CP \times EG \times LK \times MN \times TX$. La démonstration va déterminer les lignes dont ces produits sont faits.

DEMONSTRATION.

I. Soient plusieurs Vis DAGP, BEYK, λMμT, de différents à volonté, & de pas de telles grandeurs qu'on voudra, mobiles autour de leurs axes fixes GD, βγ, λμ, &

qui s'engrenent dans autant de roues dentées $\epsilon P\delta$, $\nu K\pi$, $\chi T\omega$, mobiles aussi sur leurs centres fixes C, L, X; ayant toutes des pignons, excepté la dernière, qui n'a qu'un rouleau YV, sur lequel se file la corde YQ, à laquelle pend le poids Q. Pour plus d'universalité soit d'inégales grosseurs chacune des Vis qui s'engrenent à la fois chacune dans le pignon d'une roue, & entre les dents de l'autre, telles que sont les Vis $\beta E\gamma K$, $\lambda M\mu T$, dont la première est plus grosse en sa partie $\beta E\phi$, qui s'engrene dans le pignon de la roue $\epsilon P\delta$, & plus menue en sa partie $\phi K\gamma$, qui engrene dans la roue $\nu K\pi$; la seconde au contraire plus menue en sa partie $\lambda M\psi$, qui engrene dans le pignon de cette roue $\nu K\pi$, & plus grosse en sa partie $\psi T\mu$, qui engrene dans la roue $\chi T\omega$; & ainsi de tant d'autres Vis, & de roues dentées à pignons, qu'on voudra supposer, entre cette dernière Vis $\chi T\omega$ à rouleau YV, & la première Vis GAD à manivelle DFR, par le moyen de laquelle & de tous ces engrenemens la puissance R soutient le poids Q en équilibre avec elle.

II. Cette Machine étant ainsi conçue, imaginons des centres C, L, X, par les dents P, E, K, M, T, les rayons CP, CE, LK, LM, XT, qui rencontrent les cylindres des Vis en P, E, K, M, T, desquels points (excepté du premier P) soient aussi imaginées EG, KH, MN, TS, perpendiculaires en G, H, N, S, aux axes $\beta\gamma$, $\lambda\mu$, des Vis auxquelles ces points E, K, M, T, appartiennent.

Soient aussi appelées P, E, K, M, T, les forces ou les résistances aux points marquez de ces lettres; & Z, la circonférence du cercle décrit du rayon RO perpendiculaire en O à l'axe GD prolongé de la première Vis DAGP, à la manivelle de laquelle la puissance R est appliquée en R, & dont AB est un des pas.

III. Cela posé, le Th. 33. le Corol. 2. du Th. 34. & le
Corol. 3. du Th. 35. donneront

$$R. P :: AB. Z.$$

$$P. E :: CE. CR.$$

$$E. K :: HK. EG.$$

Le Cor. 1. du Th. 19. donnera aussi

$$K. M :: LM. LK.$$

$$M. T :: ST. MN.$$

$$T. Q :: XV. XT.$$

Donc (en multipliant par ordre) $R. Q :: AB \times CE \times$
 $HK \times LM \times ST \times XV. Z \times CR \times EG \times LK \times MN \times TX.$ *Ce qu'il*
falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Donc si les Vis $\beta E \gamma K$, $\lambda M \mu T$, étoient par tout cha-
cune de même grosseur, ayant alors $EG = KT$, $MN = ST$,
l'on auroit aussi pour lors $R. Q :: AB \times CE \times LM \times XV.$
 $Z \times CR \times LK \times TX.$ c'est-à-dire, qu'alors la puissance R se-
roit au poids Q, comme le produit des rayons de tous les
pignons & du rouleau, multipliez entr'eux, & par un
des pas AB de la premiere Vis DAGP, est au produit des
rayons de toutes les roues, multipliez entr'eux, & par la
circonference Z du cercle qui auroit pour rayon la di-
stance RO de la puissance R à l'axe GDO de cette même
Vis DAGP.



Fig. 243.

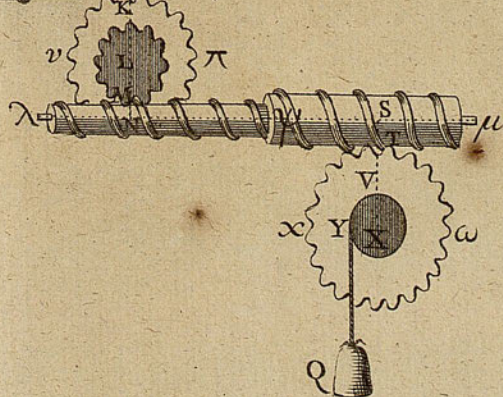
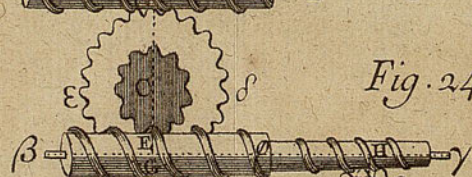
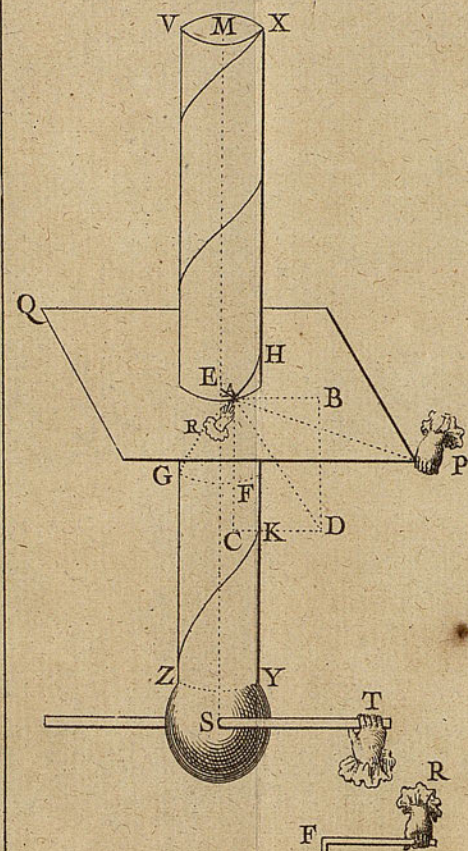


Fig. 244.

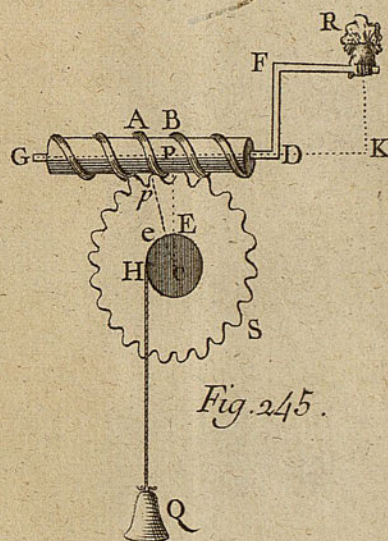
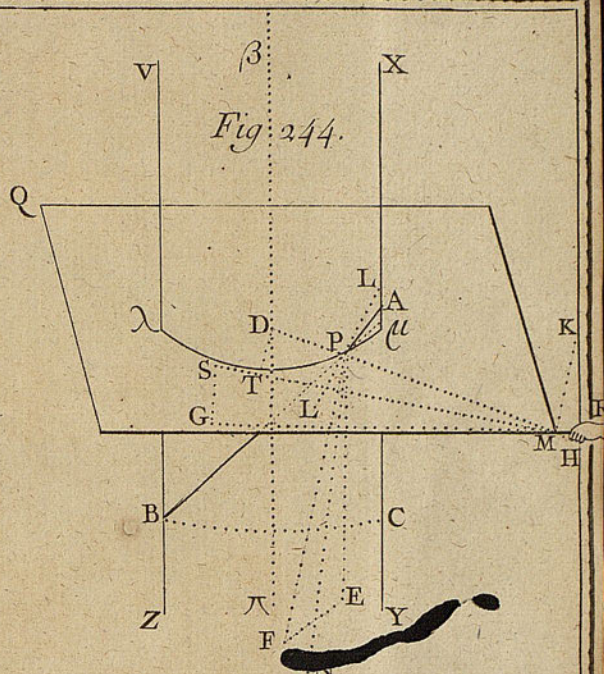


Fig. 245.



SECTION VIII.

Du Coin.

LE Coin étant beaucoup moins propre à mouvoir qu'à fendre des corps durs, & le Principe que j'exposai en 1687. au jugement des Connoisseurs dans le *Projet* de cette Mécanique-ci me paroissant applicable sans peine à cette Machine de la maniere que je l'appliquois aux autres, pour en donner un essai, & dans une aussi grande universalité que celle à laquelle je les élevai ; je négligeai de parler de celle-ci dans ce *Projet*. Cependant comme il s'agit de l'exécuter, & de rendre cette Mécanique ou Statique complete, le rang que l'on donne d'ordinaire au Coin parmi les Machines élémentaires, propres à faciliter les mouvemens, peut-être à cause de ceux de séparation qu'il facilite entre les parties des corps à fendre, m'engage à traiter pareillement ici de cette Machine.

DEFINITION XXX.

J'appelle en general *Coin* un corps dur de figure quelconque, propre à entrer par force dans un autre corps dur, & à le fendre ainsi en deux. On fait d'ordinaire le Coin en Prisme triangulaire, tel que ABEFCD (Fig. 247.) dont les bases paralleles opposées AEB, DFC, sont deux triangles isosceles égaux & semblables ; desquels un, par exemple, AEB, mù parallelement à lui-même suivant AD perpendiculaire à son plan, décriroit ou traceroit ce Coin. Le parallelogramme ABCD en est appelé la *Tête* ou la *Base* ; la droite EF en est appelée le *Tranchant*, lequel y est parallele à cette base ou tête ; & les deux parallelogrammes opposez BEFC, AEFD, dont ce tranchant est la section commune, s'appellent les *Faces* ou les *Côtez* du Coin.

D'ordinaire on n'exprime ce Coin qu'en profil par son triangle générateur AEB, dont la pointe E en exprime le *tranchant*; sa base AB exprime celle du Coin ou sa tête; les côtez AE, BE, de triangle expriment ceux de ce Coin ou ses *faces*; & la hauteur de ce triangle, c'est-à-dire, la distance de sa pointe E à sa base AB, est elle-même la *hauteur* de ce Coin. C'est pour cela qu'il s'appellera ici *isoscèle* comme ce triangle, pour le distinguer des autres Coins de figures quelconques, dont nous allons parler, & que nous ne représenterons ainsi qu'en profil, pour moins d'embarras de lignes dans les Figures.

D E F I N I T I O N XXXI.

On appellera ici *Résistance absolue* d'un corps à rompre, à casser, ou à fendre en quelque endroit que ce soit, ce que les fibres de ce corps en feroient à se casser ou à se détacher toutes à la fois en cet endroit: mais parce qu'on peut douter qu'il y ait aucun corps dont les fibres cassent ou se détachent ainsi toutes à la fois à l'endroit où il se romproit, de quelque manière qu'on le rompît, même en le tirant suivant sa longueur; nous appellerons en general *Résistance de Tenacité*, ou *Résistance totale* des fibres d'un corps, ce que celles qui s'opposent à sa rupture, en font toutes ensemble à la force qui tend à le rompre, ou à le fendre, soit que vaincues par cette force, elles cassent ou se détachent toutes à la fois, ou seulement les unes après les autres, en prêtant successivement jusqu'à certaines longueurs avant que de se casser ou de se détacher, en quelque proportion de longueurs qu'elles prêtent jusqu'à ce terme d'allongement. Enfin nous appellerons *Résistances des côtez de la fente* d'un corps à fendre par le moyen d'un Coin, ce que ces côtez de la fente, retenus ensemble par la résistance des fibres qui s'opposent à leur séparation, en font aux efforts des côtez du Coin contr'eux pour les écarter malgré ces fibres, & les forcer ainsi de permettre à ce Coin d'entrer plus avant dans le corps à fendre.

R E M A R Q U E.

J'e ne sçais point d'Auteur qui ait recherché la force du Coin sur d'autre que sur l'isoscèle ; je n'en sçais non plus aucun qui avant M. Descartes l'ait considéré indépendamment de toute autre Machine : de tous ceux qui ont parlé des propriétés du Coin avant cet Auteur , je n'en sçais point qui n'ayent rapporté la force de cette Machine à celle du Levier , ou à la résistance du plan incliné , en prenant la force du Coin pour celle d'un coup dont il seroit frappé perpendiculairement à sa base , ou (ce qui revient au même) pour celle dont il tend à s'enfoncer dans le corps à fendre.

I. Les premiers ont regardé les côtes du Coin comme des Leviers , dont les uns ont mis les appuis à la pointe de ce Coin , & les autres à l'entrée de la fente qu'il fait dans le corps à diviser : mais ne sçachant à quelles distances de chacun de ces appuis supposez , ils devoient considérer la force employée pour enfoncer le Coin & la résistance du corps à fendre , ils n'en ont pû conclure aucun rapport entre cette résistance & cette force.

II. Quant à ceux qui ont regardé les côtes du Coin comme des plans inclinez , ils ne nous ont donné guères plus de lumière : la plupart se contentent aussi d'expliquer la question sans la décider ; & les autres , en la décidant , se partagent en deux sentimens. Il y en a parmi eux qui disent qu'à l'instant d'équilibre entre la force dont on frappe le Coin perpendiculairement à sa tête , & la résistance du corps à fendre , cette force du Coin est toujours à cette résistance , comme la demi-base de ce Coin est à sa hauteur ; d'autres prétendent que c'est comme la demi-base à un de ses côtes.

III. Enfin ceux qui ont considéré le Coin indépendamment de toute autre Machine , se trouvent encore de deux sentimens différens : les uns croient qu'à l'instant d'équilibre entre la force du Coin & la résistance du corps à fendre , cette force est toujours à cette résistance comme la

base du Coin est à sa hauteur ; & d'autres soutiennent que c'est comme la plus grande largeur de la fente à sa profondeur. Ce qui est encore tout différent ; puisque ceux-ci ne veulent pas que la pointe, ou le tranchant du Coin aille jusqu'au fond de la fente, ni par conséquent que la base du Coin soit à sa hauteur comme la largeur de la fente est à sa profondeur.

IV. Outre ces Auteurs, il y en a encore qui considérant d'abord le Coin indépendamment de toute autre Machine, & le faisant ensuite dépendre du Levier, disent que suivant chacune de ces deux manières, la force du Coin est à la résistance du corps à fendre comme la base de ce Coin est à la somme de ses côtes ; ce qui s'accorde avec le second des sentimens du précédent art. 2.

V. La diversité de tous ces sentimens fait déjà voir qu'il y a là du paralogisme, de quelque côté qu'il soit, & en quelque sens (*Déf. 30.*) que le mot de *Résistance* y soit employé : on en jugera par les Th. 39. 40. qui tant pour les résistances relatives (*Déf. 1. 22. 31.*) que pour les absolues, comprendront en general tous les cas possibles de cette question, c'est-à-dire, toutes les configurations possibles des Coins avec toutes les directions imaginables de la force qui les frappe ou les pousse, soit que ces côtes enfoncent, ou non, jusqu'au fond de la fente du corps à diviser. On va commencer par le rapport de cette force absolue (*Déf. 31.*) aux résistances relatives (*Déf. 22.*) des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoissance de ce rapport dépend celle de cette force absolue (*Déf. 1. 22. 31.*) aux résistances relatives des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoissance de ce rapport dépend celle du rapport de cette force absolue du Coin à la résistance absolue du corps à fendre, & aussi pour voir en quel sens les sentimens précédens sont vrais ou faux.

Ne craignant rien tant que d'offenser qui que ce soit, je n'ai nommé jusqu'ici aucun des Auteurs que j'ai fait voir s'être mépris.

mépris, excepté *M. Borelli*, & le *P. Vannius*, que j'ai été forcé de dire dans la réflexion italique qui précède le *Corol. 1. du Th. 1.* être de ce nombre, ne pouvant faire sentir leurs méprises dans ce qu'ils ont dit de contraire à ce que j'ai établi ci-dessus, sans citer leurs paroles pour les suivre pied à pied, & conséquemment sans citer leurs Livres, qui les auroient également décelé. Sans cela j'aurois tâ leurs noms, comme j'ai tâ ceux des Auteurs que j'ai refutés jusqu'ici dans cet Ouvrage sur leurs simples propositions: c'est pour cette dernière raison que je ne nomme point ici non plus ceux dont je viens de rapporter les sentimens sur le Coin, lesquels je vas faire voir être les uns faux, & les autres trop limités.

THEOREME XXXVII.

De quelque maniere qu'un Coin quelconque *AEB* soit poussé dans la fente *HRK* d'un corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre; ce qu'il emploie de force pour diviser ainsi ce corps, est toujours dirigé suivant une ligne droite qui passe par l'angle ou la pointe *R* de la fente, & par un point *D*, d'où l'on peut toujours mener deux perpendiculaires aux côtés *HR*, *KR*, de cette fente *HRK*, en des points *H*, *K*, où le Coin *AEB* rencontre ces côtés de la fente, en quelque rapport que cette direction *DR* divise l'angle *HRK* de la fente.

FIG. 2.

251.

DEMONSTRATION.

Il est visible qu'un Coin *AEB*, quel qu'il soit, & de quelque force ou maniere qu'il soit poussé, ne tend à fendre un corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ qu'en vertu (*Déf. 22.*) des *Momens* égaux en sens contraires qu'il cause aux côtés *HR*, *KR*, de la fente *HRK*, dans laquelle on le suppose, par les efforts perpendiculaires (*Lem. 3. Corol. 8. 9.*) qu'il fait contr'eux pour les écarter l'un de l'autre; puisque si ces *Momens* étoient inégaux, leur différence ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier $\delta\epsilon\lambda\mu$ dans le sens du plus fort de ces deux *Momens*, & nullement à le diviser ou fendre. Donc tout ce que le Coin *AEB* emploie de force (que

j'appelle G) à fendre ce corps, doit être suivant une direction DG, telle que cette force G se puisse décomposer en deux autres (que j'appelle M, N, suivant DM, DN, perpendiculaires aux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ce Coin les rencontre; & qu'il en résulte des *Momens* égaux à ces côtez HR, KR, de la fente; c'est-à-dire (*Déf. 22.*) en sorte qu'il en résulte $M \times HR = N \times KR$; & conséquemment $M. N :: KR. HR$. Or la force G suivant DG est (*Lem. 3. Corol. 6.*) à chacune des deux M, N, dans lesquelles elle se décompose, comme cette diagonale DG du parallélogramme DMGN, est à chacun de ses côtez correspondans DM, DN; ce qui donne aussi $M. N :: DM. DN$. Donc on aura toujours ici $DM. DN :: KR. HR$. Ce qui donnant $DM \times HR = DN \times KR$, fait voir (*Lem. 12.*) que la direction DG de la force G employée par le Coin AEB à fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, doit passer par l'angle R de la fente HRK, & par quelque point D d'où l'on puisse mener deux perpendiculaires DM, DN, aux deux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ces côtez soient rencontrés par le Coin AEB, en quelque rapport que cette direction DR de la force G toute employée à fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, divise l'angle HRK de la fente dans laquelle le Coin AEB tend à s'enfoncer de cette force G. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

Si l'on imagine un cercle qui passe par les trois points H, R, K, il suit de-là que son diamètre mené du point R, en rencontrera la circonférence en un autre point D, d'où l'on pourra toujours mener deux perpendiculaires DM, DN, aux côtez HR, KR, de la fente HRK, par les deux points H, K, où l'on suppose que ces deux côtez sont rencontrés par le Coin AEB.

THEOREME XXXVIII.

Soit un coup de marteau ϕOF d'une direction quelconque FP , donné en F sur la base AB de tel coin AEB qu'on voudra, en équilibre avec la résistance que les côtes HR , HK , de la fente HRK du corps à fendre $deux$, dans laquelle ce coup tend à enfoncer ce Coin, font à s'écarter davantage, ou avec ce que ces côtes HR , KR , font d'effort pour se rapprocher l'un de l'autre, s'ils ont du ressort. Soit en F une perpendiculaire $F\Pi$ à la base AB du Coin, laquelle $F\Pi$ soit rencontrée en C par le diamètre RD prolongé du cercle imaginé par trois points H , R , K , desquelles le second R soit la pointe ou le fond de la fente HRK ; & les deux autres H , K , deux quelconques de ceux où le Coin AEB rencontre les deux côtes HR , KR , de cette fente, auxquels côtes les droites DH , DK , seront ainsi perpendiculaires. Enfin sur ces perpendiculaires DH , DK , prolongées soient les côtes DM , DN , d'un parallélogramme MN , dont la diagonale DG de grandeur arbitraire, soit sur DR prolongée à volonté.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre entre la force absolue du coup de marteau ϕOF suivant FP , & les résistances en H , K , des côtes HR , KR , de la fente HRK du corps $deux$ à fendre; cette force absolue du coup de marteau ϕOF , suivant FP , sera toujours à la somme de ces résistances en H , K , des côtes HR , KR , de la fente HRK de ce corps, comme le produit du quarré du sinus total par la diagonale DG du parallélogramme $DMGN$, sera au produit des sinus des complemens des angles PFP , ΠCZ , multipliez entr'eux, & par la somme $DM + DN$ des côtes DM , DN , de ce parallélogramme $DMGN$.

DEMONSTRATION.

I. Il est visible (Lem. 3. Corol. 6.) que de la force absolue du coup de marteau ϕOF suivant FP en F sur la base AB du Coin AEB , il en résultera une autre à ce Coin suivant $F\Pi$ perpendiculaire à cette base AB ; & que de

celles-ci il en résultera aussi une à ce même Coin AEB suivant CR, ou (*Th.* 3 8.) DG, de laquelle il en résultera pareillement deux autres suivant DM, DN, directement contraires aux résistances en H, K, des côtesz HR, KR, de la fente HKR du corps à fendre; la somme desquelles résistances sera la totale que ces côtesz de cette fente HRK font au Coin en ces points H, K. Pour plus de brièveté & de netteté ou clarté, voici les noms de toutes ces forces, & des sinus précédens, après avoir fait des points quelconques P, Π, pris à volonté sur FP, FΠ, les perpendiculaires PQ en Q sur FΠ, & Πβ en β sur CR prolongée à volonté.

Forces	{ Absolue du coup de marteau OF suivant FP, F.	F.
	{ Résultante de F suivant FΠ ou CΠ,	C.
	{ Résultante de C suivant CR ou DG,	G.
	{ Résultante de G suivant DM,	M.
	{ Résultante aussi de G suivant DN,	N.

Résistances	{ En H,	H.
	{ En K,	K.
	{ Totale en H, K,	$R = H + K.$

Sinus	{ Total,	Q.
	{ De l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau sur AB,	P.
	{ De l'angle CΠβ,	Π.

II. Cela posé, on verra (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que la force absolue (F) du coup de marteau en F suivant FP sur la base AB du Coin AEB, est à ce que ce coup fait d'impression suivant FΠ sur cette base, & conséquemment à ce qu'il en résulte de force (C) à ce Coin suivant FΠ ou CΠ, comme FP est à FQ; & conséquemment aussi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le sinus total (Q) de l'angle droit FQP est au sinus (P) de l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau OF sur la base AB du Coin AEB; c'est-à-dire, que suivant les noms précédens (*art.* 1.) on aura ici $F.C.::Q.P.$

III. On verra de même (*Lem. 3. Cor. 6.*) que la force (C) suivant FP ou CP, résultante de la force (F) du coup de marteau $\odot OF$, donné suivant FP sur la base AB du Coin AEB, est à ce qu'elle en cause (G) à ce Coin suivant CR ou DG, comme CP est à CB; & conséquemment (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme le sinus total (Q) de l'angle droit CBP est au sinus (P) de l'angle CBP; c'est-à-dire, que l'on aura ici C. G. :: Q. P. Donc ayant déjà (*art. 2.*) F. C. :: Q. P. l'on aura ici (en multipliant par ordre) F. G. :: Q². P x P.

IV. Presentement regardant (*art. 1.*) la force (G) suivant CR ou DG, comme composée de deux autres suivant DM, DN, avec lesquelles le Coin AB tend à écarter l'un de l'autre les deux côtesz HR, KR, de la fente HRK, dans laquelle le coup de marteau tend à enfoncer ce Coin; ces deux perpendiculaires (*Hyp.*) DM, DN, en H, K, à ces deux côtesz HR, KR, de la fente HRK, font voir (*Lem. 3. Cor. 6.*) que ce que le Coin AEB a de force (G) suivant DG, est à chacune de celles (M, N) qu'il exerce contre chacun de ces deux côtesz HR, KR, comme la diagonale DG est à chacun des côtesz correspondans DM, DN, du parallelogramme DMGN; c'est-à-dire, G. M :: DG. DM. Et G. N :: DG. DN. Ce qui donne G. M + N :: DG. DM + DN. Donc ayant (*art. 3.*) F. G. :: Q². P x P. l'on aura ici (en multipliant entr'elles ces deux dernières analogies par ordre) F. M + N :: Q² x DG. P x P x DM + DN.

V. Or les efforts (M, N,) du Coin suivant DM, DN, perpendiculaires (*Hyp.*) en H, K, aux faces ou côtesz HR, KR, de la fente HRK, étant ainsi directement opposez à ceux que font en ces points H, K, ces deux côtesz de la fente, ou aux résistances qu'ils lui font (en ces points) à s'écarter davantage l'un de l'autre, & en équilibre (*Hyp.*) avec ces résistances en H, K, sont égaux (*Ax. 4.*) à ces mêmes résistances (H, K,) chacun à chacune; c'est-à-dire (*art. 1.*) $M = H$, & $N = K$; d'où résulte $M + N = H + K$ (*art. 1.*) $= R$, résistance totale que les côtesz HR,

KR, de la fente HRK font en H, K, aux efforts perpendiculaires (M, N,) que le Coin AEB, frappé en F suivant FP, fait contr'eux en H, K. Donc (*art. 4.*) $F.R :: Q^2 \times DG. P \times \Pi \times DM \rightarrow DN.$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Or la démonstration du Th. 38. donne $HR.KR :: DN.DM.$ d'où résulte $HR.HR \rightarrow KR :: DN.DM \rightarrow DN.$ de sorte qu'ayant $DG.DN :: DG.DN.$ l'on aura ici (en multipliant par ordre) $DG \times HR. DN \times HR \rightarrow KR :: DG.DM \rightarrow DN.$ Donc (en multipliant les antécédens de cette analogie par Q^2 , & les conséquens par $P \times \Pi$) l'on aura pareillement $Q^2 \times DG \times HR. P \times \Pi \times DN \times HR \rightarrow KR :: Q^2 \times DG. P \times \Pi \times DM \rightarrow DN$ (*démonstr. art. 5.*) :: $F.R.$ c'est-à-dire, $F.R :: Q^2 \times DG \times HR. P \times \Pi \times DN \times HR \rightarrow KR.$

C O R O L L A I R E II.

Si l'on mene HL perpendiculaire en Δ sur DR, & qui prolongée rencontre en L le côté RK de la fente HRK, prolongé aussi, s'il est nécessaire; les triangles DKR, $L\Delta R$, rectangles (*Hyp.*) en K, Δ , ayant l'angle DRL commun, auront les angles KDR, ΔLR , égaux entr'eux. Par la même raison les angles HDR, ΔHR , des triangles DHR, $H\Delta R$, rectangles (*Hyp.*) en H, Δ , seront égaux entre eux. Par conséquent ayant ainsi les angles ΔLR ou $HLR = NDG$, $LHR = MDG = NDG$, les triangles DNG, LRH, seront semblables entr'eux, & donneront $HL.LR :: DG.DN.$ Donc en substituant les deux premiers termes de cette analogie à la place des deux derniers dans la dernière du précédent Corol. I. l'on aura ici $F.R :: Q^2 \times HL \times HR. P \times \Pi \times LR \times HR \rightarrow KR.$

C O R O L L A I R E III.

Si presentement on suppose que la direction DR de la

force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$; partage également en deux l'angle ARK de la fente: alors les angles (*Hyp.*) droits DKR, DHR, & en Δ , rendant $KR=HR=LR$, & $H\Delta=\Delta L$, la dernière analogie du précédent Corol. 2. se changera ici en F. R.: $Q^2 \times$

Fig. 248.

$HL. P \times \Pi \times HR \div KR :: 2Q^2 \times H\Delta. 2 \times P \times \Pi \times HR :: Q^2 \times H\Delta. P \times \Pi \times HR.$ pour tous les cas du présent Th. 38. ce qui, dans ceux de la Figure 248. où les côtes du Coin touchent par tout ceux de la fente, donnera aussi F. R.: $Q^2 \times H\Delta. P \times \Pi \times HE.$

COROLLAIRE I V.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente soit divisé par la direction DR de la force G avec laquelle le Coin AEB tend à diviser le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, supposons que la direction EP du coup de marteau ϕOF sur la base AB de ce Coin, soit suivant FΠ perpendiculaire à cette base. Cette hypothèse, qui confond EP avec FΠ, rendant ainsi l'angle EPQ droit, comme l'est (*Hyp.*) FQP, & conséquemment aussi leurs sinus P, Q, égaux entr'eux.

1°. Les deux dernières analogies des Cor. 1. 2. se changeront ici en F. R.: $Q \times DG \times HR. \Pi \times DN \times HR \div KR.$ Et

en F. R.: $Q \times HL \times HR. \Pi \times LR \times HR \div KR.$ en quelque rapport que l'angle HRK de la fente soit divisé par la direction CR ou DR de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, de quelque manière que les côtes de ce Coin rencontrent ceux de la fente.

2°. Les deux dernières analogies du Corol. 3. dans lequel on suppose que DR divise en deux également l'angle HRK de la fente, se changeront de même ici pour cette hypothèse du Corol. 3. en F. R.: $Q \times H\Delta. \Pi \times HR.$ de quelque manière encore que les côtes du Coin rencontrent ceux de la fente; & en F. R.: $Q \times H\Delta. \Pi \times HE.$ lorsque les côtes du Coin AEB touchent par tout ceux de la fente HRK.

Fig. 249.
251.

Outre la direction FP du coup de marteau ϕOF confondue avec la perpendiculaire $F\Pi$ à la base AB du Coin AEB soit cette perpendiculaire $F\Pi$ aussi confondue avec la direction CR de la force (G) employée par ce Coin pour fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$; laquelle direction CR ainsi perpendiculaire en F à cette base AB , divise en deux également l'angle HRK de la fente de ce corps $\delta\epsilon\lambda\mu$: le tout comme dans les Fig. 249. 251. où le Coin AEB est isoscele, & sa base AB parallele à HL , qui est ici HK , divisée perpendiculairement en deux parties égales en F , comme celle-ci en Δ , par RD prolongée jusques-là. Ce cas, qui est en tout celui qu'on suppose d'ordinaire, rendant non seulement $F=Q$ comme dans le précédent Corollaire 2. mais encore, pour la même raison, $\Pi=Q$, changera pour ici (Fig. 249. 251.) les analogies du nomb. 2. du Corol. 4. en $F.R::H\Delta.HR$. d'où résulte $F.R::AF.AE::AB.2\times AE$. pour le cas de la Fig. 249.

Cela fait voir que dans ce cas-ci (qui est celui de l'hypothese ordinaire) d'un Coin isoscele AEB enfoncé dans une fente isoscele HRK d'un corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre, & frappé ou poussé perpendiculairement à sa base AB en son milieu F suivant une direction FR qui divise en deux également l'angle HRK de la fente du corps à fendre, comme dans les Fig. 246. 248. la force absolue F , dont ce Coin AEB est ainsi frappé ou poussé, est toujours à la résistance R , que les côtes HR , KR , de la fente lui font ensemble aux points H , K , marquez ci-dessus, comme la demi-largeur $H\Delta$ de cette fente HRK est à un de ses côtes H , ou comme sa largeur entiere HK est à la somme $HR+KR$ de ses côtes, soit que ce Coin ne rencontre cette fente qu'en ces points H , K , comme dans la Fig. 251. ou qu'il la touche par tout jusqu'au fond, comme dans la Fig. 249.

D'où l'on voit que lorsque ce Coin isoscele AEB touche par tout jusqu'au fond cette fente isoscele HRK , comme dans

dans la Fig. 249. la force absolue F , dont on le suppose ici frappé ou poussé perpendiculairement à sa base AB en son milieu F , est toujours à la résistance R , que lui font ensemble les côtes HR , KR , de cette fente HRK , comme la demi-base AF de ce Coin AEB est à un de ses côtes AE conformément au second sentiment de l'art. 2. de la Remarque qui est entre la Déf. 30. & le Th. 38. ou comme la base entière AB de ce Coin est à la somme $AE + BE$ de ses deux côtes, conformément aussi au sentiment de l'art. 4. de la même Remarque, lequel revient à celui-là.

S C H O L I E.

I. C'est ainsi que le précédent Corol. 5. justifie le second sentiment de l'art. 2. & celui de l'art. 4. de la Remarque précédente, lesquels reviennent au même, auquel revient aussi celui (bien entendu) d'un illustre Auteur, dont voici les paroles : *Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi, sunt ad vim mallei in Cuneum, ut progressus Cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressa, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt Cuneo secundum lineas faciebus Cunei perpendiculares.*

II. Quant au premier sentiment de l'art. 2. & aux deux de l'art. 3. de la Remarque précédente ; sçavoir, qu'à l'instant d'équilibre entre la force dont on frappe le Coin, & la résistance du corps à fendre, cette force est toujours à cette résistance comme la demi-base du Coin à sa hauteur, selon le premier de ces trois sentimens ; comme la base entière du Coin à sa hauteur, selon le second ; & comme l'ouverture de la fente à sa profondeur, suivant le troisième, qui ne suppose pas, comme les deux autres, que le Coin touche par tout jusqu'au fond les deux côtes de la fente, & seulement qu'il les rencontre à l'entrée de l'ouverture de cette fente. L'Auteur du premier de ces trois sentimens n'en rapporte aucune raison ; ainsi l'on ne sçauroit dire ce qui l'a fait s'y méprendre. Les Auteurs des deux autres tirent la leur de cette maxime, qu'il y a toujours équilibre dans

les Machines, lorsque les vitesses prises suivant les directions des forces y sont en raison reciproque de ces forces. Cette maxime bien entendue est vraie ; mais ces Auteurs se sont mépris dans la détermination de ces directions des vitesses des côtez de la fente du corps à fendre : ils les ont prises paralleles à la base du Coin, au lieu qu'elles y sont perpendiculaires à ces côtez de la fente dans laquelle on le pousse, comme son action l'est sur ces mêmes côtez ; ce qui rend aussi ces vitesses perpendiculaires aux côtez du Coin, lorsqu'il touche par tout jusqu'au fond ceux de la fente, ou du moins lorsqu'il les touche aux endroits où tombent ces perpendiculaires, lorsque les côtez de la fente sont courbes.

Fig. 250.
251.

Fig. 248.
249. 250.
251.

III. Au reste, dans les Fig. 250. 251. je n'ai considéré les côtez HR, KR, de la fente HRK rencontrez seulement en deux points H, K, par le Coin AEB, que pour justifier, si je l'eusse pû, le second sentiment de l'art. 3. de la Remarque précédente, dépendant de cette supposition. Mais si l'on veut que dans ces Fig. 250. 251. H, K, soient des parties communes au Coin AEB & à la fente HRK, comme la compressibilité des corps le doit faire penser ; alors DM, DN, perpendiculaires à ces parties H, K, de la fente, se trouvant aussi perpendiculaires aux côtez du Coin dans ces deux cas comme dans tous les autres, si l'on prolonge dans tous HΔ jusqu'à la rencontre en θ du côté EB du Coin, aussi prolongé, s'il est nécessaire ; les angles (Hyp.) droits DHE, DKB, & Δ, qui rendent les angles HθE = GDN & θHE = GDM = DGN, rendant ainsi les triangles HEθ, GND, semblables entr'eux, on aura ici en general pour tous les cas Hθ. HE + θE :: DG. GN + DN :: DG. DM + DN. Donc,

1°. L'analogie generale du present Th. 38. démonstr.

art. 5. donnera ici F. R :: Q² × Hθ. P × Π × HE + θE. pour tous les cas. Ce qui,

2°. Dans le cas du Cor. 3. où DR divise en deux également l'angle HRK de la fente du corps δελμ, se change

en F. R. :: $Q^2 \times H\theta$. $2 \times P \times \Pi \times HE$:: $Q^2 \times H\Delta$. $P \times \Pi \times HE$.

Ce qui,

3°. Dans le cas du nomb. 2. du Corol. 4. où l'on suppose de plus la direction FP du marteau confondue avec FΠ perpendiculaire à la base AB du Coin, se change en F. R. :: $Q \times H\Delta$. $\Pi \times HE$. Ce qui,

4°. Dans le cas du Corol. 5. qui, outre tout cela, suppose dans les Fig. 249. 251. FΠ aussi confondue avec CR, c'est-à-dire, toutes les lignes FP, FΠ, CR, confondues en une FR au milieu F de la base AB du Coin isoscele AEB, se change en F. R. :: $H\Delta$. HR. pour ces deux Fig. 249. 251. ainsi qu'on l'a déjà vû pour la seule Fig. 246. dans le Corol. 5. cette dernière hypothese rendant comme là $Q = \Pi$.

IV. Quoique dans les Fig. 250. 251. je n'aye considéré le Coin AEB comme rencontré seulement en deux points H, K, & non en des parties communes, par les côtez de la fente HRK du corps $\Delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre, que pour justifier, si j'en eusse pû, le second des sentimens de l'art. 3. de la Remarque précédente; ce n'est pas qu'on ne puisse considérer avec l'Auteur de ce sentiment, le Coin comme ainsi rencontré par les côtez de la fente à son entrée ou ailleurs, en prenant le tout mathématiquement, & comme si le corps à fendre étoit incompressible au point H, K, & incapable de céder ailleurs qu'en R. Car quoique le ressort qu'on lui peut supposer en ce point R, tendant à en rapprocher l'un de l'autre les côtez HR, KR, de la fente HRK suivant des perpendiculaires en H, K, à ces côtez de la fente, & obliques à ceux AE, BE, du Coin AEB, tendît à rejeter ce Coin, & à le faire ressortir de cette fente, comme un noyau est forcé de sortir d'entre les doigts entre lesquels il est pressé; il est visible que l'effort du coup de marteau ϕOF sur la base ou la tête AB de ce Coin AEB, le pourroit retenir dans cette fente HRK malgré ce ressort; & que l'équilibre de ce coup de marteau avec la résistance des côtez de cette fente de tel corps qu'on voudra, pourroit se faire sur ces points ma-

thématiques H, K, de même que s'ils étoient des parties communes aux côtez de ce Coin AEB, & à ceux de la fente HRK que ceux-là toucheroient en ces points. Ce qui fait voir que cette supposition de l'Auteur du second sentiment de l'art. 3. de la Remarque précédente, est mathématiquement possible; & qu'ici le Coin sans parties communes avec les côtez de la fente du corps à fendre, ne laisseroit pas à l'instant qu'il seroit frappé, de faire des efforts contr'eux, capables de produire l'équilibre supposé, s'il étoit assez fortement frappé pour cela; puisqu'il les empêcheroit ainsi de se rapprocher l'un de l'autre, & en soutiendrait tellement toute la résistance, ou toute la tendance à se rapprocher en vertu de leur ressort, que poussé ou frappé plus fortement que cet équilibre ne requiert, il les forceroit de s'écarter l'un de l'autre, & la fente de s'augmenter pendant l'instant que ce Coin seroit ainsi poussé ou frappé. Il est vrai que la compressibilité physique des corps permettroit à ce Coin d'enfoncer ces points H, K, & de s'y faire ainsi deux parties communes à ses côtez, & à ceux de la fente qui en seroient touchés en ces points; mais cela n'empêche pas la possibilité mathématique dont il est ici question.

Ajoutez à cela que deux parties en H, K, ou ailleurs, communes aux côtez du Coin AEB, & à ceux de la fente HRK, mathématiquement polies, comme on les suppose d'ordinaire, & mêmes telles qu'on voudra, fussent-elles de toute la longueur des côtez de la fente, ne rendroient pas l'équilibre entre la force du Coin & la résistance des côtez du corps à fendre plus possible que ne le rendroient les deux points mathématiques communs H, K, des Fig. 250. 251. dont il est ici question; puisque le ressort ou l'effort des côtez HR, KR, de la fente HRK pour se rapprocher l'un de l'autre, tendroit autant à en faire sortir le Coin qui les toucheroit en ces parties communes, que s'il ne les rencontroit qu'aux seuls points mathématiques H, K: de sorte que si dans la pratique le Coin reste dans la fente après le coup reçu du marteau, ou de masse, ce

n'est pas l'effet d'un simple contact en des parties communes; mais de l'âpreté ou de l'inégalité des côtez du Coin & de la fente, dont ceux-là s'accrochent avec ceux-ci par l'engrenement entr'elles de leurs parties inégalement avancées, lesquelles enfoncées par force les unes entre les autres, y demeurent embarrassées.

V. C'est pour cela qu'en fait de considération mathématique, où les côtez du Coin & de la fente du corps à fendre, sont regardez comme mathématiquement polis, il ne peut y avoir d'équilibre entre la force du Coin & la résistance des côtez élastiques du corps à fendre, qu'à l'instant que le Coin est frappé ou poussé d'une force la plus grande qui puisse être soutenue par toute la résistance de ce corps à être divisé par ce Coin, soit que ce Coin en rencontre les côtez de la fente seulement en des points H, K, ou en des parties communes quelconques: aussi est-ce-là l'état dans lequel nous l'avons supposé jusqu'ici.

VI. La considération du Coin AEB soutenu en équilibre entre les côtez HR, KR, de la fente HRK, comme entre deux plans inclinez, fait assez voir (*Lem. 3. Corol. 8. 9. & Th. 2.6. part. 1.*) que pour cet équilibre il faut que les efforts du Coin contre ces deux côtez HR, KR, de la fente du corps à fendre, leurs soient perpendiculaires en deux points H, K, communs à eux, & à ceux AE, BE, de ce Coin, soit qu'ils le soient aussi, ou non, à ces côtez du Coin; & qu'ainsi l'on a eu raison ci-dessus de prendre DM, DN, perpendiculaires en H, K, aux côtez HR, KR, de la fente HRK pour les directions des forces exercées par le Coin contre ces côtez de la fente en vertu de sa force G suivant DG, sans se mettre en peine si ces directions DM, DN, sont aussi perpendiculaires comme dans les Fig. 248. 249. ou non, comme dans les Fig. 250. 251. aux côtez AE, BE, de ce Coin AEB.

Un Levier chargé d'un poids entre ses deux extrémités soutenues sur deux plans inclinez, fait encore voir que pour l'équilibre d'un Coin avec la résistance des côtez de la fente d'un corps à fendre, entre lesquels ce Coin est

soûtenu comme entre deux plans inclinéz ; il est seulement requis que les directions des efforts de ce Coin contre ces côtez de la fente dans laquelle il tend à s'enfoncer, leur soient perpendiculaires en des points communs à eux & aux côtez du Coin, & qu'il est tout-à-fait indifférent que ces directions soient aussi perpendiculaires à ces côtez du Coin. C'est pour cela que la difficulté de trouver la situation requise à ce Levier ainsi chargé pour demeurer en équilibre entre deux plans inclinéz donnez de position, ne consiste pas à trouver ce que le poids dont ce Levier est chargé, lui fait d'impressions perpendiculaires à ses extrémités, cela étant facile ; mais seulement à trouver deux points de ces deux plans (un de chacun) sur lesquels ce poids doit faire des efforts perpendiculaires à ces plans, lesquels deux points soient distans entr'eux de la longueur du Levier chargé de ce poids, pour être soûtenu sur eux en équilibre entre ces deux plans.

Fig. 248.
249.

VII. Quant aux forces suivant QP , $\beta\Pi$, dont la première suivant QP parallèle à la base AB du Coin AEB , résulte immédiatement du coup oblique du marteau ϕOF suivant FP sur cette base AB dans les Fig. 248. 249. & dont la seconde suivant $\beta\Pi$ résulte de même de l'autre suivant $F\Pi$, résultante immédiatement aussi de la première suivant FP ; on n'en a fait ci-dessus aucun usage, parce qu'elles ne tendent aucunement à fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, mais seulement à le faire avancer, & même à le renverser du côté où elles tendent toutes deux, si elles tendent vers le même, comme dans la Fig. 248. ou bien du côté vers lequel tend la plus forte des deux, si elles tendent vers des côtez différens comme dans la Fig. 250. à moins qu'il ne soit bien retenu en $\epsilon\lambda$ par sa pesanteur ou autrement.

THEOREME XXXIX.

Fig. 248.
249. 250.
252.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Th. 38. dans lequel la force absolue du coup de masse ou de marteau ϕOF suivant FP sur la base AB du Coin AEB , &

été appelée F , d'où résulteroit l'employée G suivant CR ou DG par ce Coin pour fendre le corps $\delta\epsilon\mu$ en vertu des deux autres forces M, N , dans lesquelles celle-ci (G) se décomposoit suivant DM, DN , perpendiculaires en H, K , aux côtes HR, KR , de la fente HRK , & qui étoient ainsi toutes employées contre ces deux côtes de la fente pour les écarter l'un de l'autre: cela, dis-je, supposé tel qu'on l'a trouvé dans la démonstration du précédent Th. 38. soit Z le centre du premier mouvement que les deux parties $\delta RZe, \mu RZ\lambda$, du corps à fendre, auroient en cedant au Coin AEB ; & de ce point Z soient menées ZS, ZT , perpendiculaires en S, T , sur DM, DN , prolongées. Ensuite par le centre (quel qu'il soit) de tenacité ou de résistance des fibres qui s'opposent à ce premier mouvement autour de Z , soit imaginé un plan VX perpendiculaire en T à DR prolongée, dans laquelle on va faire voir que cet appui Z doit toujours être.

Tout cela posé, si outre les noms assignez dans la démonstration du précédent Th. 38. l'on appelle T la tenacité ou la résistance actuelle que les fibres en équilibre avec l'effort du Coin contr'elles, font alors à se casser ou à se détacher toutes à la fois, comme dans le système de Galilé sur la Résistance des corps à être rompus, ou successivement suivant tel autre système qu'on voudra; l'on aura toujours en general $F. T :: 2^2 \times DG \times TZ. 2 \times P \times \Pi \times DM \times SZ$.

DÉMONSTRATION.

I. Quelque système qu'on adopte sur la manière dont les fibres qui tiennent les parties $\delta RZe, \mu RZ\lambda$, du corps $\delta\epsilon\mu$ à fendre, attachées ensemble depuis R vers $\epsilon\lambda$, cederoient ou casseroient, si leur résistance étoit surmontée par les efforts M, N , du Coin AEB contr'elles; il est visible qu'il y a un certain point T entre R & $\epsilon\lambda$, dans lequel si tout ce que ces fibres font de résistance à ce Coin, étoit ramassé, cette résistance totale de toutes ces fibres ensemble, feroit la même contre lui, que lorsqu'elles sont répandues entre R & $\epsilon\lambda$: de sorte que ce point T (que j'appelle centre de Tenacité ou de Résistance de toutes ces fibres

en équilibre avec l'effort du Coin) peut être regardé comme le seul ou les deux parties δRZ , μRZ , du corps à fendre, sont attachées ensemble, & de même que si elles y étoient pressées ou tirées l'une contre l'autre suivant TV, TX, en ligne droite parallèle à HL, par deux forces V, X, directement opposées suivant cette ligne VX, égales entr'elles, & égales ensemble à tout ce que les fibres répandues depuis R vers λ , font de résistance en équilibre avec l'effort que le Coin AEB fait pour les rompre, & les obliger ainsi à le laisser entrer plus avant dans le corps à fendre; laquelle résistance totale étant appelée T, l'on aura ici $T = V + X$.

II. De plus si l'on considère, comme dans la démonstration du Th. 36. que de quelque manière ou force que le Coin AEB soit poussé, il ne tend à fendre le corps $\delta\lambda\mu$ qu'en vertu de *Momens* égaux qu'il doit imprimer pour cela aux parties δRZ , μRZ , de ce corps qu'il tend à écarter l'une de l'autre; puisque la différence des *Momens* inégaux ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier $\delta\lambda\mu$ dans le sens du plus fort de ces mêmes *Momens*, & non à le diviser ou le fendre: on verra que, quel que soit le point ou appui Z sur lequel fixe ces deux parties δRZ , μRZ , du corps à fendre commenceroient à se mouvoir en cas que les efforts M, N, du Coin AEB contr'elles, l'emportassent sur la résistance des fibres qui les tiennent attachées ensemble, ce point Z doit, pour l'équilibre ici supposé, être tel (*Théor. 21. Corol. 6.*) qu'il rende $M \times SZ = N \times YZ$; & conséquemment $YZ. SZ :: M. N$ (*démonstr. du Th. 37.*) :: KR. HR. c'est-à-dire, $YZ. SZ :: KR. HR$. Or il est évident que cela ne sçauroit être, à moins que ce point ou appui Z ne soit quelque part dans la droite DR continuée, laquelle (à cause des perpendiculaires supposées HR, SZ, sur DM prolongée; & KR, YZ, sur DN aussi prolongée) rend $YZ. KR :: DZ. DR :: SZ. HR$. & conséquemment $YZ. SZ :: KR. HR$. Donc l'appui Z des *Momens* causez aux parties δRZ , μRZ , du corps à fendre, par les efforts M, N, que le Coin AEB fait sui-

vant DM, DN, pour les séparer l'une de l'autre, doit être quelque part dans la droite DR continuée du côté de la base $\epsilon\lambda$ du corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre par delà le centre T de tenacité ou de résistance de tout ce qu'il y a de fibres qui s'y opposent à l'instant de leur équilibre avec ce que ce Coin exerce de forces pour diviser ce corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ malgré ces fibres, en quelque point T, entre R & $\epsilon\lambda$, que soit alors le centre de leur résistance totale, & quel que soit dans cet espace la trace de la séparation qui s'y feroit entre les parties $\delta RZ\epsilon$, $\mu RZ\lambda$ du corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre, si l'effort du Coin AEB l'emportoit sur cette résistance totale T des fibres qui retiennent ces deux parties attachées ensemble.

III. Cela étant, & VX, qu'on suppose passer par le centre de cette résistance, étant (*Hyp.*) perpendiculaire à RZ, comme SZ, YZ, le font (*Hyp.*) à DM, DN, prolongées; l'équilibre ici supposé entre les efforts M, N, (suivant DM, DN,) du Coin AEB, & cette résistance totale T équivalente (*art. 1.*) à deux forces égales V, X, avec chacune desquelles chacun de ces efforts M, N, feroit en équilibre sur l'appui Z, donnera (*Th. 21. Corol. 6.*) $M \times ZS = V \times TZ = X \times TZ = N \times YZ$, & conséquemment $2 \times M \times SZ = V + X \times TZ$ (*art. 1.*) $= T \times TZ$; d'où résulte $M.T :: TZ. 2 \times SZ$. Or l'art. 4. de la démonstration du Th. 38. donne $G.M :: DG.DM$. Donc (en multipliant par ordre) $G.T :: DG \times TZ. 2 \times DM \times SZ$. Or l'art. 3. de la démonstration du Th. 38. donne de plus $F.G :: Q^2.P \times \Pi$. Donc enfin (en multipliant encore par ordre) $F.T :: Q^2 \times DG \times TZ. 2 \times P \times \Pi \times DM \times SZ$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Or suivant le Corol. 2. du Th. 39. les triangles LRH, DNG, ou GMD étant semblables entr'eux, l'on aura $DG.DM :: HL.HR$. Donc en substituant les deux derniers termes de cette analogie au lieu des deux premiers dans la dernière de l'art. 3. de la précédente démonstra-

tion, l'on aura aussi en general F. T.: $Q^2 \times HL \times TZ.$
 $2 \times P \times \Pi \times HR \times SZ.$

COROLLAIRE II.

Si presentement on suppose, comme dans le Corol. 3. du Th. 38. que la direction DRZ de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, divisé également en deux l'angle HRK de la fente que ce Coin tend à y augmenter par les efforts M, N, suivant DM, DN, que cette force G (résultante de l'absolue F du marteau ou de la masse ϕOF) exerce perpendiculairement en H, K, contre les côtes HR, KR, de cette fente HRK; l'on aura ici comme là $H\Delta = \Delta L$, & conséquemment $HL = 2 \times H\Delta$. Ce qui pour ce cas-ci changera la dernière analogie du précédent Corol. 1. en F. T.: $Q^2 \times H\Delta \times TZ.$
 $P \times \Pi \times HR \times SZ.$

COROLLAIRE III.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente soit divisé par la direction DR de la force G, avec laquelle le Coin AEB tend à fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$, supposons (comme dans le Corol. 4. du Th. 39. que la direction FP du coup de marteau ou de masse ϕOF sur la base AB de ce Coin, soit suivant FΠ perpendiculaire à cette base. Cette hypothese, qui confond FP avec cette perpendiculaire FΠ, rendant ainsi $P = Q$, comme dans le Corollaire 4. du Th. 38.

1°. L'analogie du present Th. 39. se changera ici en F. T.: $Q \times DG \times TZ.$ $2 \times \Pi \times DN \times SZ.$ en quelque rapport que l'angle HRK de la fente du corps à fendre, soit divisé par la direction DR de la force G dont le Coin AEB tend à fendre ce corps $\delta\epsilon\lambda\mu$.

2°. La dernière analogie de son Corol. 1. se changera ici en F. T.: $Q \times HL \times TZ.$ $2 \times \Pi \times HR \times SZ.$ quel que soit encore le rapport des parties de l'angle HRK divisé par DR.

3°. L'analogie du Corol. 2. se changera pareillement ici en $F. T :: Q \times H \Delta \times TZ. \Pi \times HR \times SZ$ pour le cas de ce Corol. 2. où l'on suppose que DR divise en deux parties égales l'angle HRK de la fente que le Coin AEB tend à augmenter.

COROLLAIRE I V.

Outre la direction FP du coup de marteau confondue avec la perpendiculaire FP à la base AB du Coin AEB, comme dans le précédent Corol. 3. soit cette perpendiculaire FP aussi confondue avec la direction CR ou DR de la force G employée par ce Coin pour fendre le corps $\Delta\epsilon\lambda\mu$, comme dans le Corol. 5. du Th. 38. laquelle CR ainsi perpendiculaire en F à cette base AB, divise ici comme là en deux parties égales l'angle HRK de la fente de ce corps $\Delta\epsilon\lambda\mu$: le tout comme dans les Fig. 249. 250. dans lesquelles le Coin AEB est isoscele, & sa base AB parallèle à HL, qui est ici HK, divisée perpendiculairement en deux parties égales en F, comme celle-ci l'est en Δ par RD prolongée jusques-là. Ce cas, qui en tout est celui qu'on suppose d'ordinaire, rendant non seulement $F=Q$, comme dans le précédent Corol. 3. mais encore pour la même raison $\Pi=Q$, ainsi que dans le Corol. 5. du Th. 38. changera pour ici (Fig. 249. 250.) l'analogie du nomb. 3. du précédent Corol. 3. en $F. T :: H \Delta \times TZ. HR \times SZ$. D'où résulte $F. T :: A F \times TZ. A E \times SZ :: A B \times TZ. 2 \times A E \times SZ :: A B \times TZ. SZ \times \overline{A E + B E}$. pour le cas de la Fig. 250.

S C H O L I E.

La recherche qu'on vient de faire du rapport de la force du Coin F, qui frappe ou pousse le Coin AEB, à la résistance des fibres, qui en équilibre avec lui, tiennent malgré lui attachées ensemble les parties $\delta R Z \epsilon, \mu R Z \lambda$, du corps à fendre, ayant introduit les bras TZ, SZ, du Levier recourbé SZT dans les analogies du présent Th. 39. & de ses Corollaires; il n'est pas surprenant qu'aucun

FIG. 249.
250.

FIG. 248.
249. 250.
251.

ne de ces analogies ne ressemble à une de celle des sentimens rapportez dans la Remarque qui précède le Th. 37. aucun des Auteurs de ces sentimens n'ayant cherché ce rapport, mais seulement celui de la force du Coin aux *Momens* dont les côtes HR, KR, de la fente HKR du corps $\Sigma\lambda\mu$ à fendre, résistent à la force du Coin AEB. Ce qui fait qu'aucun de ces sentimens ne peut être justifié dans le sens du présent Th. 39. & que n'étant tous que dans l'hypothèse & dans le sens du Corol. 5. du Th. 38. il n'y a que ce Corollaire qui les puisse justifier; lequel pourtant n'en justifie que deux qui reviennent au même, ainsi qu'on l'a vu dans l'art. 1. du Scholie de ce Théoreme-là. D'où il faut nécessairement conclure que les Auteurs des autres sentimens s'y sont mépris; ce qui soit seulement dit pour que le Lecteur ne s'y méprenne pas après eux, & non pour les offenser, ne craignant rien tant que de faire de la peine à qui que ce soit. C'est pour cela (ainsi que j'en ai déjà averti) que je ne nomme point ces Auteurs, ni même ceux des sentimens justifiez dans l'art. 1. du Scholie du Th. 38. lesquels pourroient aussi trouver mauvais que je fasse ici remarquer qu'ils n'ont touché qu'au cas le plus simple de ce Théoreme, rapporté dans son Corol. 5. la vérité pouvant ainsi être mise à couvert sans offenser personne.

R E M A R Q U E.

Au reste il est à remarquer que tout ce qu'on voit démontré dans les trois derniers Th. 37. 38. 39. pour le Coin prismatique triangulaire quelconque, exprimé en profil par le triangle rectiligne aussi quelconque AEB, qui en seroit le generateur à la maniere expliquée dans la Déf. 30. & pour une fente rectiligne HRK, dans laquelle on a supposé ce Coin, se démontrera de même par toutes autres figures de Coin & de fente qu'on voudra. Pour le voir, il n'y a qu'à imaginer le profil de ce nouveau Coin inscrit dans un triangle rectiligne, dont les côtes le touchent aux points H, K, ou ce Coin de figure quelconque

Fig. 247.

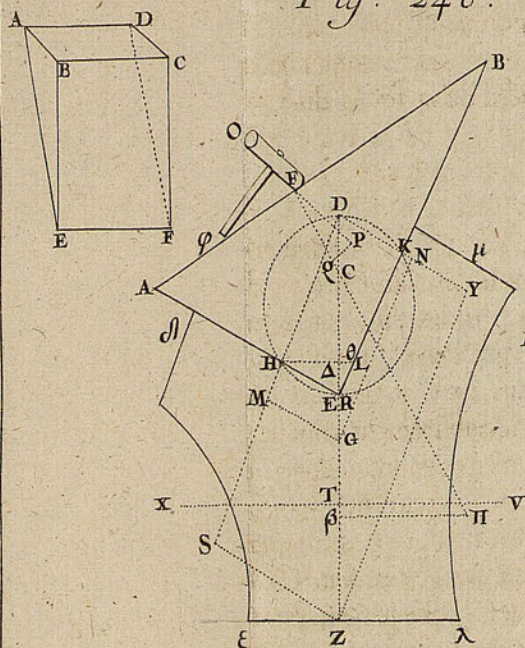


Fig. 248.

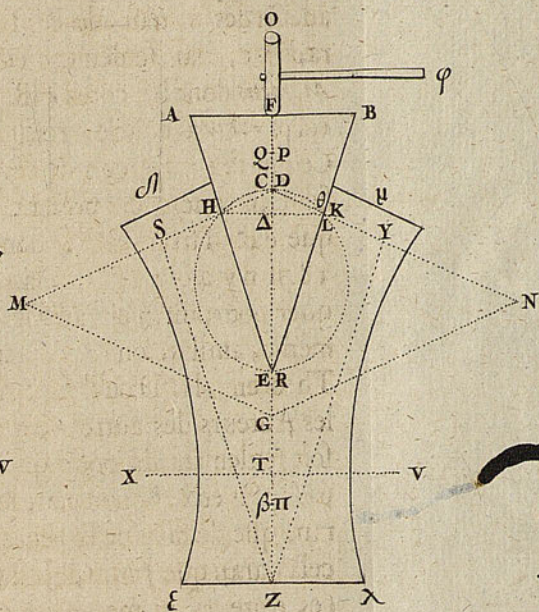


Fig. 249.

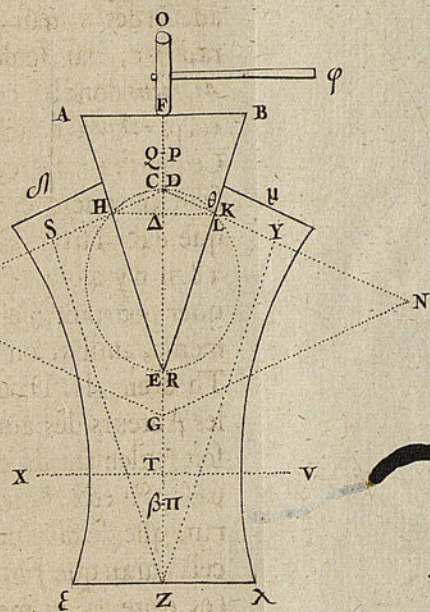


Fig. 250.

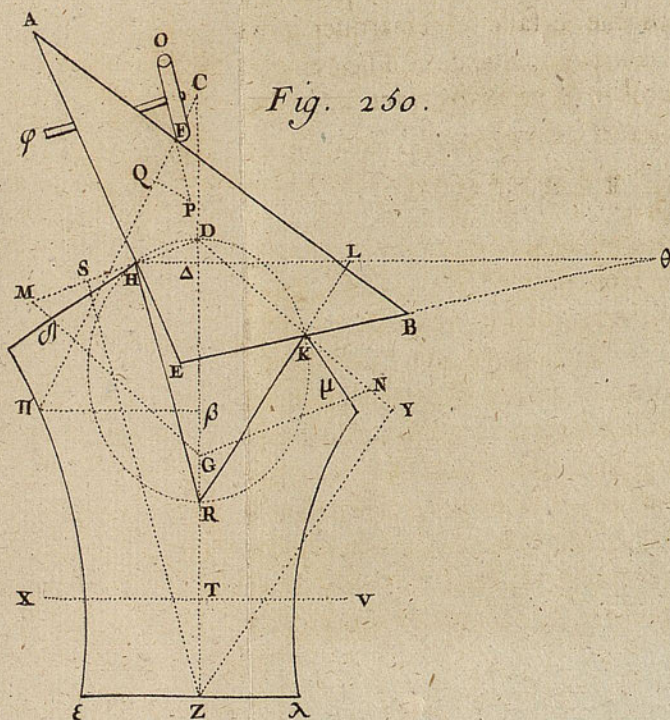
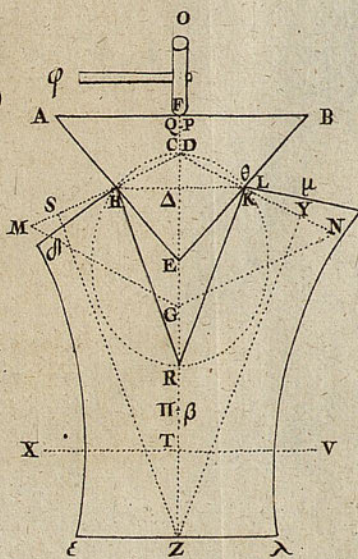


Fig. 251.



rencontrera les côtez quelconques de la fente, & au point F, où il sera rencontré par le marteau, ou par la masse ϕOF qui le frappera; prendre ensuite ce triangle, tel que seroit AEB, si ce nouveau Coin lui étoit ainsi inscrit, pour le véritable Coin; & les parties HE, KE, des côtez de ce Coin triangulaire pour ceux de la fente, si elle est curviligne; auquel cas la pointe E de ce Coin sera toujours (Th. 36.) dans la direction DR de la force G, dont il tendra à fendre le corps $\delta \epsilon \lambda \mu$. Cela conçu ou imaginé, tout le reste demeurant le même que dans les Fig. 248. 249. 250. 251. les démonstrations des Th. 37. 38. 39. & leurs Corollaires pour le Coin triangulaire AEB dans une fente rectiligne HRK, pour laquelle on prendra HEK, s'appliqueront de même à tout autre Coin de figure aussi quelconque, & à ce Coin rectiligne AEB dans une fente curviligne ou de côtez courbes. Les figures de ces nouveaux cas sont si aisées à imaginer, que ç'auroit été multiplier inutilement le nombre de celles-ci, que de les y ajouter.



SECTION IX.

Corollaire general de la Théorie précédente.

DAns une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717. M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'en tout *équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou immédiatement ou immédiatement; la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives, prises affirmativement.*

Cette proposition me parut si generale & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précédente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fournissoit, & qu'il ne m'envoyoit pas. La voici séparée pour toutes les Machines précédentes; la Théorie, qui en étoit achevée lorsque ce sçavant Mathématicien m'annonça cette proposition, ne m'ayant pas permis de la démontrer sur chacune de ces Machines en sa place, sans changer un très-grand nombre de citations répandues dans cette Théorie, & toutes celles des Figures qui auroient suivi la premiere des nouvelles qu'il y auroit fallu ajouter dès la Section 2. ce qui m'auroit fort embarrassé, & exposé à de fausses citations, n'étant pas possible de n'omettre aucun de ces changemens. Pour l'intelligence de cette proposition de M. Bernoulli, & de la démonstration que la Théorie précédente en va fournir. Voici comment il s'expliquoit sur ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, dans la Lettre où il m'annonçoit cette belle proposition.

DEFINITION XXXII.

Concevez (disoit-il) plusieurs forces différentes qui agissent suivant différentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le système de ces forces un petit mouvement, soit parallèle à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque: il vous sera aisé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que quelque une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: car ces avancements ou reculemens, qui sont ce que j'appelle *vitesse virtuelle*, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; & ces augmentations ou diminutions se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la *vitesse virtuelle* de cette force.

Soit, par exemple, P un point quelconque dans le système des forces qui se soutiennent en équilibre; F, une de ces forces, qui pousse ou qui tire le point P suivant la direction FP ou PF; Pp, une petite ligne droite que décrit le point P par un petit mouvement, par lequel la tendance FP prend la situation fp, qui sera ou exactement parallèle à FP, si le petit mouvement du système se fait en tous ses points parallèlement à une droite donnée de position; ou elle fera, étant prolongée, avec FP un angle infiniment petit, si le petit mouvement du système se fait autour d'un point fixe. Tirez donc PC perpendiculaire sur fp, & vous aurez Cp pour la *vitesse virtuelle*

Fig. 154.

« tuelle de la force F , en sorte que $F \times Cp$ fait ce que j'appel-
 « le *Energie*. Remarquez que Cp est ou *affirmatif* ou *néga-*
 « *tif* par rapport aux autres: il est *affirmatif*, si le point P
 « est poussé par la force F , & que l'angle FPp soit obtus;
 « il est *negatif*, si l'angle FPp est aigu: mais au contraire si
 « le point P est tiré, Cp sera *negatif*, lorsque l'angle FPp est
 « obtus; & *affirmatif*, lorsqu'il est aigu. Tout cela étant
 « bien entendu, je forme (dit M. Bernoulli) cette

PROPOSITION GENERALE.

THEOREME XL.

« En tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere
 « qu'elles soient appliquées, & suivant quelques directions
 « qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement, ou
 « immédiatement, la somme des *Energies affirmatives* sera
 « égale à la somme des *Energies négatives* prises *affirmative-*
 « *ment*.

DEMONSTRATION.

Telle est la proposition de M. Bernoulli, rapportée au commencement de cette Section; & voici comment la Théorie précédente en fournit la démonstration.

PARTIE I.

« Pour l'équilibre d'un poids soutenu avec des cordes seule-
 « ment, par tant de puissances qu'on voudra, de directions quel-
 « conques; & pour l'équilibre d'un corps choqué par plusieurs au-
 « tres à la fois.

Fig. 253.
254.

I. Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans la Fig. 71. du Th. 6. Corol. 20. c'est-à-dire, le poids K étant soutenu en équilibre par tant de puissances P, Q, R, S, T , &c. qu'on voudra, appliquées (comme lui) à autant de branches de corde, sur lesquelles branches ou cordons soient AB, AC, AE, AF, AM , &c. proportionnelles à ces puissances P, Q, R, S, T , &c. des extrémités desquelles proportionnelles tombent autant de perpendicu-
 laires

laires Bb , Cc , Ee , Ff , Mm , &c. sur la direction AK du poids K prolongée de part & d'autre : cela , dis-je , étant ainsi dans les Fig. 253. 254. comme dans la Fig. 71. Th. 6. Corol. 20. soit prise de A vers K sur la direction AK du poids K , une partie quelconque Aa dans la Fig. 253, où les puissances P , Q , R , S , T , &c. tirent droit, sans s'appuyer sur rien, & infiniment petite dans la Fig. 254. où les cordons de ces puissances sont appuyez sur des poulies β , λ , ϵ , ϕ , μ , &c. Du point a , sur les directions AB , AC , AE , AF , AM , &c. de ces puissances P , Q , R , S , T , &c. soient autant de perpendiculaires ap , aq , ar , as , at , &c. qui rencontrent ces directions en p , q , r , s , t , &c.

Cela fait, il est visible que les triangles (*constr.*) rectangles Apa , AbB ; Aqa , AcC ; Ara , AeE ; Afa , AfF ; Ata , AmM , &c. ayant deux à deux (distinguez comme on les voit ici par la marque;) leurs angles égaux A , sont semblables entr'eux pris ainsi deux à deux. Par conséquent, en appelant b , c , e , f , m , &c. les forces suivant la direction AK ou Ae du poids K , pour ou contre ce poids, résultantes (*Lem. 3. Corol. 6.*) des forces absolues des puissances P , Q , R , S , T , &c. suivant leurs directions AB , AC , AE , AF , AM , &c. l'on aura suivant la part. 1. du Lem. 3. employée comme dans la démonstr. 2. du Th. 6.

$$Aa. Ap :: AB. Ab :: P. b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa. Aq :: AC. Ac :: Q. c = \frac{Q \times Aq}{Aa}.$$

$$Aa. Ar :: AE. Ae :: R. e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa. As :: AF. Af :: S. f = \frac{S \times As}{Aa}.$$

$$Aa. At :: AM. Am :: T. m = \frac{T \times At}{Aa}.$$

&c.

Donc
$$\frac{Q \times Aq + R \times Ar + S \times Af - P \times Ap - T \times At \pm \&c.}{Aa}$$

$= c + e + f - b - m \pm \&c.$ (Th. 6. démonstr. 2.) $= K$; ce qui en ce cas d'équilibre donne $Q \times Aq + R \times Ar + S \times Af - P \times Ap - T \times At \pm \&c. = K \times Aa$, ou $K \times Aa + P \times Ap + T \times At \pm \&c. = Q \times Aq + R \times Ar + S \times Af \pm \&c.$

Fig. 253.

1°. Soit présentement tout le système de la Fig. 253. mû de manière que son point A parcourant la partie quelconque Aa de la direction AK du poids K, tous les cordons ou directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puissances P, Q, R, S, T, &c. demeurent toujours parallèles chacune à soi-même; & que lorsque le point A sera en a , & le poids K descendu de la valeur de Aa suivant la première direction AK, ces autres directions ou cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. soient encore perpendiculaires en a aux mêmes lignes fixes ap , aq , ar , af , at , &c. auxquelles elles l'étoient en p , q , r , s , t , &c. avant ce mouvement du point A, ou de tout le système de la présente Figure 253. Un tel mouvement faisant ainsi reculer ou avancer les puissances P, Q, R, S, T, &c. suivant ces directions, chacune suivant la sienne, des valeurs Ap , Aq , Ar , Af , At , &c. pendant que le poids K descend de la valeur de Aa suivant la sienne: la Déf. 31. fait voir qu'en prenant ici Aa pour la vitesse virtuelle de ce poids K, l'on y aura Ap , Aq , Ar , Af , At , &c. pour les vitesses virtuelles de ces puissances P, Q, R, S, T, &c. & que $K \times Aa$, $P \times Ap$, $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $S \times Af$, $T \times At$, &c. feront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puissances.

Fig. 254.

2°. Soit aussi mû tout le système de la Fig. 254. mais de manière que son point A parcourant la partie infiniment petite Aa de la direction AK du poids K, les cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puissances P, Q, R, S, T, &c. qui y sont appuyez sur les poulies fixes β , λ , ϵ , φ , μ , &c. passent de $A\beta P$, $A\lambda Q$, $A\epsilon R$, $A\varphi S$, $A\mu T$, &c. en $a\beta P$, $a\lambda Q$, $a\epsilon R$, $a\varphi S$, $a\mu T$, &c. lesquelles secon-

des situations de ces cordons font avec les premières, chacune avec sa correspondante, des angles $A\beta a$, $A\lambda a$, $A\epsilon a$, $A\varphi a$, &c. infiniment petits, à cause de leur base commune Aa supposée infiniment petite par rapport à ses distances finies des sommets β , λ , ϵ , φ , μ , &c. de ces angles. Ce qui confondant les perpendiculaires infiniment petites ap , aq , ar , af , at , &c. supposées du point a sur les côtes $A\beta$, $A\lambda$, $A\epsilon$, $A\varphi$, $A\mu$, &c. de ces angles avec les arcs infiniment petits, qui décrits de leurs sommets β , λ , ϵ , φ , μ , &c. comme centres, par ce point a , seroient compris entre leurs côtes, chacun entre les deux de chacun de ces angles, donne les différences infiniment petites Ap , Aq , Ar , Af , At , &c. pour les quantitez dont les puissances P , Q , R , S , T , &c. reculeroient ou avanceroient ici suivant leurs directions, chacune suivant la sienne, pendant que le poids K y descendroit suivant la sienne AK de la valeur de la partie infiniment petite Aa de cette direction. D'où l'on voit, suivant la Déf. 31. qu'en prenant ici cette ligne infiniment petite Aa pour la vitesse virtuelle de ce poids K , l'on y aura les infiniment petites Ap , Aq , Ar , Af , At , &c. pour les vitesses virtuelles de ces puissances P , Q , R , S , T , &c. & que $K \times Aa$, $P \times Ap$, $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $S \times Af$, $T \times At$, &c. y seront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puissances.

L'on aura donc ici en general (*nomb.* 1. 2.) dans l'un & dans l'autre système des Fig. 253. 254. les produits $K \times Aa$, $P \times Ap$, $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $S \times Af$, $T \times At$, &c. pour les Energies du poids K & des puissances P , Q , R , S , T , &c. supposées en équilibre avec lui avant la rupture qu'on y a supposée faite par une force étrangere; desquels produits les lignes Aa , Ap , Aq , Ar , Af , At , &c. qui expriment les vitesses virtuelles de ce poids & de ces puissances, sont (*nomb.* 1.) quelconques (finies ou infiniment petites à volonté) dans la Fig. 253. & infiniment petites (*nomb.* 2.) dans la Fig. 254. Et desquelles Energies la Déf. 31. fait voir que les affirmatives sont $K \times Aa$, $P \times Ap$, $T \times At$, &c. & les négatives sont $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $S \times Af$, &c. dans le

mouvement supposé de l'un & de l'autre système des Fig. 253. 254. Or avant les nomb. 1. 2. l'on a trouvé pour l'un & pour l'autre de ces systèmes $K \times Aa + P \times Ap + T \times At + \&c = Q \times Ag + R \times Ar + S \times Af + \&c$. Donc en general dans l'un & dans l'autre système du poids quelconque K, soutenu en équilibre par tant de puissances quelconques P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, avec des cordes seulement, ou appuyées sur des poulies fixes; la somme des Energies positives de ce poids & de ces puissances, est toujours égale à la somme de leurs Energies négatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

Ce qu'on voit des Energies résultantes de l'équilibre rompu dans le précédent art. 1. par un mouvement de A vers a suivant la direction AK du poids K, & en consequence de tout le système de chacune des Fig. 253. 254. se trouvera de même des Energies résultantes de cet équilibre rompu par le mouvement de ce point A, suivant toute autre direction, & de tout le système mû en consequence comme dans cet art. 1. Voici comment.

Fig. 255.
256.

II. Le poids K étant encore ici soutenu en équilibre par tel nombre qu'on voudra de puissances P, Q, R, S, T, &c. avec des cordes seulement dirigées à volonté: le tout comme dans le précédent art. 1. soit presentement cet équilibre rompu dans chacune des Figures 255. 256. par le mouvement de A vers a suivant une direction quelconque *em*, & de tout le système mû en consequence comme dans l'art. 1. sçavoir, de maniere que pendant que ce point A parcourra une partie Aa quelconque dans la Fig. 255. & infiniment petite dans la Fig. 256. de cette direction *em*, les directions ou cordons AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. du poids K, & des puissances P, Q, R, S, T, &c. emportées avec le système, demeurent toujours paralleles chacun à soi-même, c'est-à-dire, à sa premiere situation dans la Fig. 256. comme dans la Fig. 253. nomb. 1. de l'art. 1. où passent toujours par-dessus les mêmes poulies fixes $\delta, \beta, \lambda, \epsilon, \phi, \mu$, &c. dans la Fig. 256.

chacune par-dessus la sienne, comme dans la Fig. 254. nomb. 2. du même art. 1. de manière, dis-je, que si du point a on imagine sur ces cordons ou directions AN , AB , AC , AE , AF , AM , &c. autant de perpendiculaires ak , ap , aq , ar , as , at , &c. qui les rencontrent prolongées en k , p , q , r , s , t , &c. ces directions ou cordons soient encore perpendiculaires en a à chacune d'elles, lorsque le point A sera en a dans la Fig. 255. comme dans le nomb. 1. de l'art. 1. Fig. 253. où se trouvent en ad , ab , al , ae , ap , am , &c. appuyez encore sur les poulies fixes δ , β , λ , ϵ , θ , μ , &c. de la Fig. 256. comme dans le nomb. 2. de l'art. 1. Fig. 254.

Cela posé, si suivant la Déf. 32. on prend ici Aa pour la vitesse virtuelle du point A , l'on y aura Ak , Ap , Aq , Ar , As , At , &c. pour les vitesses virtuelles du poids K , & des puissances P , Q , R , S , T , &c. dans chacune des Fig. 255. 256. comme dans les Fig. 253. 254. nomb. 1. 2. de l'art. 1. Ce qui, suivant la même Déf. 32. donnera ici comme là $K \times Ak$, $P \times Ap$, $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $S \times As$, $T \times At$, &c. pour les Energies de ce poids & de ces puissances.

Présentement si après avoir pris AN , AB , AC , AE , AF , AM , &c. proportionnelles au poids K , & aux puissances P , Q , R , S , T , &c. sur leurs directions, on mène des extrémités N , B , C , E , F , M , &c. de ces proportionnelles autant de perpendiculaires Nn , Bb , Cc , Ee , Ff , Mm , &c. en n , b , c , e , f , m , &c. sur la direction am du mouvement supposé du point A , comme ak , ap , aq , ar , as , at , &c. le font (*Hyp.*) en k , p , q , r , s , t , &c. sur ces directions prolongées; les triangles rectangles Aka , AnN ; Apa , AbB ; Aqa , AcC ; Ara , AcE ; Asa , AsF ; Ata , AmM , &c. seront ici semblables deux à deux, comme dans l'art. 1. & pour la même raison que dans cet art. 1. de sorte que si l'on prend ici n , b , c , e , f , m , &c. pour les efforts suivant Am ou Ae , résultans des absolus du poids K , & des puissances P , Q , R , S , T , &c. suivant leurs directions, l'on aura ici comme dans l'art. 1.

$$Aa. Ak :: AN. An :: K. n = \frac{K \times Ak}{Aa}.$$

$$Aa. Ap :: AB. Ab :: P. b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa. Ag :: AC. Ac :: Q. c = \frac{Q \times Ag}{Aa}.$$

$$Aa. Ar :: AE. Ae :: R. e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa. Af :: AF. Af :: S. f = \frac{S \times Af}{Aa}.$$

$$Aa. At :: AM. Am :: T. m = \frac{T \times At}{Aa}.$$

&c.

Or les efforts $n, b, m, \&c.$ de A vers m suivant Am , étant ici directement contraires aux efforts $c, e, f, \&c.$ de A vers e suivant Ae en ligne droite (*Hyp.*) avec Am ; & en équilibre avec ceux-ci: l'ax. 4. donnera ici $n + b + m + \&c. = c + e + f + \&c.$ comme dans la démonstr. 2. du Th. 6. Donc on aura ici $K \times Ak + P \times Ap + T \times Ar + \&c. = Q \times Ag + R \times Ar + S \times Af + \&c.$ Mais on vient de voir que les produits dont cette égalité est faite, sont autant d'Energies du poids K, & des puissances P, Q, R, S, T, &c. supposées en équilibre avec lui. Donc suivant la Déf. 32. le premier membre de la même égalité étant tout d'Energies affirmatives, & le second tout d'Energies négatives, ce cas d'équilibre donnera ici, comme dans l'art. 1. la somme des Energies affirmatives, égale à la somme des Energies négatives prises affirmativement, quelque mouvement qu'on donne au système. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

III. 1°. Si l'on veut présentement que la direction Aa du point A soit celle du poids K, comme dans l'art. 1. cette hypothèse, qui fait tomber a en k , rendant $Ak = Aa$, changera l'équation du précédent art. 2. en celle de cet art. 1. dans le cas duquel on sera pour lors.

2°. Et si l'on veut que cette direction Aa du point A soit celle d'une quelconque des puissances P, Q, R, S, T , &c. par exemple, celle de la puissance P ; cette hypothese rendant de même $Ap=Aa$, changera l'équation generale du précédent art. 2. en $K \times Ak + P \times Aa + T \times At + \&c. = Q \times Ag + R \times Ar + S \times As + \&c.$ donc $P \times Aa$ sera pour lors l'Energie affirmative de la puissance P ; & ainsi des autres puissances P, Q, R, S, T , &c.

3°. Si l'on veut presentement que la direction Aa du point A soit perpendiculaire à la direction d'une de ces puissances, ou du poids K , par exemple, à la direction de la puissance P ; cette hypothese, qui fait tomber ap sur Aa rendant $Ap=0$, réduiroit l'équation generale du précédent art. 2. à $K \times Ak + T \times At + \&c. = Q \times Ag + R \times Ar + S \times As + \&c.$ Ce seroit la même chose, si la corde ABP de la puissance P , étoit attachée à quelque clou ou crochet fixe en B , lequel suppléât par sa résistance cette puissance P ; mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle décrit de ce centre B par A , devroit être infiniment petite, & conséquemment aussi toutes les autres Ak, Ag, Ar, As, At , &c. pour conserver la ressemblance des triangles qui, dans le précédent art. 2. ont donné l'égalité generale d'où résulte celle-ci.

4°. Enfin si dans les art. 1. 2. & dans les précédens nomb. 1. 2. 3. de celui-ci, on veut moins de puissances en équilibre avec le poids K , ou entr'elles, qu'on n'y en a supposé; il n'y aura qu'à y faire $=0$ toutes celles qu'on en voudra rejeter, & alors toutes les équations de ces art. 1. 2. & des nomb. 1. 2. 3. de celui-ci se réduiront à celles de ce cas-ci pour chacune des hypotheses de ces art. 1. 2. & de ces nomb. 1. 2. 3. de celui-ci.

Voilà (art. 1. 2.) pour les Energies d'un poids, & de tant de puissances qu'on voudra, qui le soutiennent en équilibre avec des cordes seulement attachées ensemble toutes par un seul & même nœud. Voici dans les articles suivans pour les Energies de ce poids quelconque soutenu encore par tel nombre

de puissances qu'on voudra, avec une corde à plusieurs branches issues présentement de plusieurs nœuds à volonté.

FIG. 257.

I V. Soit le poids quelconque K soutenu encore en équilibre avec des cordes seulement par tel nombre qu'on voudra de puissances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S, &c. appliquées à autant de cordons de directions quelconques, issus présentement de tant de nœuds A, B, M, P, &c. qu'on voudra : le tout comme dans la Fig. 257.

1°. Sur le cordon AK du poids K soit prise depuis A vers K, une partie Aa de longueur arbitraire ; & du point a soient menées sur les cordons AC, AB, AM, AP, prolongés de ce côté-là, autant de perpendiculaires ac , $a\beta$, $a\mu$, $a\pi$, qui les rencontrent en c , β , μ , π .

2°. Après avoir pris sur le cordon AB, depuis B vers A, la partie Bb=A β , du point b soient menées sur les cordons EB, DB, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires be, b δ , qui les rencontrent en e, δ .

3°. Après avoir pris sur le cordon BD depuis D vers B, la partie Dd=B δ , du point d soient menées sur les cordons DF, GD, HD, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires df, dg, dh, qui les rencontrent en f, g, h.

4°. Après avoir pris sur le cordon AM depuis M vers A, la partie Mm=A μ , du point m soient menées sur les cordons LM, NM, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires ml, mn, qui les rencontrent en l, n.

5°. Après avoir pris sur le cordon AP depuis P vers A, la partie Pp=A π , du point p soient menées sur les cordons PS, QP, RP, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires pf, pg, pr, qui les rencontrent en f, g, r.

6°. Après tout cela soient appelées B, D, M, P, les forces avec lesquelles les cordons AB, BD, AM, AP, sont tirés suivant leurs longueurs par le concours des puissances appliquées aux extrémités de chacun d'eux.

V. Tout cela posé, l'art. I. donnera,

1°. $K \times Aa + C \times Ac + P \times A\pi = B \times A\beta + M \times A\mu$, ou
 $K \times Aa + C \times Ac = B \times A\beta + M \times A\mu - P \times A\pi$.

2°. $B \times Bb = E \times Be + D \times B^d$, ou (à cause que les nomb.
2. 3. de l'art. 4. donnent $Bb = A\beta$, $B^d = Dd$) $B \times A\beta = E \times$
 $Be + D \times Dd$.

3°. $D \times Dd + F \times Df = G \times Dg + H \times Dh$, ou $D \times Dd = G \times$
 $Dg + H \times Dh - F \times Df$. De sorte qu'en substituant cette
valeur de $D \times Dd$ dans la dernière équation du précédent
nomb. 2. l'on aura $B \times A\beta = E \times Be + G \times Dg + H \times Dh$
 $- F \times Df$.

4°. $M \times Mm = L \times Ml + N \times Mn$, ou (à cause que le nomb.
4. de l'art. 4. donne $Mm = A\mu$) $M \times A\mu = L \times Ml + N \times Mn$.

5°. $P \times Pp + S \times Ps = Q \times Pq + R \times Pr$, ou (à cause que le
nomb. 5. de l'art. 4. donne $Pp = A\varpi$) $P \times A\varpi = Q \times Pq + R$
 $\times Pr - S \times Ps$.

Donc en substituant dans la seconde équation du pré-
cedent nomb. 1. les valeurs de $B \times A\beta$, $M \times A\mu$, $P \times A\varpi$,
trouvées dans les nomb. 3. 4. 5. qui le suivent; l'on aura
enfin $K \times Aa + C \times Ac = E \times Be + G \times Dg + H \times Dh - F \times Df$
 $+ L \times Ml + N \times Mn - Q \times Pq - R \times Pr + S \times Ps$, ou $K \times Aa$
 $+ C \times Ac + F \times Df + Q \times Pq + R \times Pr = E \times Be + G \times Dg +$
 $H \times Dh + L \times Ml + N \times Mn + S \times Ps$.

V I. Soit presentement tout le système mû d'un mouve-
ment parallele à AK dans tous ses points, lequel mouve-
ment fasse décrire au point A une partie quelconque Aa
de la direction AK du poids K. Il est visible (art. 4. &
Def. 32.) qu'en prenant Aa pour la vitesse virtuelle de ce
poids K.

1°. L'on aura Ac pour la vitesse virtuelle de la puissance
C, & Aβ, ou (art. 4. nomb. 2.) son égale Bb pour la
vitesse virtuelle de la force B, résultante du concours
d'action des puissances E, F, G, H; & qu'ainsi la puissance
E aura Be pour sa vitesse virtuelle; & la force D ré-
sultante du concours des forces F, G, H, aura B^d, ou
(art. 4. nomb. 3.) son égale Dd pour sa vitesse virtuelle;
en consequence de laquelle Df, Dg, Dh, seront aussi les
vitesses virtuelles de ces puissances F, G, H.

2°. L'on aura de même Aμ, ou (art. 4. nomb. 4.) son
égale Mm pour la vitesse virtuelle de la force M résultan-

te du concours d'action des puissances L, N ; & en conséquence Ml, Mn , pour les vîteses virtuelles de ces puissances L, N .

3°. L'on aura encore de même $A\omega$, ou (art. 4 nomb. 5.) son égale Pp , pour la vîtesse virtuelle de la force P , résultante du concours d'action des puissances Q, R, S ; & en conséquence Pq, Pr, Ps , pour les vîteses virtuelles de ces puissances Q, R, S . Et toujours de même en quelque nombre qu'elles soient, & les nœuds aussi de leurs cordons.

VII. Puisque suivant les nomb. 1. 2. 3. du précédent art. 6. en prenant ici Aa pour la vîtesse virtuelle du poids K , l'on y aura $Ac, Be, Df, Dg, Dh, Ml, Mn, Pq, Pr, Ps$, pour les vîteses virtuelles (contemporaines de Aa) des puissances $C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S$; les produits $K \times Aa, C \times Ac, E \times Be, F \times Df, G \times Dg, H \times Dh, L \times Ml, N \times Mn, Q \times Pq, R \times Pr, S \times Ps$, exprimeront (Déf. 3 2.) les Energies de ce poids K , & de ces puissances $C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S$, supposées en équilibre avec lui. Donc l'art. 4. venant de donner $K \times Ak - C \times Ac - F \times Df - Q \times Pq - R \times Pr = E \times Be + G \times Dg + H \times Dh + L \times Ml + N \times Mn + S \times Ps$; de laquelle égalité (suivant la Déf. 3 2.) le premier membre étant tout d'Energies affirmatives, & le second membre tout d'Energies negatives prises affirmativement, la somme des Energies affirmatives sera encore ici égale à la somme des Energies negatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

Il est à remarquer que cette égalité de sommes d'Energies du poids K & des puissances P, Q, R, S, T , &c. trouvée dans les précédens art. 1. & 7. Fig. 253. 255. dans le cas d'équilibre entre ce poids & ces puissances avec des cordes seulement, se trouvera de même entre les forces de plusieurs corps qui en choquent tous à la fois un autre, qui sans force ni action aucune de sa part, demeure en repos, nonobstant tous ces chocs simultanez. Voici comment.

FIG. 253.
255.

VIII. Pour appliquer ce qui précède au choc des corps, imaginons-en presentement un à la place du point

ou nœud A des cordes précédentes, lequel sans pesanteur ni action aucune de soi-même, soit choqué à la fois par autant d'autres corps qu'il y a ci-dessus de puissances K, P, Q, R, S, T, &c. (en y prenant le poids K pour une de ces puissances, laquelle soit d'une force égale à la pesanteur de ce poids, & de même direction que lui) suivant leurs directions, directement à contre-sens de ceux suivant lesquels ces puissances tirent ce point ou nœud A, & avec des forces égales à celles de ces puissances, en sorte que chacun de ces corps choquans pousse le choqué en A avec une force égale à celle dont il est tiré directement à contre-sens par la puissance dont ce corps choquant est suivant la direction.

Il est manifeste (Ax. 2.) que puisque (Hyp.) tous ces corps choquans poussent le choqué en A avec des forces égales & directement contraires à celles dont le nœud A est tiré par les puissances K, P, Q, R, S, T, &c. qu'on suppose suppléées par ces corps choquans, chacune par celui, qui de force égale à celle de cette puissance, suit la direction de cette même puissance à contre-sens: tous ces chocs ensemble retiendroient le corps choqué en repos & en équilibre en A, comme ce nœud A y est retenu (Hyp.) par le concours de toutes ces puissances; & que quelque mouvement droit qu'on donnât alors à ce corps choqué, tel que celui qu'on a donné (art. 1. 6.) au nœud A dont ce corps choqué tient ici (Hyp.) la place, les vîteses virtuelles & les Energies de ces corps choquans seroient égales à celles de ces puissances K, P, Q, R, S, T, &c. c'est-à-dire, égales chacune pour chacun de ces corps choquans à celle de la puissance correspondante, qu'il égaleroit (Hyp.) en force absolue, & de laquelle il suivroit la direction à contre-sens. Donc ayant trouvé ci-dessus (art. 1. 7.) qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puissances, la somme de leurs Energies affirmatives seroit toujours égale à la somme de leurs Energies négatives affirmativement prises, l'on aura pareillement ici (en cas d'équilibre entre les corps choquans qu'on y suppose agir

tous à la fois sur le corps choqué en A, comme les puissances dont ils suivent les directions à contre-sens, agissent sur ce nœud A, c'est-à-dire, en cas de repos de ce corps choqué, nonobstant tous les chocs qu'il recevrait à la fois de tous ces corps choquans) la somme des Energies affirmatives des corps choquans, égale à la somme de leurs Energies negatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

IX. Si le corps choqué en A, qu'on vient de supposer (art. 8.) sans aucune force ni action de sa part, en avoit quelqu'une avec laquelle les corps choquans le trouvaient déjà en mouvement à l'instant qu'ils le choquent tous à la fois, & avec laquelle tous ces corps choquans fissent alors équilibre; il n'y auroit qu'à regarder cette force propre ou ce mouvement du corps choqué, comme l'effet d'un nouveau corps (que j'appelle *choquant imaginaire*) qui l'auroit choqué avant tous ceux-là, & qui à l'instant de tous leurs chocs simultaneux feroit comme s'il commençoit avec eux à pousser le corps choqué, lequel étant en ce cas comme s'il n'avoit plus ni force ni action de soi-même, & qu'il reçût tous ces chocs à la fois, tant des corps choquans effectifs, que de l'imaginaire, aura encore ici, comme dans le précédent art. 7. la somme des Energies affirmatives de tous ces corps choquans en équilibre entr'eux, égale à la somme de leurs Energies negatives prises affirmativement. Donc la force & la direction du corps choquant imaginaire étant (*Hyp.*) les mêmes que celles qu'avoit le corps choqué à l'instant qu'il l'a été par tous les autres à la fois, avec lesquels il est (*Hyp.*) demeuré en équilibre; & conséquemment l'Energie de ce corps choqué étant ainsi la même que celle du choquant imaginaire: l'on aura pareillement ici la somme des Energies affirmatives des corps choquans effectifs & du choqué, égale à la somme de leurs Energies negatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

FIG. 255.

Cela (art. 8. 9.) démontré dans l'art. 8. dépendamment des puissances K, P, Q, R, S, T, &c. pourroit aussi l'être

indépendamment d'elles, en raisonnant sur les forces & directions des corps choquans en équilibre entr'eux, comme l'on a fait dans les art. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Fig. 253. sur les forces & directions de ces puissances en équilibre entr'elles; & en rompant cet équilibre des corps choquans par un mouvement du corps choqué, & de tout le système, semblable à celui qu'on a donné (art. 1. 6.) au nœud A, & tout le système de ces puissances dont il a rompu l'équilibre. Mais cette autre démonstration indépendante des poids soutenus avec des cordes seulement, seroit d'autant plus inutile, qu'elle reviendroit à celle du précédent art. 8. outre qu'elle exigeroit des Figures, qui ne feroient ainsi que multiplier inutilement le nombre de celles-ci: ceux qui voudront une telle démonstration, la pourront faire à l'imitation des précédentes; & les Figures en seront aisées à imaginer sur les Fig. 253. 255.

Il est à observer dans les Fig. 255. 256. que si la direction Aa du mouvement donné dans les art. 2. 6. au nœud A, & à tout le système, excepté au centre fixe des poulies de la Fig. 256. étoit perpendiculaire à quelqu'une des directions des puissances P, Q, R, S, T, & du poids K supposé en équilibre avec toutes ces puissances; la vitesse virtuelle (Déf. 30.) & conséquemment l'Energie de cette puissance (le poids K étant pris pour une) s'y trouveroit anéantie; & des Energies restantes aux autres puissances, plusieurs y deviendroient affirmatives ou négatives, de négatives ou d'affirmatives qu'elles sont ici. Par exemple, si Aa étoit perpendiculaire sur la direction AN du poids K, il est manifeste, non seulement que ce poids auroit alors sa vitesse virtuelle $AK=0$, & conséquemment aussi son Energie $K \times AK=0$, mais encore que l'angle alors droit $\angle AK$ rendroit Ap, Ar, As, négatives; & conséquemment changeroit (Déf. 32.) de négatives en affirmatives les Energies des puissances R, S, & d'affirmative en négative celle de la puissance P, sans rien faire de pareil aux Energies des puissances Q, T. Ce qu'on voit ici de Aa perpendiculaire sur la direction AN du poids K, on le verra pareillement de la même Aa perpendiculaire sur la direction de quelqu'une des puissances P, Q, R, S, T, &c. supposées en équilibre avec ce poids K.

PARTIE II.

Pour l'équilibre d'un poids soutenu avec des Poulies.

Fig. 252.

I. Soit la puissance M en équilibre avec le poids P sur la Poulie HK fixe en son centre C . Il est manifeste que quelque mouvement qu'on donne à cette Poulie autour de ce centre fixe C , la puissance M & le poids P , appliqués aux extrémités d'une corde $MHKP$, que le frottement empêche de glisser sur cette Poulie HK , parcourront des chemins égaux, en conservant toujours leurs mêmes directions HM , KP ; & qu'ainsi (Déf. 32.) ils auront toujours des vitesses virtuelles égales: de sorte que leur équilibre supposé les rendant toujours (Th. 14. Cor. 1.) égaux entr'eux, ils auront aussi toujours (Déf. 32.) des Energies égales, dont l'affirmative est du côté vers lequel on aura fait tourner la Poulie, & la négative de l'autre. *C'est cette égalité d'Energies qu'il falloit ici 1°. démontrer.*

II. Pour voir encore ici autrement une telle égalité d'Energies, soit tout le système mû d'un mouvement qui fasse parcourir à tous ses points des lignes parallèles & égales à la droite quelconque Aa perpendiculaire à AC , menée du centre C de la Poulie par le point A de concours des directions prolongées MH , PK , de la puissance M & du poids P supposez en équilibre entr'eux: soit, dis-je, ce mouvement tel que lorsque A sera en a , ces directions AM , AP , soient sur leurs parallèles am , ap . Cela posé, soient am , ap , perpendiculaires en m , p , sur ces directions prolongées; l'on aura, suivant la Déf. 32. Am , Ap , pour les vitesses virtuelles de la puissance M & du poids P ; & $M \times Am$, $P \times Ap$, pour leurs Energies, dont la seconde sera ici affirmative, & la première négative. Or la droite AC divisant également en deux l'angle HAK , les droites (Hyp.) CAa , & en m , p , rendent $Ap = Am$, de même que le Corol. 1. du Th. 14. rend $P = M$; ce qui donne $P \times Ap = M \times Am$. Donc l'Energie affirmative du

Fig. 253.

Fig. 252.

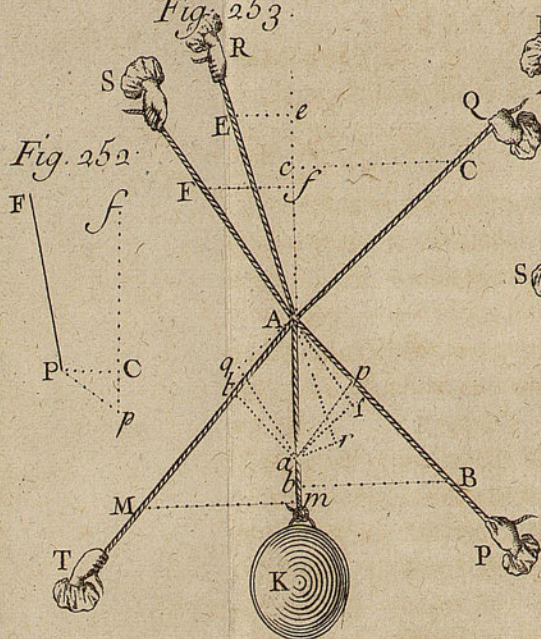


Fig. 254.

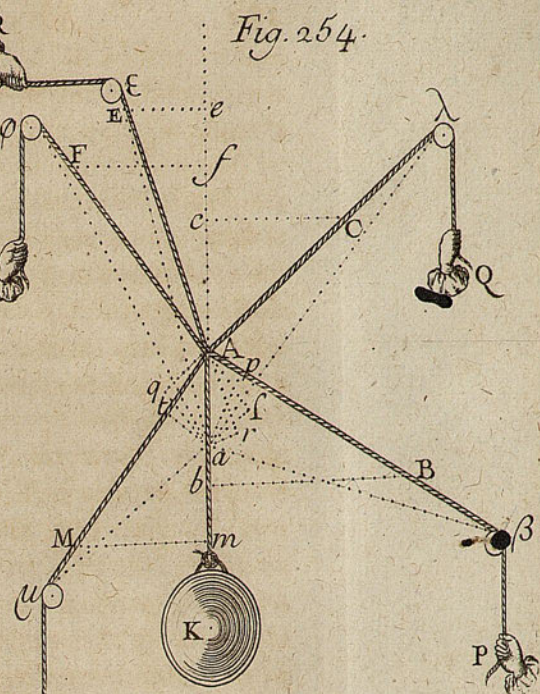


Fig. 255.

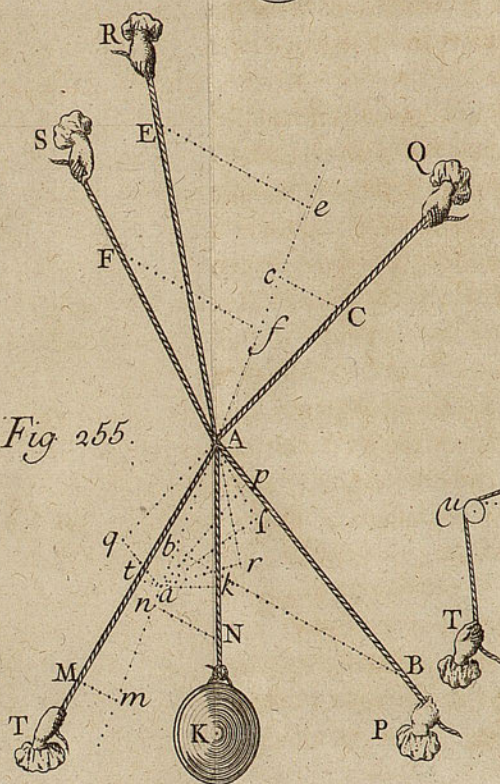
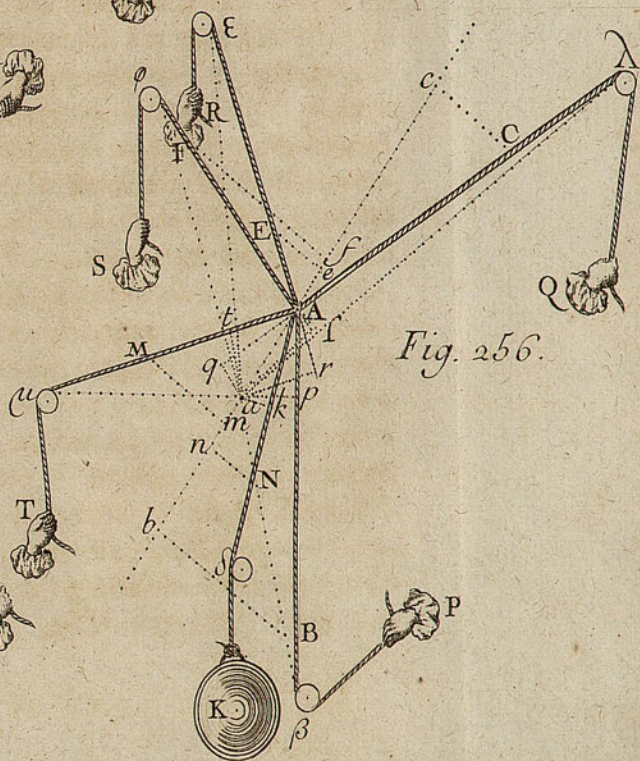


Fig. 256.



poids P est ici égale à l'Energie negative de la puissance R supposée en équilibre avec lui. Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.

Voilà pour les Poulies de centres fixes : voici presentement pour celles dont les centres sont mobiles.

III Si le poids P est suspendu au centre C mobile d'une Poulie HK , que deux puissances M, N , soutiennent avec une corde $MHKN$, sur laquelle cette Poulie soit appuyée avec le poids qui la charge ; de laquelle corde les parties HM, HN , prolongées, rencontrent ensemble (*part. 1. du Th. 14.*) en quelque point A la direction CP aussi prolongée du poids P ; sur laquelle direction CP prolongée vers B , soit de longueur quelconque la diagonale AB du parallelogramme $AEBF$, dont les côtes AE, AF , soient sur les directions HM, KN , des puissances M, N , & dont la seconde diagonale EF rencontre la premiere AB en D . Soit prise aussi Aa de longueur quelconque sur la direction BP du poids P ; & de son point a soient am, an , paralleles aux directions HM, KN , des puissances M, N ; duquel point a soient aussi am, an , perpendiculaires en m, n , à ces directions prolongées.

Cela fait ou imaginé, le Corol. 5. du Lem. 3. fera voir, comme dans la démonstr. 1. de la part. 2. du Th. 14. que les lignes AB, AE, AF , sont proportionnelles au poids P , & aux puissances M, N , (*Théor. 14. Corol. 1.*) égales entr'elles, leurs proportionnelles AE, AF , seront aussi égales entr'elles ; & conséquemment la diagonale EF du parallelogramme $AEBF$ sera perpendiculaire en D à son autre diagonale AB , de même que am, an , le sont (*Hyp.*) aux directions AE, AF , prolongées des puissances M, N . Donc les triangles rectangles Ama, ADE ; Ana, ADF , sont ici semblables entr'eux d'eux à deux, & même tous quatre semblables entr'eux, chacun à chacun. Par conséquent en appellant D chacun des efforts de A vers D , que sont (*Lem. 3. Corol. 6.*) les puissances M, N , directement contre le poids P ; lesquels efforts de A vers D , ou vers B , sont égaux entr'eux, à cause que (*Th. 14.*)

Fig. 257
260.

Corol. 1.) ces deux puissances M, N , le sont entr'elles, de même que leurs proportionnelles AE, AF : l'on aura ici (comme dans l'art. 1. de la part. 1.) $Aa. Am :: AE. AD$

$$:: M. D = \frac{M \times Am}{Aa}. \text{ Et } Aa. An :: AF. AD :: N. D = \frac{N \times An}{Aa}$$

Ce qui (à cause de l'égalité qu'on vient de voir entre ces efforts D) donne $2 \times D = \frac{M \times Am + N \times An}{Aa}$. Or on vient

de voir que $D. M :: AD. AE$. Et $M. P :: AE. AD$. Ce qui (en raison ordonnée) donne $D. P :: AD. AB$. Et conséquemment $2 \times D. P :: 2 \times AD. AB$. Donc, puisque $AB = 2 \times AD$, l'on aura pareillement ici $P = 2 \times D =$

$$\frac{M \times Am + N \times An}{Aa}; \text{ d'où résulte } P \times Aa = M \times Am + N \times An.$$

Soit présentement une force étrangère qui rompe l'équilibre supposé entre les puissances M, N , & le poids P , en faisant parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite quelconque Aa , de manière que ces directions soient toujours parallèles chacune à soi-même, & que lorsque ce point A sera en a , celles AM, AN , des puissances M, N , soient sur leurs parallèles am, an chacune sur la sienne. Il est manifeste, suivant la Déf. 32. qu'en ce cas de rupture d'équilibre par un tel mouvement de tout le système, les lignes Aa, Am, An , exprimeroient les vitesses virtuelles du poids P , & des puissances M, N , dont l'équilibre supposé entr'eux seroit ainsi rompu; & que les produits $P \times Aa, M \times Am, N \times An$, en exprimeroient aussi les Energies. Donc venant de trouver ici $P \times Aa = M \times Am + N \times An$, l'on y aura l'Energie affirmative du poids P , égale à la somme des Energies négatives (affirmativement prises) des puissances M, N , supposées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

I V. Si l'on veut que le point A de concours des directions

ctions

ctions AM, AN, AP, des puissances M, N, & du poids P en équilibre avec elles, comme dans le précédent art. 3. soit presentement mû de A vers *a* suivant une droite arbitraire A*a* de direction quelconque, qui ne soit (si l'on veut) aucune de celles des puissances, ni du poids dont ce point A suivoit la direction CP dans cet art. 3. soit le parallelogramme AEBF le même encore ici que là, & de ses angles E, B, F, soient autant de perpendiculaires E*e*, B*b*, F*f*, sur la droite A*a* prolongée jusqu'à leurs rencontres en *e*, *b*, *f*. Du point *a* sur les directions prolongées MA, NA, AP, des puissances M, N, & du poids P, soient aussi autant de perpendiculaires *am*, *an*, *ap*, qui les rencontrent en *m*, *n*, *p*. Enfin de ce même point *a* soient *av*, *aw*, paralleles à ces directions AM, AN, AP, chacune à chacune.

Cela fait, il est manifeste que l'on aura encore ici les triangles rectangles Ama, AeE; Ana, AfF; Apa, AbB, semblables entr'eux deux à deux distinguez, comme on les voit ici: ce qui joint à la part. 1. du Lem. 3. comme dans la démonstr. 2. du Th. 6. (en appellant *e*, *f*, *b*, les efforts suivant Ae, Af, bA, résultans des absolus des puissances M, N, & du poids P, suivant leurs directions AM, AN, AP) donnera

$$Aa. Am :: AE. Ae :: M. e = \frac{M \times Am}{Aa}.$$

$$Aa. An :: AF. Af :: N. f = \frac{N \times An}{Aa}.$$

$$Aa. Ap :: AB. Ab :: P. b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$\text{Donc } b.e + f :: \frac{P \times Ap}{Aa} . \frac{M \times Am + N \times An}{Aa} :: P \times Ap. M \times Am + N \times An.$$

Or la part. 1. du Lem. 3. & la démonstr. de la part. 2. du Th. 14.

$$\text{Donnent ensemble } \left\{ \begin{array}{l} e. M :: Ae. AE. \\ M. N :: AE. AF. \\ N. f :: AF. Af. \end{array} \right.$$

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura ici $e. f :: Ae. Af.$ Et (en composant) $e + f. f :: Ae + Af. Af.$

$$\text{L'on aura donc ici } \left\{ \begin{array}{ll} e + f. f :: Ae + Af. Af. & \\ f. N :: Af. & AF. \\ N. P :: AF. & AB. \\ P. b :: AB. & Ab. \end{array} \right.$$

Par conséquent (en multipliant encore par ordre) l'on aura $e + f. b :: Ae + Af. Ab.$ Or (Lem. 10.) $Ab = Ae + Af.$ Donc aussi $b = e + f.$ Mais on vient de trouver $b. e + f :: P \times Ap. M \times Am + N \times An.$ Donc enfin $P \times Ap = M \times Am + N \times An.$

Concevons présentement (comme dans le précédent art. 2.) que l'équilibre ici supposé entre les puissances M, N, & le poids P, soit rompu par une force qui fasse parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite Aa de longueur & de direction quelconques, de maniere que ces trois autres directions là soient toujours parallèles chacune à soi-même, & que lorsque le point A de leur concours sera en a, ces trois directions AM, AN, AP, des puissances M, N, & du poids P, soient sur leurs parallèles $a\mu, a\gamma, a\omega$, chacune confondue avec la sienne.

Un tel mouvement de tout le système ainsi conçu rompre l'équilibre ici supposé entre les puissances M, N, & le poids P, fera voir, suivant la Déf. 32. qu'alors les lignes Am, An, Ap, exprimeroient leurs vitesses virtuelles; & que les produits $M \times Am, N \times An, P \times Ap$, en exprimeroient les Energies. Donc venant de trouver $P \times Ap = M \times Am$

$+N \times An$, l'on aura encore ici (comme dans le précédent art. 3.) l'Energie affirmative du poids P, égale à la somme des Energies negatives (prises affirmativement) des puissances M, N, supposées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

V. 1°. Si l'on veut presentement que la direction Aa du mouvement donne (art. 4.) au point A de concours des directions des puissances M, N, & du poids P, soit celle AP de ce poids P, comme dans l'art. 3. Cette hypothese, qui fait tomber a en p , rendant $Ap = Aa$, changera l'équation $P \times Ap = M \times Am + N \times An$ du précédent art. 4. en $P \times Aa = M \times Am + N \times An$, qui est celle de l'art. 3. dans lequel le mouvement du point A se fait comme ici, suivant la direction AP du poids P, parallelement à laquelle on suppose ici comme là, que tous les autres points du système se meuvent pendant le passage de A en a suivant Aa .

2°. Si l'on veut que cette direction Aa du point A, soit celle d'une des puissances M, N, par exemple, celle MA de la puissance M; cette hypothese rendant $Am = Aa$, changera pour icil'équation du précédent art. 4. en $P \times Ap = M \times Aa + N \times An$. Et si Aa étoit suivant NA, l'on auroit de même $P \times Ap = M \times Am + N \times Aa$.

3°. Si l'on veut presentement que cette direction Aa du point A, soit perpendiculaire à la direction d'une des puissances M, N, ou du poids P, par exemple, à la direction AM de la puissance M, comme dans la Fig. 263. Cette hypothese, qui dans les Fig. 261. 262. fait tomber am sur Aa , rendant ainsi $Am = 0$, réduiroit pour icil'équation du précédent art. 4. à $P \times Ap = N \times An$. Ce seroit la même chose, si le cordon MH de la puissance M, étoit attaché à quelque clou ou crochet fixe en M, lequel par sa résistance suppléât la puissance M, comme dans la Fig. 263. Mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle, qui auroit M pour centre, devroit être infiniment petite; & conséquemment aussi An , Ap , pour conserver la ressemblance des triangles, qui dans le précédent art. 4.

ont donné l'équation dont celle-ci résulte, par laquelle on voit que l'Energie $M \times Am$ de la puissance M , seroit ici nulle.

120. 263.

VI. Ce nomb. 3. du precedent art. 5. peut encore se démontrer immédiatement, en supposant un arc infiniment petit Aa , décrit du centre M , de l'extrémité a duquel tombent deux perpendiculaires an , ap , sur les directions prolongées NA , AP , de la puissance N , & du poids P en équilibre avec elle à l'aide du clou ou crochet fixe M , auquel la corde $NKHM$, qui soutient la Poulie KH chargée du poids P en son centre mobile C , est attachée par son extrémité M . Car si de quelque point du cordon MH , par exemple, de son point M on mene MB , MD , perpendiculaires en B , D , sur les directions prolongées PA , AN , du poids P , & de la puissance N , les angles (*constr.*) droits MAa , ApA , Ana , qui rendent les autres $Aap = MAB$, $Aan = MAD$, rendant ainsi les triangles rectangles ApA , MBA ; Ana , MDA , semblables entr'eux deux à deux, distinguez comme on les voit ici; l'on y aura $Aa. Ap$

$$:: AM. MB = \frac{AM \times Ap}{Aa}. \text{ Et } Aa. An :: AM. MD = \frac{AM \times An}{Aa}$$

$$\text{Et par consequent } MB. MD :: \frac{AM \times Ap}{Aa} . \frac{AM \times An}{Aa} :: Ap. An.$$

Or en prenant Am pour le sinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) MB , MD , pour les sinus des angles MAB , MAD , dont le second est ici double du premier; & conséquemment dont les sinus MB , MD , sont entr'eux (*Th. 14. part. 2.*) comme la puissance N , & le poids P supposé en équilibre avec elle. Donc on aura ici $N. P :: Ap. An$. Et conséquemment $P \times Ap = N \times An$. Or si l'on imagine cet équilibre rompu par une force qui fasse parcourir Aa au point A , en faisant passer MA sur Ma , infiniment proche d'elle, & AP , AN , sur aw , av , soit qu'elles leur soient paralleles chacune à chacune, ou qu'elles fassent des angles infiniment petits chacune avec sa correspondante; suivant la *Déf. 32.* que Ap , An , exprimeront les vitesses

virtuelles du poids P , & de la puissance N ; & que $P \times Ap$, $N \times An$ en exprimeront les Energies, desquelles la première sera ici affirmative, & la seconde negative. Donc l'Energie affirmative du poids P sera ici égale à l'Energie negative de la puissance N supposée en équilibre avec lui, à l'aide du clou ou crochet fixe M , & la résistance de ce clou ou crochet sans aucune Energie: le tout comme dans le nomb. 3. du précédent art. 5. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Si sans aucune Poulie HK , le poids P étoit soutenu seulement avec des cordes AP , AM , AN , attachées ensemble par un nœud commun A , desquelles cordes la seconde AM fut attachée par son extrémité M au crochet fixe de ce nom, & la troisième AN retenue par une puissance N , qui soutient ainsi ce poids P appliqué à la première AP : ce poids P étant encore ici (*Th. 1. Corol. 3.*) à cette puissance N , comme le sinus MD de l'angle total MAN , au sinus MB de l'angle partial MAB , quelque rapport qu'il y eût présentement entre ces deux angles; un raisonnement semblable au précédent, fera voir que l'Energie affirmative $P \times Ap$ du poids P , est encore ici égale à l'Energie negative $N \times An$ de la puissance N en équilibre avec lui, de la maniere qu'on le suppose ici.

Ceci peut entrer dans la précédente part. 1. comme peut entrer dans celle-ci ce qu'on a fait voir dans les art. 1. 2. de celle-là touchant l'équilibre d'un poids soutenu par plusieurs puissances avec des cordes appuyées sur des Poulies de centres fixes dans les Fig. 254. 256.

PARTIE III.

Pour l'équilibre d'un Poids soutenu par une puissance sur le Tour.

I. Soit la puissance R en équilibre avec le poids P sur le Tour DBN . Du centre A de cette Machine vue de profil, soient deux rayons AM , AN , qui interceptent des arcs quelconques semblables BN , bn , des circonferences de la

FIG. 254.

B b iij

roue DBN, & de son rouleau Mbn. Il est visible que si autour du centre fixe A de cette Machine, on lui cause quelque mouvement qui fasse passer B en N, & conséquemment *b* en *n*; le cordon NR que la puissance R tient ferme sans le laisser couler, s'allongera de la valeur de BN sans changer de direction, la puissance R reculant de cette valeur suivant cette même direction NR, pendant que le cordon MP du poids P s'accourcira de la valeur de *bn*, sans changer non plus de direction, en faisant monter ce poids P de cette valeur suivant cette même direction MP: de sorte que (*Déf.* 32.) BN, *bn*, exprimeront ici les vîteses virtuelles de cette puissance R, & de ce poids P, dont les Energies seront ainsi exprimées (*Déf.* 32.) par les produits $R \times BN$, $P \times bn$; desquelles Energies (*Déf.* 32.) la première sera affirmative, & l'autre negative. Or l'équilibre ici supposé entre ce poids P & cette puissance R, y donne (*Th.* 19. *Cor.* 1.) $R. P :: Ab. AB :: bn. BN$. D'où résulte $R \times BN = P \times bn$. Donc en ce cas d'équilibre l'Energie affirmative de la puissance R sera égale à l'Energie negative (prise affirmativement) du poids P. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

Fig. 165.
266. 267.
268.

II. Cette égalité d'Energies peut encore se démontrer en rompant l'équilibre ici supposé entre le poids P & la puissance R, par un mouvement de tout le système, qui fasse décrire à tous ses points des lignes droites égales, & toutes perpendiculaires à la droite AE menées du centre A de la Machine par le point E de concours des directions prolongées MP, NR, du poids P & de la puissance R; de sorte que pendant que ce centre A de la Machine parcourra Aa, le point de concours E de ces directions parcourra Ee parallèle & égale à Aa, & perpendiculaire (comme elle) sur AE; & que lorsque les points A, E, seront en *a, e*, les directions ME, NE, AE, du poids P, & de la puissance R, & (*Th.* 30. *part.* 2.) de la charge du centre A de la Machine, ainsi mûes parallèlement chacune à soi-même, soient sur leurs parallèles *me, ne, ae*.

Cela conçu, si du point *e* on mene *ep, er*, perpendicu-

laires en p, r , sur les directions prolongées ME, NE , du poids P , & de la puissance R , l'on aura (*Déf.* 32.) Ep, Er , pour les expressions des vitesses virtuelles de ce poids P & de cette puissance R ; ce qui donnera (*Déf.* 32.) $P \times Ep, R \times Er$, pour leurs Energies, dont la première sera ici (*Déf.* 32.) affirmative, & la seconde négative dans les Fig. 265. 268. la première au contraire sera négative, & la seconde affirmative dans les Fig. 266. 267.

De plus, si l'on mène les rayons AM, AN , du rouleau & de la roue de la Machine par les points M, N , où ils sont touchés par les directions ME, NE , du poids P & de la puissance R ; les angles (*constr.*) droits AEe, epE, erE , rendant les autres angles $Eep = AEM, Eer = AEN$, les triangles (*constr.*) rectangles $Epe, AME; Ere, ANE$, seront ici semblables entr'eux deux à deux, comme on les y voit distinguez: ce qui donnera $Ee. Ep :: AE. AM =$

$$\frac{AE \times Ep}{Ee}. \text{ Et } Ee. Er :: AE. AN = \frac{AE \times Er}{Ee}. \text{ Donc on aura ici}$$

$$AM. AN :: \frac{AE \times Ep}{Ee} . \frac{AE \times Er}{Ee} :: Ep. Er. \text{ Or dans l'équilibre}$$

qu'on y suppose entre le poids P & la puissance R , le Corol. 1. du Th. 14. donne $R. P :: AM. AN$. Donc on y aura aussi pour lors $R. P :: Ep. Er$. Et par conséquent $P \times Ep = R \times Er$; c'est-à-dire (suivant ce qu'on vient de voir des Energies) que l'Energie $P \times Ep$ du poids P , affirmative dans les Fig. 265. 266. & négative dans les Fig. 266. 267. sera ici égale à l'Energie $R \times Er$ de la puissance R supposée en équilibre avec ce poids P , laquelle seconde Energie $R \times Er$ sera au contraire négative dans les Fig. 265. 268. & affirmative dans les Fig. 266. 267. de sorte que dans le cas présent d'équilibre entre ces deux forces P, R , l'Energie affirmative de l'une sera toujours égale à l'Energie négative (affirmativement prise) de l'autre. Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.

III. Si avec les Energies du poids P , de la puissance R , supposez en équilibre entr'eux sur le Tour DN , on veut

FIG. 265.
270. 271.
272.

y comprendre aussi l'Energie de la résistance du centre fixe A de ce Tour directement (*Ax. 4.*) opposée & égale à la charge qui lui résulte (*Th. 14. part. 2. 3.*) de A vers F suivant EF du concours de ce poids P & de cette puissance R, soit encore ici tout le système mû parallèlement à la droite Aa de longueur arbitraire, mais presentement de direction quelconque, & de maniere encore que pendant que le centre A de la Machine parcourra cette droite Aa, le point E de concours des directions PE, RE, AE, du poids P, de la puissance R, & de la résistance (que j'appelle B) du centre A de la Machine, parcourra Ec égale & parallele à Aa; & que lorsque A sera en a, & E en e, ces directions PE, RE, AE, du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine, ainsi mûes parallelement à elles-mêmes, soient sur leurs paralleles *me, ne, ae*. Alors si du point e l'on mene *ep, er, eb*, perpendiculaires en *p, r, b*, sur ces directions prolongées du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine, l'on aura (*Déf. 32.*) *Ep, Er, Eb*, pour les vitesses virtuelles de ce poids P, de cette puissance R, & de cette résistance B; & $P \times Ep$, $R \times Er$, $B \times Eb$, pour leurs Energies, desquelles la dernière $B \times Eb$ sera affirmative, & les deux autres negatives dans les Fig. 269. 270. Pour dans les Fig. 271. 272. les Energies $R \times Er$, $B \times Eb$, y sont toutes deux affirmatives, & $P \times Ep$ est la seule qui y soit negative.

Ces Energies étant ainsi reconnues, soit le parallelogramme EGFH d'une diagonale quelconque EF, prise depuis E vers F sur la direction EA ou AE prolongée de la résistance B de la Machine, & des côtez EG, EH, pris sur les directions prolongées ME, NE, du poids P & de la puissance R. Si des angles G, H, F, de ce parallelogramme, on mene *Gg, Hh, Ff*, perpendiculaires en *g, h, f*, sur *eE* prolongée, comme le sont (*Hyp.*) *ep, er, eb*, en *p, r, b*, sur ces directions ME, NE, AE, prolongées du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine; il est visible que les triangles ainsi rectangles *Epe, EgG*,

EgG ; Ere , EbH ; Ebe , EfF , seront semblables entr'eux deux à deux distinguez comme on les voit ici, ayant ainsi deux à deux leurs angles opposez au sommet E , égaux entr'eux.

$$\left\{ \begin{array}{l} Ee. Ep :: EG. Eg = \frac{EG \times Ep}{Ee} \end{array} \right.$$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} Ee. Er :: EH. Eb = \frac{EH \times Er}{Ee} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ee. Eb :: EF. Ef = \frac{EF \times Eb}{Ee} \end{array} \right.$$

Or (*Lem. 10.*) $Ef = Eg \pm Eb$, en y prenant le supérieur du double signe $+$ pour le cas des Fig. 269. 270. & l'inférieur pour le cas des Fig. 271. 272. Donc aussi $EF \times Eb = EG \times Ep \pm EH \times Er$, en y prenant de même le double signe \pm . Or (*Th. 19. part. 3.*) $B. P :: EF. EG = \frac{EF \times P}{B}$. Et

$$B. R :: EF. EH = \frac{EF \times R}{B}. \text{ Donc la substitution de ces va-}$$

leurs de EG , EH , dans l'équation qui les précède, la changeant en $EF \times Eb = \frac{EF \times P \times Ep \pm EF \times R \times Er}{B}$, l'on aura

ici $B \times Eb = P \times Ep + R \times Er$; sçavoir, $B \times Eb = P \times Ep + R \times Er$ dans le cas des Fig. 269. 270. Et $B \times Eb = P \times Ep - R \times Er$, ou $B \times Eb - R \times Er = P \times Ep$ dans le cas des Fig. 271. 272. D'où l'on voit (suivant les Energies trouvées ci-dessus) que dans le cas des Fig. 269. 270. l'Energie affirmative de la résistance B du centre A de la Machine en question, est égale à la somme des Energies negatives (affirmativement prises) du poids P & de la puissance R supposée en équilibre avec lui sur cette Machine; & que dans le cas des Fig. 271. 272. la somme des Energies affirmatives de la résistance B du centre A de la Machine, & de la puissance R , est égale à l'Energie negative (affirmativement prise) du poids P . Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On voit assez par tout ce qu'on a dit jusqu'ici des Energies, qu'elles ne sont affirmatives ou negatives, qu'autant que le mouvement du système favorise ou contrarie les puissances (j'y comprends aussi les poids) & les résistances dont elles sont les Energies ; & qu'ainsi ce mouvement étant arbitraire, il le sera aussi de rendre affirmative ou negative celle qu'on voudra de ces Energies ; il sera de même de celles dont nous allons encore parler. Voici dans les articles suivans quelques exemples de ces changemens arbitraires d'Energies affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives.

IV. 1°. Si dans les Fig. 269. 272. on imagine Aa en ligne droite avec AE, ou sa parallele Ee couchée sur EA, ayant *e* vers A ; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire Aa couchée sur AE ou sa parallele Ee en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A : ce changement de situation Aa ou Ee, du mouvement supposé (art. 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le système, ne faisant qu'augmenter les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, sans rien changer à l'affirmatif ou au negatif de ces Energies, & sans en anéantir aucune; les égalitez qu'on en vient de trouver dans le précédent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. resteront encore ici les mêmes, & avec les mêmes significations d'affirmatifs ou de négatifs d'Energies, qu'on leur a trouvées là pour chacune de ces quatre Figures.

2°. Mais si dans les Fig. 269. 270. l'on imagine Aa couchée sur AE, ou sa parallele Ee en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A ; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire Aa en ligne droite avec AE, ou sa parallele Ee couchée sur EA, ayant *e* vers A : ce changement de situation de la direction Aa, ou Ee, du mouvement supposé (art. 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le système, changeant seulement les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, d'affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives, en les

augmentant encore toutes comme dans le nomb. 1. les égalitez qu'on vient de trouver dans le précédent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. resteront encore ici les mêmes que là, & que dans le précédent nomb. 1. mais presentement avec des significations d'affirmatif & de negatif de ces Energies, contraires à celles qu'elles ont dans cet art. 3. & dans ce précédent nomb. 1.

V. Si presentement on suppose que la droite *Aa* ou sa parallele *Ee* soit perpendiculaire sur *EA* dans les presentes Fig. 269. 270. 271. 272. comme dans l'art. 2. Fig. 265. 266. 267. 268. Ce cas rendant $Eb=0$, & conséquemment aussi $B \times Eb=0$, réduiroit par cela seul à $0=P \times Ep + R \times Er$ l'équation que le précédent art. 3. a donné pour les Fig. 269. 270. & à $R \times Er=P \times Ep$ celle que ce même art. 3. a aussi donnée pour les Fig. 271. 272. Donc conformément à l'art. 2. de qui c'est ici le cas,

1°. Ce cas de *Ee* perpendiculaire sur *EA*, rendant de plus *Er* negative, en la renversant de l'autre côté de *E* sur *RE* prolongée vers *H* dans la Fig. 269. comme elle l'est dans la Fig. 266. & rendant aussi *Ep* negative, en la renversant de même de l'autre côté de *E* sur *EP* dans la Fig. 270. comme elle l'est dans la Fig. 265. changera l'équation $0=P \times Ep + R \times Er$ qu'il vient de donner pour ces Fig. 269. 270. en $P \times Ep=R \times Er$, qui dans la Fig. 267. ainsi conformée à la Fig. 266. fera voir qu'alors l'Energie affirmative de la puissance *R* fera égale à l'Energie negative du poids *P*, comme dans l'art. 2. Fig. 266. dont c'est ici le cas; & qui dans la Fig. 270. pareillement conformée à la Fig. 265. fera voir au contraire qu'alors l'Energie negative de la puissance *R*, fera égale à l'Energie affirmative du poids *P*, comme dans le même art. 2. Fig. 266. dont c'est pareillement ici le cas.

2°. Le cas supposé de *Ee* perpendiculaire sur *EA*, rendant à la fois *Ep*, *Er*, negatives dans la Fig. 272. en y renversant *Ep* de l'autre côté de *E* sur *EP*, & *Er* de l'autre côté de *E* sur *RE* prolongées, comme elles le sont dans la Fig. 268. sans rien changer à la Fig. 271. que d'y ren-

dre Ee perpendiculaire sur AE , comme dans les trois autres précédentes Fig. 269. 270. 271. de ce présent art. 5. laissera l'équation $R \times Er = P \times Ep$, telle qu'on l'y vient de trouver pour les Fig. 271. 272. sans en changer que la signification d'affirmatif ou de négatif d'Energies pour la Fig. 272. ainsi conformée à la Fig. 269. dans laquelle la Fig. 272. ainsi conformée, cette équation signifiera que l'Energie négative de la puissance R sera pour lors égale à l'Energie affirmative du poids P , comme dans l'art. 2. Fig. 268. dont c'est ici le cas ; signifiant au contraire dans la Fig. 271. que l'Energie affirmative de la puissance R , sera pour lors égale à l'Energie négative du poids P , comme dans cet art. 2. Fig. 266. dont c'est pareillement ici le cas, qui anéantit seulement l'Energie de la résistance B du centre fixe A de la Machine dans cette Fig. 271. comme dans les trois autres Fig. 269. 270. 272. du présent art. 5. sans rien changer à l'affirmatif ni au négatif des Energies de la puissance R , & du poids P dans cette Fig. 271.

Un raisonnement pareil à celui du précédent art. 5. fera voir que Ee perpendiculaire sur la direction EP du poids P , ou sur celle ER de la puissance R , y anéantiroit l'Energie de ce poids ou de cette puissance, & qu'elle y feroit ou ne feroit pas des changemens d'affirmatif ou de négatif, ou tous les deux ensemble dans les deux autres Energies restantes, comme l'on voit dans cet art. 5. qu'il doit arriver aux Energies restantes de ce poids P & de cette puissance R , lorsque Ee perpendiculaire sur la direction EA de la résistance B du centre fixe A de la Machine, y anéantit l'Energie de cette résistance B . Tout cela est presentement trop manifeste pour s'y arrêter davantage.

FIG. 269.
270 271.
272.

V I. Il est à remarquer que si les directions ER , EP , de la puissance R , & du poids P , supposez en équilibre entr'eux sur le Tour en question, devenoient parallèles entr'elles, & conséquemment aussi (Lem. 6. Corol. 1. 2.) à la direction AE de la résistance B du centre fixe A de cette Machine; & que la direction Aa ou Ee du mouvement

suppose (*art.* 3. 4. 5.) dans tout le système, fût perpendiculaire à quelqu'une de celles-là ; les Energies de cette puissance R , de ce poids P , & de cette résistance B , y cesseroient toutes à la fois dans l'*art.* 4. comme dans les *art.* 3. & 5. dans lesquels Ee perpendiculaire (*Hyp.*) à AE , le seroit aussi à ER , EP , ici parallèles à AE . Car cette direction Ee du mouvement de tout le système, se trouvant ainsi perpendiculaire aux trois directions ER , EP , AE , de la puissance R , du poids P , & de la résistance B de l'axe ou du centre A de la Machine, les lignes er , ep , eb , aussi perpendiculaires (*Hyp.*) à ces trois directions ER , EP , AE , se confondroient toutes trois avec eE ; ce qui anéantissant à la fois toutes les vîteses virtuelles (*Déf.* 32.) Er , Ep , Eb , de la puissance R , du poids P , & de la résistance B de l'axe ou du centre A de la Machine, anéantiroit aussi à la fois toutes leurs Energies (*Déf.* 32.) $R \times Er$, $P \times Ep$, $B \times Eb$, ainsi qu'il le falloit faire voir.

C'est par cette raison que dans les *art.* 3. 5. dans lesquels Ee est supposée perpendiculaire à la direction AE de la résistance B de l'axe ou du centre A de la Machine, cette résistance B n'y a aucune Energie ; & que si les directions ER , EP , de la puissance R , & du poids P , y devenoient parallèles entr'elles, & conséquemment aussi (*Lezm.* 6. *Corol.* 1. 2.) à celle AE de la résistance B , les Energies de cette puissance R , & de ce poids P , cesseroient de même de s'y trouver.

Rien de tout cela ne doit paroître étrange ; puisqu'en ce cas de parallélisme entr'elles des trois directions ER , EP , AE , auxquelles Ee ou sa parallèle Aa seroit (*Hyp.*) perpendiculaire, quelque mouvement qu'on donnât à tout le système, suivant cette ligne Ee ou Aa , à laquelle tous les points de ce système décrivissent des parallèles comme dans les *art.* 3. 4. 5. desquels il s'agit ici, la puissance R , ni le poids P , ni la résistance B prise pour une puissance contraire en A suivant AE , n'auroient aucun mouvement suivant leurs directions ; ni conséquemment

FIG. 265
266. 267.
268.

FIG. 269.
& suivantes
jusqu'à 272.

(*Déf.* 32.) aucune vîtesse virtuelle, ni conséquemment encore (*Déf.* 32.) aucune Energie.

P A R T I E I V.

Pour l'équilibre sur des Leviers quelconques entre des puissances de directions aussi quelconques.

FIG. 273.
274. 275.

I. Soient les puissances E, F, de forces & de directions quelconques, appliquées à volonté à un Levier de figure aussi quelconque, & en équilibre entr'elles sur tel appui B qu'on voudra de ce Levier; duquel point B soient menées BD, BP, perpendiculaires en D, P, sur les directions prolongées ED, EP, de ces deux puissances E, F. Par ce point fixe B soit une ligne droite XO, posée à volonté, laquelle rencontre ces directions en X, O, & qui peut ainsi passer pour Levier droit, sur lequel appuyée en B, ces deux puissances E, F, qui lui seroient appliquées en X, O, suivant leurs directions supposées, seroient (*Th.* 21. *part.* 2. 5.) en équilibre entr'elles, comme on les suppose y être sur le Levier proposé quelconque suppléé par celui ci pour épargner les Figures, que la variété de celles de ce Levier proposé, multiplieroit inutilement.

Cela posé, & le Levier droit XO qui supplée celui-là, étant imaginé comme d'une piece avec lui, & d'angles invariables avec les directions proposées des puissances E, F, afin que le tout ensemble puisse être conçu mû comme d'une piece autour de l'appui fixe B, par quelque force étrangere que je suppose rompre presentement l'équilibre supposé entre les puissances E, F, & donner à tout le système un mouvement infiniment petit ou instantané autour de cet appui fixe B, lequel mouvement fasse passer XO en xo , en faisant décrire des infiniment petits Xx , Oo , aux points X, O, de ce Levier, & en faisant aussi passer les directions XE, OF, en xe , of , infiniment voisines d'elles, avec lesquelles elles fassent quelque part des

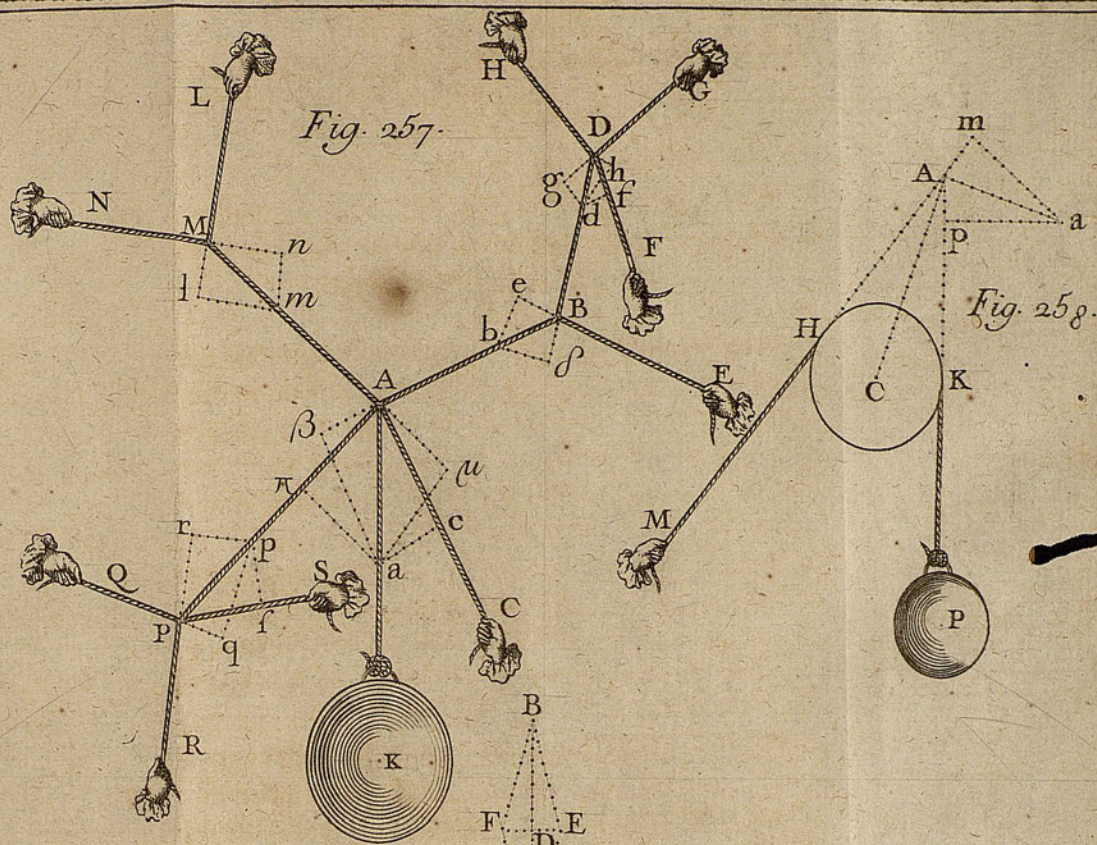


Fig. 260.

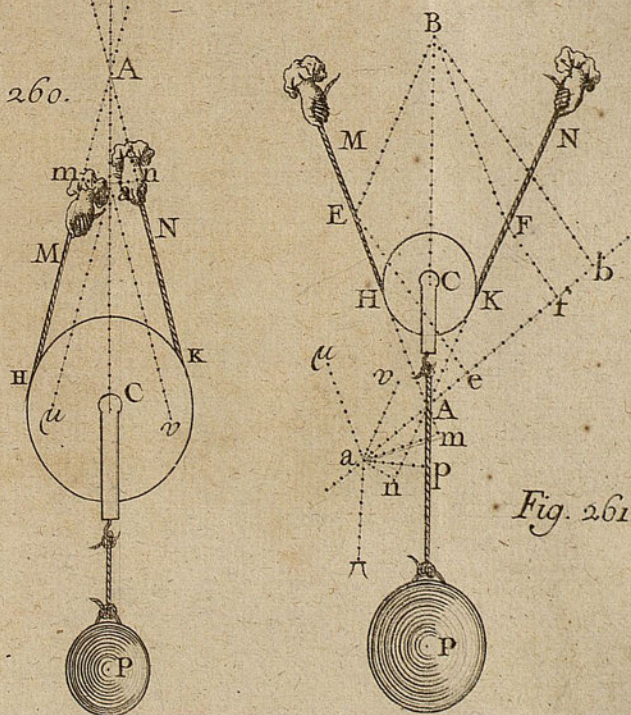


Fig. 259.

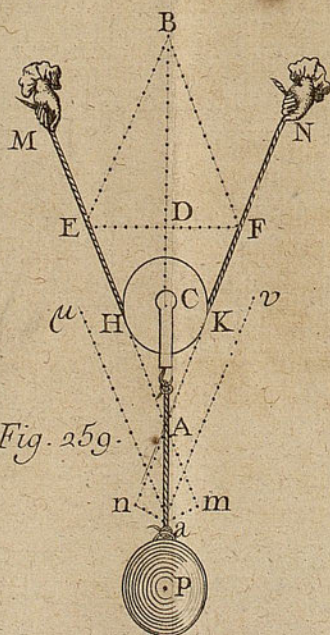


Fig. 262.

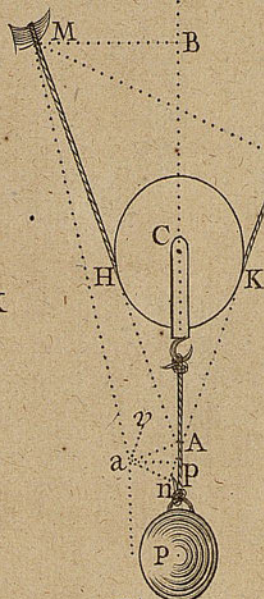
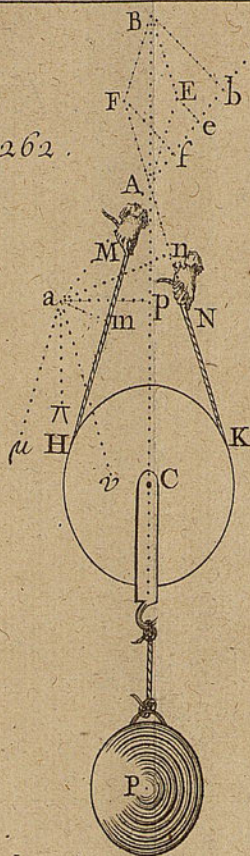


Fig. 263.

Fig. 264.

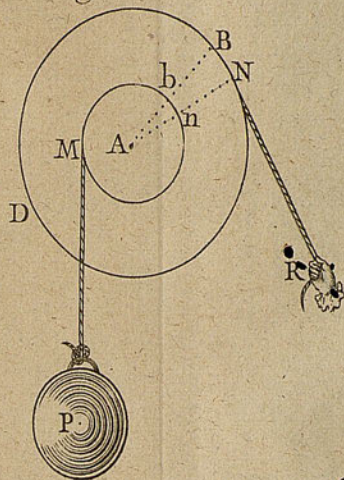


Fig. 266.

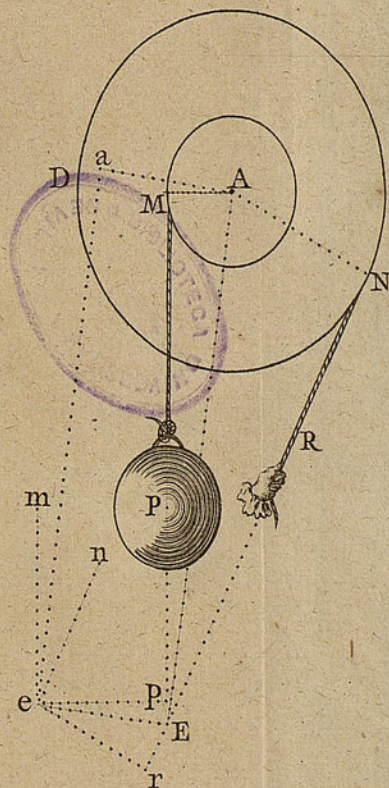
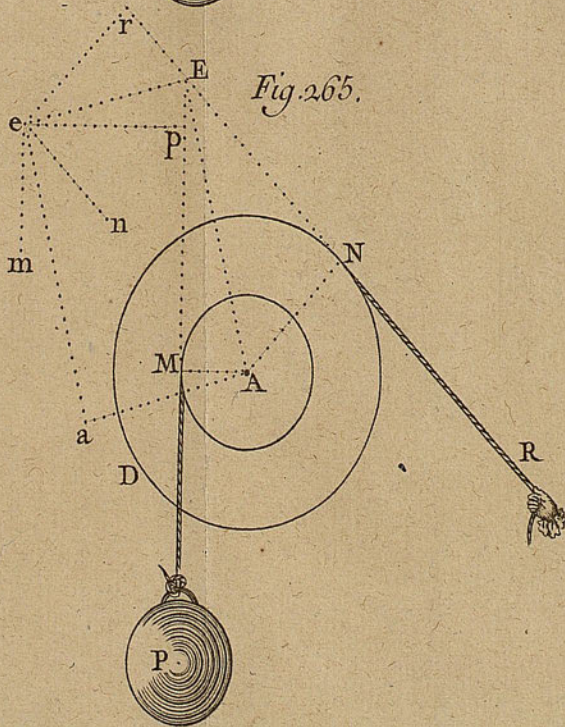
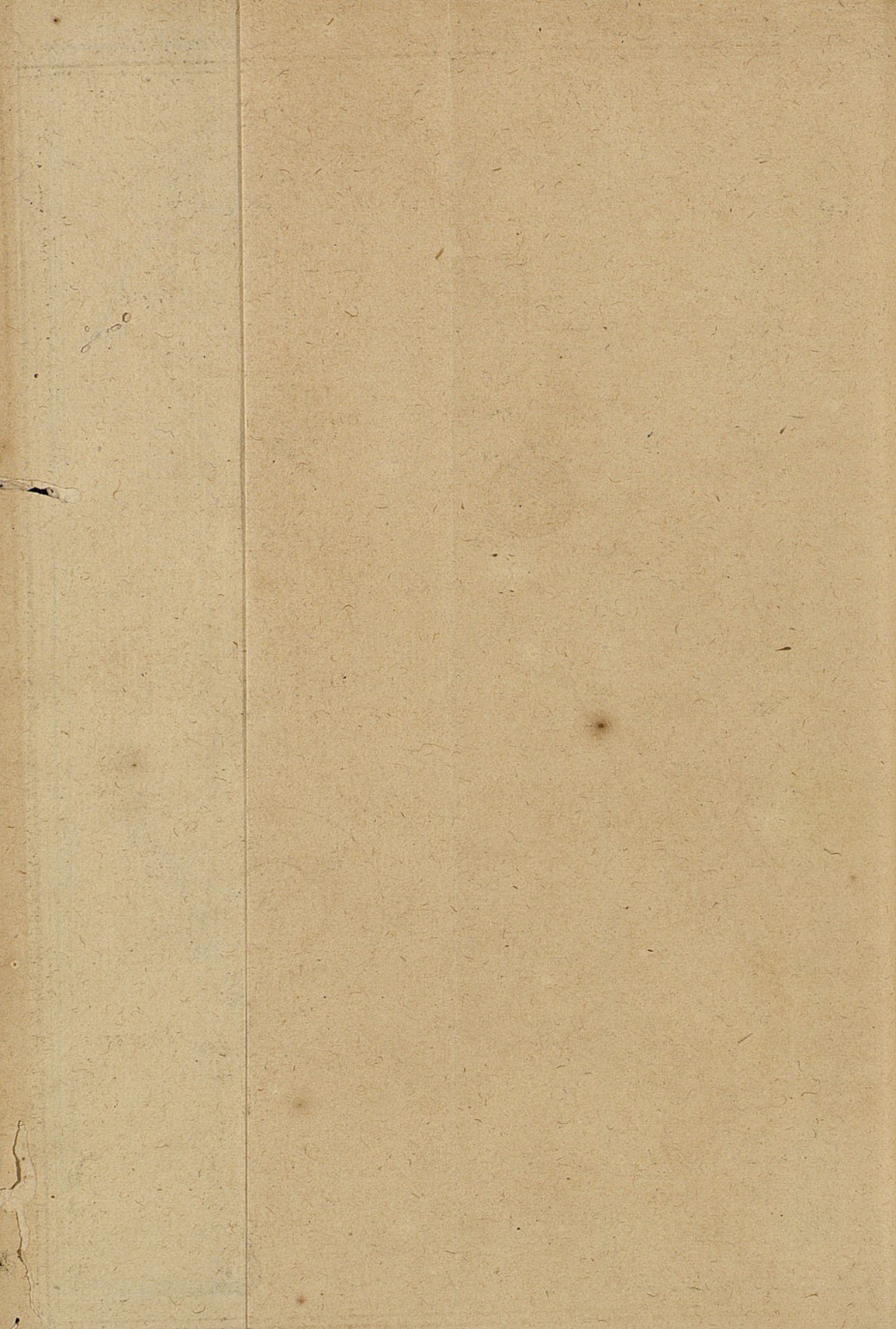
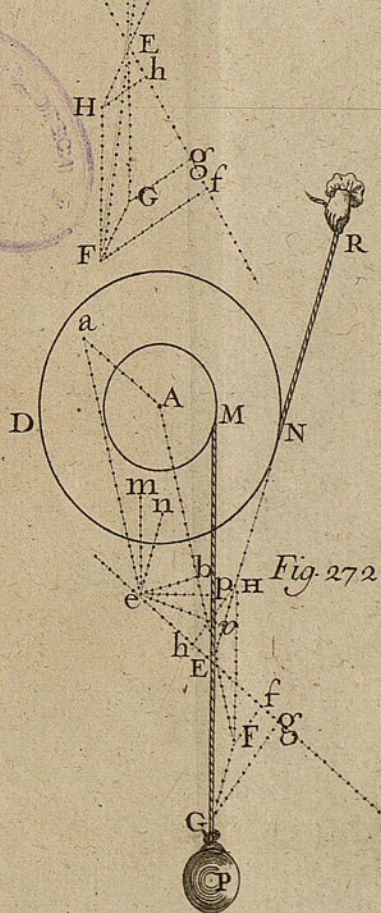
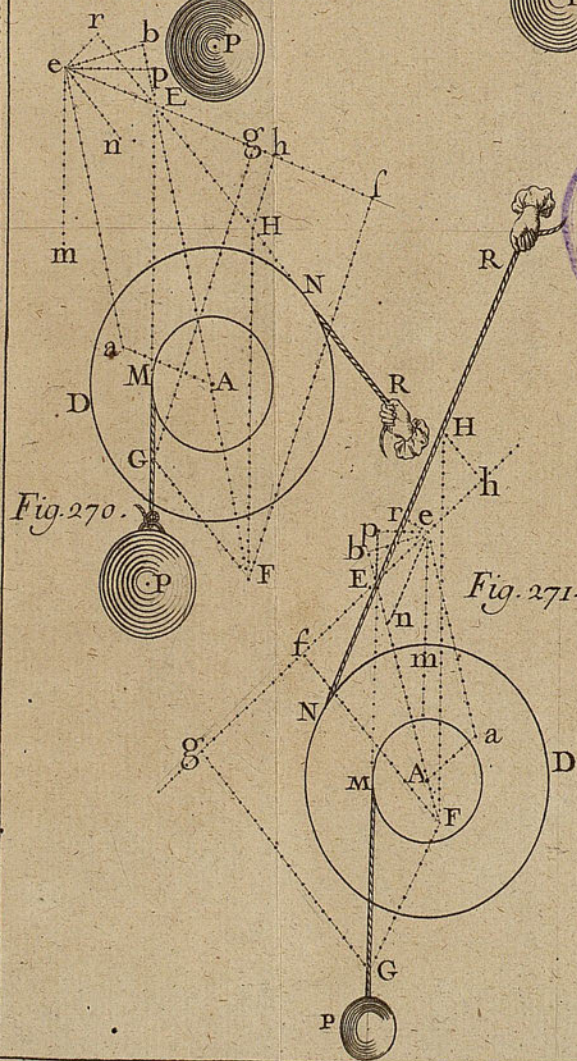
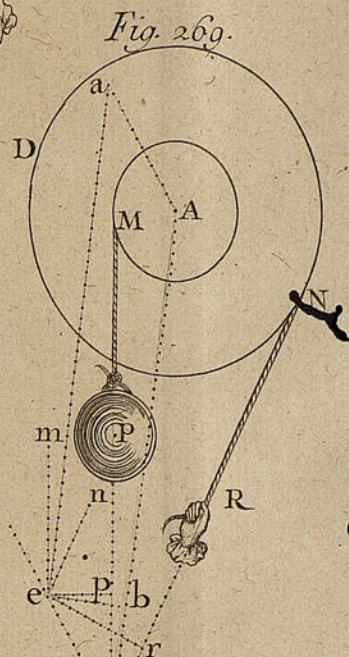
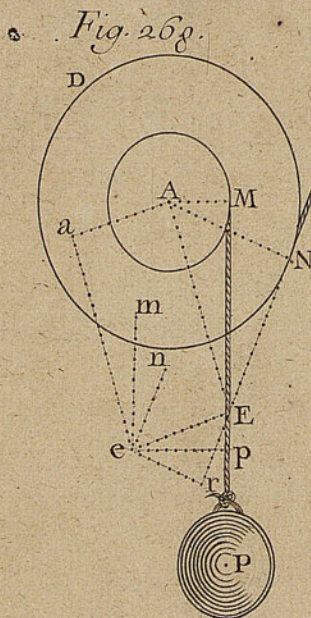
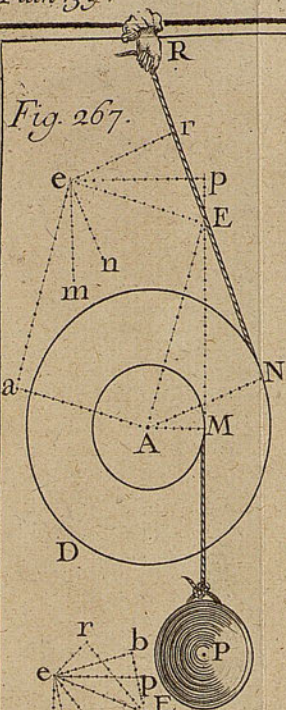


Fig. 265.







angles infiniment petits M, N, chacune avec sa correspondante, qui peut ainsi passer pour elle.

Un tel mouvement de tout le système autour du point fixe B, étant supposé, si des points x, ω , on imagine $x\varepsilon, \omega\phi$, perpendiculaires en ε, ϕ , sur les directions proposées XE, OF, des puissances E, F; on verra qu'il doit faire avancer la puissance E de la valeur de $X\varepsilon$ suivant sa direction, & faire reculer l'autre puissance F de la valeur de $O\phi$ suivant la sienne, pendant l'instant que le Levier XO passeroit de XO en $x\omega$; & qu'ainsi (*Déf. 32.*) les vitesses virtuelles de ces deux puissances E, F, seroient ici exprimées par $X\varepsilon, O\phi$; & leurs Energies par $E \times X\varepsilon, F \times O\phi$, dont la première seroit affirmative, & la seconde négative.

Or les angles (*constr.*) droits BXx, BDx , donnent $xX\varepsilon = XBD$; & les angles (*constr.*) droits $BO\omega, BPO$, donnent de même $\omega O\phi = OBP$. Donc les angles en ε, ϕ , étant aussi (*constr.*) droits comme en D, P, les triangles rectangles $X\varepsilon x, BDx; O\phi \omega, BPO$, sont ici semblables entr'eux deux à deux, comme on les voit ici distinguez.

Par conséquent on aura ici $Xx. X\varepsilon :: BX. BD = \frac{BX \times X\varepsilon}{Xx}$.

Et $O\omega. O\phi :: BO. BP = \frac{BO \times O\phi}{O\omega}$. Donc $BD. BP :: \frac{BX \times X\varepsilon}{Xx}$.

$\frac{BO \times O\phi}{O\omega}$ (à cause de $\frac{BX}{Xx} = \frac{BO}{O\omega}$) :: $X\varepsilon. O\phi$. Or l'équilibre ici

supposé donne (*Th. 21. Corol. 2.*) $BD. BP :: F. E$. Donc on y aura aussi $F. E :: X\varepsilon. O\phi$. Et par conséquent $E \times X\varepsilon = F \times O\phi$. Donc enfin venant de trouver $E \times X\varepsilon$ pour l'Energie affirmative de la puissance E, & $F \times O\phi$ pour l'Energie négative de la puissance F, la première de ces deux Energies sera ici égale à la seconde. *Ce qu'il falloit 1^o. démon-*

trer.

II. Si l'on veut présentement que les directions XE, OF, des puissances E, F, soient non seulement parallèles entr'elles, mais aussi perpendiculaires au Levier XO: alors

les parties infiniment petites X_e , $O\phi$, de ces directions, se confondant avec les arcs infiniment petits Xx , $O\omega$, perpendiculaires comme elles à ce Levier droit XO ; l'on aura ici $E \times Xx = E \times X_e$, $F \times O\omega = F \times O\phi$. Donc venant de trouver (art. 1.) que ces Energies generales $E \times X_e$, $F \times O\phi$, des puissances E , F , supposées en équilibre entr'elles suivant des directions quelconques, sont égales entr'elles; & que la premiere de ces deux Energies est affirmative, & la seconde negative: l'on aura pareillement ici $E \times Xx$, $F \times O\omega$, égales entr'elles, pour les Energies particulieres des puissances E , F , dans le cas present de leur équilibre entr'elles suivant des directions perpendiculaires au Levier droit XO ; & la premiere de ces deux Energies particulieres encore affirmative, & la seconde negative.

Les moindres Géometres sçavent que ce cas particulier du précédent art. 2. pourroit encore se démontrer indépendamment du general de l'art. 1. mais il suit si naturellement de ce general, que je n'ai pas cru le devoir démontrer autrement.

III. Il est à remarquer que de quelque maniere que les directions XE , OF , des puissances E , F , soient paralleles entr'elles, c'est-à-dire, vers quelque côté que ce soit; leurs perpendiculaires (*Hyp.*) BD , BP , se trouvant alors en ligne droite, & rendant ainsi les triangles rectangles BDX , BPO , toujours semblables entr'eux: l'on aura aussi toujours alors $BD \cdot BP :: BX \cdot BO :: Xx \cdot O\omega$. Donc venant de trouver en general (art. 1.) $X_e \cdot O\phi :: BD \cdot BP$. Le cas present des directions XE , OF , paralleles quelconques donnera toujours aussi $X_e \cdot O\phi :: BD \cdot BP :: BX \cdot BO :: Xx \cdot O\omega$. Ainsi,

1°. Les vitesses virtuelles des puissances E , F , qui dans l'art. 1. sont exprimées en general par X_e , $O\phi$, pour toutes les directions possibles de ces deux puissances, pourroient aussi dans le present parallelisme quelconque de ces directions, être exprimées par les arcs Xx , $O\omega$, comme dans l'art. 2. ou par les bras de ce Levier, BX , BO ; ou enfin par les perpendiculaires BD , BP , aux directions

de

de ces puissances ; & les Energies de ces mêmes puissances E, F, qui dans le même art. 1. sont exprimées en general par $E \times X\epsilon$, $F \times O\phi$, pourroient aussi l'être ici par $E \times X\alpha$, $F \times O\omega$, comme dans l'art. 2. ou par $E \times BX$, $F \times BO$; ou enfin par $E \times BD$, $F \times BP$, qui sont (Déf. 22.) les *Momens* de ces deux puissances E, F, supposées en équilibre entr'elles sur l'appui B du Levier auquel on les suppose appliquées.

2°. De même les vîteses virtuelles de ces puissances E, F, qui dans le cas de l'art. 5. y sont exprimées par les arcs infiniment petits $X\alpha$, $O\omega$, qui se confondent là avec les lignes infiniment petites $X\epsilon$, $O\phi$, pourroient l'être par les finies BX, BO, ou BD, BP ; & les Energies de ces mêmes puissances E, F, qui dans cet art. 5. sont exprimées par $E \times X\alpha$, $F \times O\omega$, pourroient aussi l'être par $E \times BX$, $F \times BO$, ou par $E \times BD$, $F \times BP$.

Il suit de ces nomb. 1. 2. que ces expressions (nomb. 2.) tant des vîteses virtuelles, que des Energies des puissances E, F, supposées en équilibre entr'elles sur l'appui B d'un Levier quelconque suivant des directions parallèles entr'elles, conviendroient également dans ce cas general de directions XE, OF, parallèles quelconques, & dans le particulier de l'art. 2. où ces parallèles sont supposées perpendiculaires au Levier droit XO. Mais la Déf. 32. exigeant que les vîteses virtuelles des puissances E, F, soient exprimées par les chemins contemporains que ces puissances parcourroient suivant leurs directions dans le mouvement supposé du système, & que les Energies de ces mêmes puissances soient exprimées par les produits faits de ces puissances multipliées par ces chemins contemporains, chacune par le sien : les lignes & les produits pris dans les art. 1. 2. pour les vîteses virtuelles & pour les Energies des puissances E, F, en sont les expressions naturelles telles que cette Déf. 32. les exige.

I V. Si avec les Energies des puissances E, F, supposées en équilibre entr'elles sur l'appui B d'un Levier quelconque supplée (comme dans l'art. 1.) par le droit XO

FIG. 276.
277 278.
279.

ou XB de même appui B que lui ; auquel Levier droit ces deux puissances E, F, soient appliquées suivant leurs directions supposées quelconques concourantes en quelque point A que ce soit ; on veut aussi comprendre l'Energie de la résistance (que j'appelle B) de cet appui : soient deux droites B β , Aa, parallèles & égales quelconques menées des points B, A, vers le même côté aussi quelconque, obliquement aux directions AE, AF, & à la droite AB, laquelle étant (*Th. 21. part. 1. 2.*) la direction de A vers B dans les Fig. 276. 279. & de B vers A dans les Fig. 277. 278. de la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des puissances E, F, sur lui, est aussi en sens directement contraire (*Ax. 4.*) la direction de B vers A dans les Fig. 276. 279. & de A vers B dans les Fig. 277. 278. de la résistance B, avec laquelle cet appui fixe soutient cette charge. Du point a soient ae, af, ab, perpendiculaires en e, f, b, sur ces trois lignes prolongées AE, AF, AB. Ensuite après avoir fait le parallélogramme ARGS d'une diagonale quelconque AG prise depuis A sur AB ou BA prolongées, & de côtez AR, AS, pris sur AE, AF, pareillement prolongées ; des angles G, R, S, de ce parallélogramme soient les droites Gg, Rr, Ss, perpendiculaires en g, r, s, sur Aa prolongée de part & d'autre.

Cela fait ou imaginé, les triangles Aea, AR ; Afa, AS ; Aa, AgG, rectangles (*constr.*) en e, r, f, s, b, g, ayant leurs angles égaux en A deux à deux distinguez, comme on les voit ici, sont semblables entre eux ainsi pris deux à deux. Donc

$$Aa. Ae :: AR. Ar = \frac{AR \times Ae}{Aa}$$

$$Aa. Af :: AS. As = \frac{AS \times Af}{Aa}$$

$$Aa. Ab :: AG. Ag = \frac{AG \times Ab}{Aa}$$

Or (*Lem. 10.*) $Ag = As + Ar$, dans laquelle égalité le supérieur du double signe $+$ est pour le cas des Fig. 276. 277. & l'inférieur pour le cas des Fig. 278. 279. Donc aussi $AG \times Ab = AS \times Af + AR \times Ae$, de qui le double signe $+$ est de même signification que le précédent. Or la résistance B de l'appui de ce nom, étant (*Ax. 4. Th. 21. part. 1. 2.*) égale & directement opposée de G vers A suivant GA, à la charge de cet appui B, laquelle est au contraire (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1. & Th. 21. part. 1. 2.*) dirigée de A vers G suivant AG; l'équilibre supposé entre les puissances E, F, donne par tout ici (*Th. 2. part. 3.*

$$4.) B.E :: AG. AR = \frac{AG \times E}{B}. \text{ Et } B.F :: AG. AS = \frac{AG \times F}{B}.$$

Donc en substituant ces valeurs de AR, AS, dans la dernière égalité précédente $AG \times Ab = AS \times Af + AR \times Ae$,

$$\text{on aura pareillement ici } AG \times Ab = \frac{AG \times F \times Af + AG \times E \times Ae}{B}$$

d'où résulte $B \times Ab = F \times Af + E \times Ae$: c'est-à-dire, $B \times Ab = F \times Af - E \times Ae$, ou $B \times Ab + E \times Ae = F \times Af$ pour le cas des Fig. 276. 277. & $B \times Ab = E \times Ae + F \times Af$ pour le cas des Fig. 278. 279.

Imaginons présentement que l'équilibre ici supposé entre les puissances E, F, sur l'appui B, soit rompu par un mouvement de tout le système, qui le fasse aller de AB vers Aβ, en faisant décrire en ce sens à tous les points des lignes paralleles & égales à Aα ou à Bβ, de maniere que lorsque la droite AB sera sur sa parallele aβ, les directions AE, AF, ainsi mûes parallelement chacune à soi-même, soient aussi sur leurs paralleles aε, aφ, chacune sur la sienne avec la puissance dont elle est la direction. Il est manifeste (*Déf. 32.*) qu'un tel mouvement de tout le système donnera Ae, Af, Ab, pour les vitesses virtuelles des puissances E, F, & de la résistance B de l'appui de ce nom; & E×Ae, F×Af, B×Ab, pour leurs Energies: desquelles Energies (*Déf. 32.*) la première & la troisième

me sont ici affirmatives, & la seconde negative dans la Fig. 276. la premiere & la troisieme sont au contraire negatives, & la seconde affirmative dans la Fig. 277. les deux premieres sont affirmatives, & la troisieme negative dans la Fig. 278. Enfin les deux premieres sont au contraire negatives, & la troisieme affirmative dans la Fig. 279. Donc venant de trouver $B \times Ab + E \times Ae = F \times Af$ pour les Fig. 276. 277. & $B \times Ab = E \times Ae + F \times Af$ pour les Fig. 278. 279. l'on aura ici dans les Fig. 276. 278. la somme de deux Energies affirmatives, égale à une Energie negative affirmativement prise; & au contraire dans les Fig. 277. 279. la somme de deux Energies negatives (affirmativement prise) égale à une Energie affirmative. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

V. Si l'on suppose presentement que Aa soit perpendiculaire sur AB , comme l'est (*Hyp.*) ab , & fasse consequemment des angles aigus avec AX , AO , dans les Fig. 278. 279. Cette hypothese, qui fait passer Af de l'autre côté de A vers O dans ces deux Fig. 278. 279. & qui y fait tomber b en A , de même que dans les deux autres Fig. 276. 277. sans faire que ce seul changement dans ces deux-ci, rendant ainsi $Ab = 0$ dans toutes les quatre Fig. 276. 277. 278. 279. & Af negative dans les deux dernieres, changera également pour toutes les deux égalitez qu'on leur vient de trouver sur la fin du precedent art. 4. en $E \times Ae = F \times Af$ sans Energie de la résistance B de l'appui du Levier, que $Ab = 0$ vient de rendre nulle. Ce qui fait voir que l'Energie affirmative de la puissance E sera ici égale à l'Energie negative de la puissance F dans les Fig. 277. 279. & qu'au contraire l'Energie affirmative de F sera égale à l'Energie negative de la puissance E dans les Fig. 278. 276.

On fera sur ceci des reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans les art. 4. 5. 6. de la part. 3. touchant les Energies, tant de la puissance & du poids en équilibre entr'eux sur le Tour, que de la résistance du centre ou de l'axe de la Machine à l'effort résultant sur lui du concours de ces deux forces; desquelles Ener-

gies les égalités démontrés là, se pourroient encore déduire de celles qu'on vient de démontrer dans l'équilibre des Leviers, auxquels l'équilibre sur le Tour se peut aisément rapporter.

PARTIE V.

Pour l'équilibre d'un poids soutenu sur un plan incliné par une puissance de direction quelconque.

I. Soit un poids O EZ de figure, de pesanteur P, & de direction AP quelconques, soutenu sur un plan incliné HG par une puissance R de direction aussi quelconque AR; ce poids n'est ici de figure sphérique que pour moins d'embarras de lignes, ce qu'on va dire de lui convenant également à des poids de figures quelconques. On a vû (*Th. 26. part. 1.*) que si du point A de concours des directions AP, AR, de ce poids O EZ & de la puissance R, qui (*Hyp.*) le soutient, l'on mene AD perpendiculaire au plan HG, elle passera par quelque point O de la base de ce poids, lequel fera le point où le sphérique touche ce plan; & que si autour de la diagonale AD prise à volonté de A vers D sur cette perpendiculaire, on fait un parallélogramme ABDC de côtes AB, AC, qui soient sur les directions AR, AP, de la puissance R, & de la pesanteur P du poids O EZ, cette pesanteur P de ce poids sera à la puissance R, comme AC à AB. FIG. 286.

Soit de plus la droite Aa de longueur quelconque parallèle à celle EG du plan incliné, sur laquelle Aa prolongée de part & d'autre, tombent des angles B, C, du parallélogramme ABDC, deux perpendiculaires Bb, Cc, en b, c. Soient de plus du point a les droites ap, ar, perpendiculaires aussi en p, r, sur les directions prolongées AP, AR, du poids O EZ & de la puissance R.

Cela fait, les triangles Apa, AcC; Ara, AbB, rectangles (*Hyp.*) en p, c, r, b, ayant deux à deux, comme on les voit ici distinguez, leurs angles égaux en A, seront semblables entr'eux ainsi pris deux à deux, & donneront

ainfi $Aa. Ap :: AC. Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}$. Et $Aa. Ar :: AB. Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}$. Donc le Lem. 10. donnant $Ac = Ab$, l'on aura

ici $AC \times Ap = AB \times Ar$. Or l'équilibre qu'on y suppose entre la puissance R & la pesanteur P du poids OEZ , donne

(*Th. 26. part. 1.*) $R. P :: AB. AC = \frac{AB \times P}{R}$. Donc en

substituant cette valeur de AC dans la dernière égalité

$AC \times Ap = AB \times Ar$, l'on aura ici $\frac{AB \times P \times Ap}{R} = AB \times Ar$;

d'où résulte $P \times Ap = R \times Ar$.

Soit présentement le système mû de A vers a , de manière que tous ses points décrivent des droites égales & parallèles à Aa ; & conséquemment que lorsque le point A de concours des directions de la puissance R & de la pesanteur P du poids OEZ , sera en a , ces directions AR , AP , soient sur leurs parallèles aa , $a\pi$, & la droite AD aussi sur sa parallèle ad , ayant son point O en ω sur le plan HG . En ce cas la Déf. 32. donnera Ap , Ar , pour les vitesses virtuelles du poids P & de la puissance R , & $P \times Ap$, $R \times Ar$, pour leurs Energies, desquelles Energies la première fera ici affirmative, & la seconde négative. Donc venant de trouver $P \times Ap = R \times Ar$, l'on aura ici l'Energie affirmative de la pesanteur P du poids OEZ , égale à l'Energie négative (affirmativement prise) de la puissance R , sans que la résistance du plan HG y en ait aucune. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

II. 1^o. Si la direction AR de la puissance R étoit parallèle, comme (*Hyp.*) bc , à la longueur GH du plan incliné; & la direction AP de la pesanteur P du poids OEZ , parallèle aussi à la hauteur HK de ce plan: cette hypothèse faisant tomber en a le point r de cette direction AR prolongée, & rendant ainsi non seulement les triangles (*Hyp.*) rectangles Apa , HKG , semblables entr'eux, mais

encore $Ar = Aa$; la vitesse virtuelle de la puissance R seroit alors (*Def. 32.*) à la vitesse virtuelle du poids $OEZ :: Aa. Ap :: HG. HK$. Donc l'équilibre supposé donnant aussi pour lors (*Th. 26. Corol. 20. art. 1. nomb. 1.*) $P. R :: HG. HK$. Cette hypothese rendroit $P. R :: Aa. Ap$. Et conséquemment $P \times Ap = R \times Aa$. D'où l'on voit que les Energies (*Def. 32.*) $P \times Ap, R \times Aa$, du poids OEZ & de la puissance R , seroient encore ici égales entr'elles: la première affirmative, & la seconde négative, comme le sont celles que ce poids & cette puissance ont dans le précédent art. 1.

2°. La direction AP de la pesanteur P du poids OEZ demeurant parallèle à la hauteur HK du plan incliné HG , si la direction AR de la puissance R étoit parallèle à la base GK de ce plan: le triangle ara se trouvant alors semblable au triangle ApA , qui le seroit aussi au triangle HKG ; la vitesse virtuelle (Ar) de la puissance R seroit alors à la vitesse virtuelle (Ap) du poids $OEZ :: ap. Ap :: GK. HK$. c'est-à-dire, qu'alors on auroit $Ar. Ap :: GK. HK$. Or l'équilibre ici supposé y donne (*Th. 26. Cor. 20. art. 2. nomb. 1.*) $R. P :: HK. GK$. Donc (en multipliant ces deux analogies par ordre) l'on auroit ici $R \times Ar, P \times Ap :: HK \times GK. GK \times HK :: 1. 1$. c'est-à-dire, que ces deux Energies (*Def. 32.*) $R \times Ar, P \times Ap$, de la puissance R & de la pesanteur P du poids OEZ , seroient encore ici égales entr'elles: la première négative, & la seconde affirmative, comme le sont celles de cette puissance & de ce poids dans l'art. 1. & dans le précédent nomb. 1.

III. Si avec les Energies de la puissance R & du poids OEZ en équilibre entr'eux sur le plan incliné HG , suivant des directions quelconques AR, AP , on veut comprendre aussi l'Energie de la résistance (que j'appelle D) de ce plan HG , égale & directement opposée (*Ax. 4.*) à l'effort résultant de A vers D (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1. & Th. 21. part. 1. 2.*) du concours d'action de cette puissance & de ce poids contre ce plan suivant AD perpendiculaire (comme dans l'art. 1. à ce même plan HG en

quelque point O où il soit touché par la base de ce poids OEZ de figure quelconque ; soit le parallelogramme ABDC fait comme dans l'art. 1. des angles B, C, D, duquel tombent les droites Bb, Cc, Dd, perpendiculaires en b, c, d, à une droite bc menée à volonté par le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan incliné HG, sur lequel cette puissance & ce poids sont supposez en équilibre entr'eux. Après cela d'un autre point a quelconque de la droite bA prolongée, soient menées Ar, Ap, Ad, perpendiculaires en r, p, d, sur les directions prolongées AR, AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan HG.

Cela fait, les triangles Ara, AbB; Apa, AcC; Ada, AdD, rectangles (*constr.*) en r, b, p, c, d, a, ayant deux à deux, comme on les voit ici distinguez, leurs angles égaux en A seront semblables entr'eux, ainsi pris deux à deux ; & en consequence donneront

$$Aa. Ar :: AB. Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa. Ap :: AC. Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa. Ad :: AD. Ad = \frac{AD \times Ad}{Aa}.$$

Par consequent le Lemme 10. donnant $Ad = Ac + Ab$, dont le supérieur du double signe $+$ est pour la Fig. 281. & l'inférieur pour la Fig. 282. l'on aura ici $AD \times Ad = AC \times Ap + AB \times Ar$, dont le double signe $+$ sera de même signification que le précédent. Or l'équilibre ici supposé

donne (*Th. 26. Cor. 7.*) $D. P :: AD. AC = \frac{AD \times P}{D}$. Et D. R :: AD. AB = $\frac{AD \times R}{D}$. Donc en substituant ces valeurs de

AC,

AC, AB, dans l'égalité qui les précède, l'on aura ici AD

$$\times Ad = \frac{AD \times P \times Ap + AD \times R \times Ar}{D}; \text{ d'où résulte } D \times Ad = P \times Ap$$

$+ R \times Ar$: sçavoir, $D \times Ad = P \times Ap - R \times Ar$, ou $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ dans le cas de la Fig. 281. & $D \times Ad = P \times Ap - R \times Ar$ dans la Fig. 282.

Soit présentement le système mû de A vers *a*, comme dans l'art. 1. c'est-à-dire, de manière que tous les points décrivent des droites égales & parallèles à A*a* de longueur & de position quelconques; & que lorsque le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan HG, sera en *a*, ces directions mûes ainsi parallèlement à elles-mêmes, soient sur leurs parallèles *ap*, *aπ*, *af*; & ce plan HG (mû aussi parallèlement à lui-même) sur sa parallèle *hg*, ayant son point O en celui *o* de rencontre de cette parallèle *hg* avec sa perpendiculaire *af*; auquel point *o* celui O de ce plan arrive après avoir parcouru la droite O*o* parallèle & égale à A*a*, dans le tems que le point A a employé cette autre droite A*a*, & que toutes les lignes AR, AP, DA, HG, ont aussi mis à arriver sur leurs parallèles *ap*, *aπ*, *af*, *hg*.

Ce mouvement supposé de tout le système, la Déf. 32. donnera Ar, Ap, Ad, pour les vitesses virtuelles de la puissance R du poids OEZ de pesanteur P, & de la résistance D du plan HG, & $R \times Ar$, $P \times Ap$, $D \times Ad$, pour leurs Energies, dont la seconde sera affirmative, & les deux autres negatives dans la Fig. 281. & dont la troisième sera affirmative, & les deux premières negatives dans la Figure 282. Par conséquent venant de trouver $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ pour le cas de la Figure 281. & $D \times Ad = P \times Ap - R \times Ar$ pour le cas de la Fig. 282. l'on aura ici pour l'un & pour l'autre cas une Energie affirmative égale à la somme de deux Energies negatives affirmativement prises. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

IV. Si l'on suppose présentement que *aA* soit perpen-

diculaire sur AD, comme l'est (*Hyp.*) ad & fasse conséquemment des angles aigus avec Ap , Ar , dans la Fig. 282. comme dans la Fig. 281. Cette hypothese, qui fait passer Ap de l'autre côté de A vers P dans la Fig. 282. & qui y fait tomber d en A, de même que dans la Fig. 281. rendant ainsi $Ad=0$ dans toutes deux, & Ap négative dans la Fig. 282. changera également en $P \times Ap = R \times Ar$ pour ces deux Fig. 281. 282. les égalitez qu'on vient de trouver pour chacune d'elles sur la fin du précédent art. 3. y faisant cesser l'Energie $D \times Ad$ de la résistance D du plan GH par $Ad=0$, qui résulte de cette hypothese dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. D'où l'on voit que dans toutes deux cette hypothese de Aa perpendiculaire sur AD, rendra l'Energie affirmative du poids OEZ égale à l'Energie negative (affirmativement prise) de la puissance R: le tout comme dans l'art. 1. Fig. 280.

On pourra faire encore ici sur l'art. 3. d'autres reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans l'art. 4. de la part. 3. & dans la reflexion italique qui ensuit l'art. 5. touchant les Energies, tant de la puissance & du poids en équilibre entr'eux sur le Tour, que de la résistance du centre ou de l'axe de cette Machine à l'effort résultant sur lui du concours d'action de ces deux forces.

P A R T I E V I.

Pour l'équilibre de la charge de la Vis ou de son Ecroue avec la puissance qui lui est appliquée.

Fig. 243.

Section 7.

I. Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. Fig. 243. soit l'équilibre supposé entre la puissance P & la charge de l'Ecroue PQ, la Vis VXYZ étant fixe, ou entre la puissance T, & la charge de cette Vis, si c'est l'Ecroue qui soit fixe: soit, dis-je, cet équilibre rompu par quelque augmentation ou diminution de force de cette puissance P ou T, ou bien par quelque dimi-

duction ou augmentation de la charge de l'Ecroute ou de la Vis. Il est manifeste que pendant que cette augmentation ou diminution de force ou de charge fera faire un tour entier à la puissance T ou P, & lui fera ainsi décrire un cercle entier du rayon ST ou EP, autour de l'axe MS de cette Vis; la charge de cette même Vis VXYZ, ou de son Ecroute PQ, avancera de la valeur d'un pas HK de cette Vis suivant cette direction parallele à son axe MS; & qu'ainsi, suivant la Déf. 32. (en appellant O la circonference entiere de ce cercle quelconque; & A la charge aussi quelconque de la Vis ou de son Ecroute) cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, exprimeront les vitesses virtuelles de la puissance T ou P, & de la charge A de cette Vis ou de son Ecroute; & les produits $T \times O$ ou $P \times O$, & $A \times HK$, en exprimeront les Energies. Or dans l'équilibre ici supposé le Th. 33. donnant $P.A :: HK.O$. lorsque la Vis est fixe, & $T.A :: HK.O$. lorsque c'est l'Ecroute qui est fixe, donne conséquemment pour le premier cas $P \times O = A \times HK$, & $T \times O = A \times HK$ pour le second. Donc en cet équilibre supposé, l'Energie de la puissance P ou T, est toujours égale à l'Energie de la charge A que cette puissance soutient par le moyen de la Vis VXYZ, ou de son Ecroute PQ. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

II Ce qu'on voit ici de la circonference O du cercle décrit du rayon ST ou EP, & du pas HK de la Vis, se dira de même de leurs parties proportionnelles quelcon-

ques $\frac{O}{n}$, $\frac{HK}{n}$; lesquelles parcourues par des mouvemens contemporains, comme le sont les totaux en vertu desquels cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, seroient parcourus dans l'art. 1. expriment comme eux (Déf. 32.) les vitesses virtuelles de la puissance T ou P, & de la charge A de la Vis VXYZ, ou de son Ecroute PQ:

& conséquemment (Déf. 32.) les produits $\frac{T \times O}{n}$ ou $\frac{P \times O}{n}$, & $\frac{A \times HK}{n}$, exprimeroient aussi les Energies de cette puissance
E c ij

fance T ou P, & de cette charge A; lesquelles Energies (pour ainsi dire) partiales feroient encore égales entre-elles, comme le tout (*art. 1.*) les totales $T \times O$ ou $P \times O$, & $A \times HK$.

Fig. 245.

III. Quant à la Vis sans fin de la Fig. 245. routes choses demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. imaginons que l'équilibre supposé entre la puissance K & le poids Q, y soit rompu par quelque augmentation de la force de la puissance R, ou par quelque diminution de la pesanteur du poids Q. Il est visible qu'alors à chaque tour entier de la manivelle DFR autour de son axe GK, ou de la puissance R autour du centre K, la dent P de la roue dentée PpS, qui est entre les spires ou helices AP, BP, de la Vis, en sortira, & la dent suivante p y entrera, de maniere que chacune de ces dents P, p, parcourra pour lors la valeur de chacun des pas AB de cette Vis. Donc si l'on imagine du centre C un cercle qui passe par les extrêmités de toutes ces dents, ce tour entier de la manivelle DFR autour de son axe GK, ou de la puissance R autour du centre K, fera mouvoir ce cercle imaginaire de la valeur d'un arc $pP = AB$; & conséquemment aussi le poids Q de la valeur d'un arc semblable eE: de sorte qu'en appellant O la circonférence entière du cercle décrit autour du centre K par la puissance R dans un tour entier de la manivelle DFR, l'on aura ici (*Déf. 3. 1.*) cette circonférence O, & l'arc Ee, pour les expressions des vitesses virtuelles de la puissance R, & du poids Q; & $R \times O$, $Q \times Ee$, pour les expressions de leurs Energies.

Cela posé, puisque l'on vient de trouver $pP = AB$, l'on aura $AB. Ee :: pP. Ee :: CP. CE$. Ce qui donne $AB \times CE = CP \times Ee$. Donc le Th. 35. donnant $R. Q :: AB \times CE. CP \times O$. dans le cas d'équilibre qu'on suppose ici comme là entre la puissance R & le poids Q sur la Vis composée dont il s'agit ici, l'on y aura aussi $R. Q :: CP \times Ee. CP \times O :: Ee. O$. D'où résulte $R \times O = Q \times Ee$. Donc venant de trouver $R \times O$, $Q \times Ee$, pour les expressions des Energies de la puissance R, & du poids Q, leurs Energies seront ici égales entr'elles. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

Un raisonnement semblable à celui du précédent art. 2. fera encore voir que ces Energies de la puissance R & du

poids Q, peuvent aussi être exprimées par $\frac{R \times O}{n}$, $\frac{Q \times Ec}{n}$,

quelque soit le nombre n , qui les laisseroit encore égales entr'elles.

La Déf. 32. fait assez voir que des Energies trouvées égales deux à deux dans les précédens art. 1. 2. 3. il y en a toujours une affirmative, & l'autre négative; que l'affirmative est toujours celle de la force en faveur de laquelle s'est fait le mouvement donné à la Machine, & la négative, toujours celle de l'autre force à qui ce mouvement s'est trouvé contraire: j'appelle ici Forces, la charge de la Vis ou de son Ecroue dans la Fig. 243. le poids Q dans la Fig. 245. & la puissance en équilibre avec cette charge dans la Fig. 243. ou avec ce poids dans la Fig. 245. c'est pour m'exprimer plus clairement, & en moins de mots que je les appelle de ce nom commun.

P A R T I E V I I.

Pour l'équilibre de l'effort du Coin avec la résistance des côtez de la fente qu'il tend à faire ou à augmenter dans le corps à fendre.

I. Soit comme dans le Th. 37. le Coin AEB poussé d'une force F suivant une direction FG, qui doit toujours (Th. 37.) passer par l'angle R de la fente HRK du corps à fendre $\delta e \delta \mu$, dans laquelle cette force F tend à enfoncer ce Coin, & le tient en équilibre avec les résistances des côtez HR, KR, de cette fente, touchés par ceux de ce même Coin AEB en des points H, K, par lesquels on peut toujours (Th. 37.) mener de quelque point D de la direction FG du Coin, des perpendiculaires DM, DN, à ces côtez HR, KR, de la fente HRK; sur lesquelles perpendiculaires soient les côtez du parallélogramme DMRN, dont la diagonale de longueur arbitraire DG soit sur la direction FG du Coin AEB. Des

Fig. 233.

234. 235.

angles M, N, de ce parallelogramme soient Mm , Nn , perpendiculaires en m , n , sur cette diagonale DG; & d'un point r infiniment proche de R, de cette même diagonale prolongée, soient rb , rk , paralleles aux côtez RH, RK, de la fente HRK, avec Rb , Rk , perpendiculaires en b , k , sur ces paralleles rb , rk .

Suivant cette construction, l'on aura les triangles rectangles Rbr , DHR , DmM ; Rkr , DKR , DnN , semblables entr'eux trois à trois distinguez comme on les voit ici; ce qui avec le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. (en appellant F la force du Coin AEB suivant sa direction DG ou Fr ; M, N, les résistances des côtez HR, KR, de la fente HRK, suivant leurs directions HD, KD, ou MD, ND; & m , n , les efforts qui en résultent suivant mD , nD , directement à contre-sens de la force F du

Coin) donnera $Rr.Rb :: DM.Dm :: M.m = \frac{M \times Rb}{Rr}$. Et

$Rr.Rk :: DN.Dn :: N.n = \frac{N \times Rk}{Rr}$. Donc $m + n =$

$\frac{M \times Rb + N \times Rk}{Rr}$. Or (Lem. 3. part. 2.) $m.n :: Dm.Dn$.

Ce qui (en composant) donne $m.m + n :: Dm.Dm + Dn$.

De plus (Lem. 3. Corol. 6.) $F.M :: DG.DM$. Et $M.m :: DM.Dm$. Ce qui (en raison ordonnée) donne $F.m :: DG.Dm$. Donc ayant déjà $m.m + n :: Dm.Dm + Dn$.

l'on aura ici (en raison ordonnée) $F.m + n :: DG.Dm + Dn$.

Par consequent venant de trouver $m + n =$

$\frac{M \times Rb + N \times Rk}{Rr}$, on aura pareillement ici $F.$

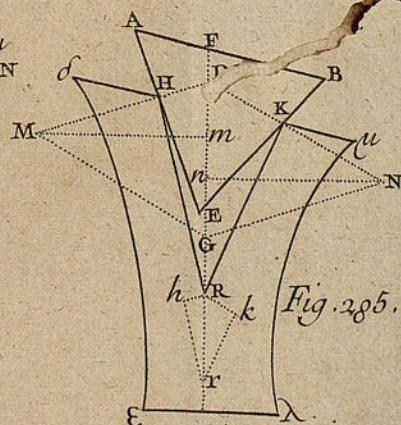
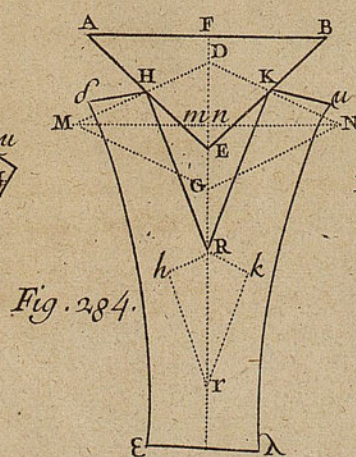
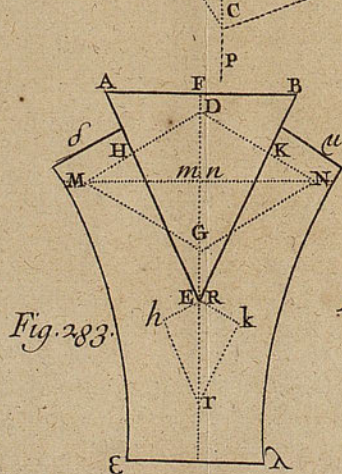
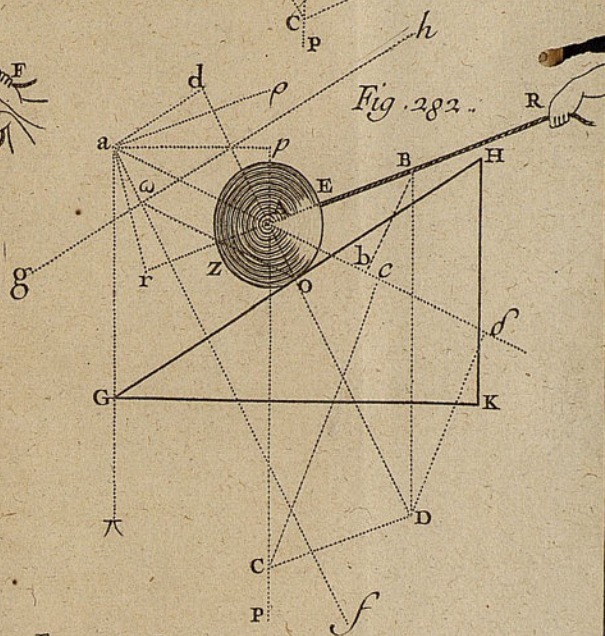
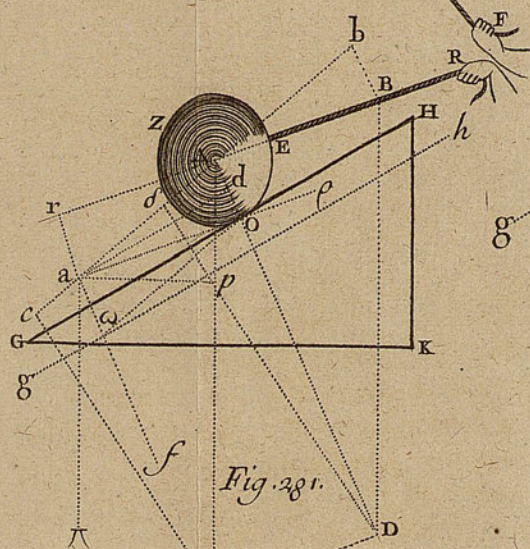
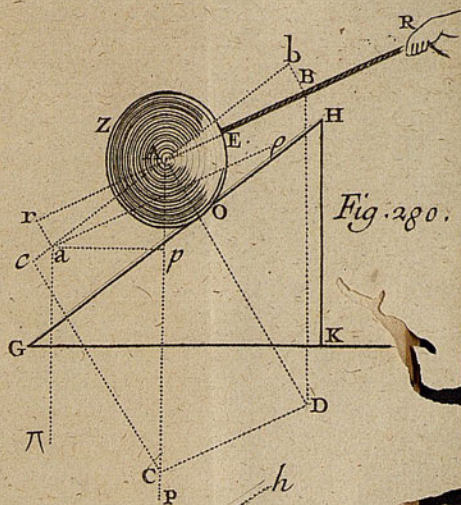
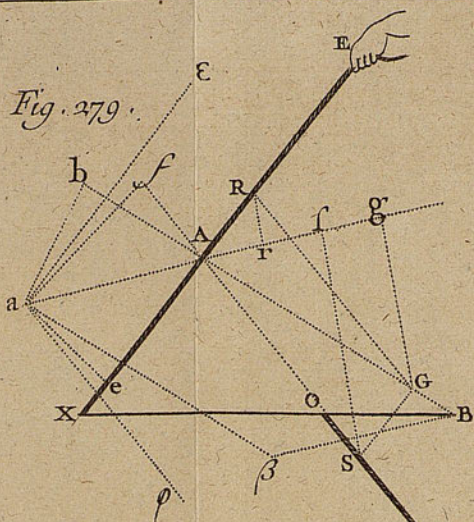
$\frac{M \times Rb + N \times Rk}{Rr}$.

$:: DG.Dm + Dn$. Or $Gn = Dm$ rend $DG = Dm + Dn$.

Donc aussi $F = \frac{M \times Rb + N \times Rk}{Rr}$; & consequemment $F \times Rr$

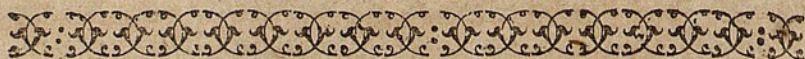
$= M \times Rb + N \times Rk$.

II. Imaginons presentement une nouvelle force suivant FR , laquelle rompe l'équilibre supposé entre la force F



du Coin AEB suivant FR, & les résistances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK suivant leurs perpendiculaires HD, KD, ou MD, ND; laquelle nouvelle force faisant enfoncer ce Coin en augmentant de la valeur infiniment petite Rr la profondeur de cette fente HRK du corps à fendre $\delta\epsilon\lambda\mu$, fasse ainsi avancer ce même Coin AEB de cette valeur Rr , pendant que les côtez HR, KR, de cette même fente HRK; seront ainsi forcez d'aller se coucher sur leurs parallèles hr , kr , en s'écartant de leurs premières situations, c'est-à-dire, l'un de l'autre, des valeurs infiniment petites de leurs perpendiculaires Rb , Rk , parallèles à leurs directions DM, DN. Alors suivant la Déf. 32. ces lignes infiniment petites Rb , Rk , ainsi parcourues par les côtez HR, HK, de la fente HRK, pendant que le Coin AEB avanceroit de la valeur de Rr , suivant sa direction Fr: alors, dis-je, ces petites lignes Rb , Rk , exprimeroient les vîteses virtuelles de ces côtez HR, KR, de la fente HRK, de même que Rr exprimeroit celle du Coin AEB; de sorte que suivant la même Déf. 32. les produits $M \times Rb$, $N \times Rk$, $F \times Rr$, exprimeroient les Energies des résistances M, N, de ces côtez de la fente, & de la force F du Coin, dont l'Energie $F \times Rr$ sera ici affirmative, & les deux autres negatives. Or on vient de trouver (art. 1.) $F \times Rr = M \times Rb - N \times Rk$. Donc on aura ici l'Energie affirmative de la force F du Coin AEB, égale à la somme des Energies negatives (affirmativement prises) des résistances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK du corps à fendre $\delta\epsilon\lambda\mu$, supposées en équilibre avec cette force F du Coin AEB. *Ce qu'il falloit démontrer.*





SECTION X.

De l'Equilibre des Liqueurs.

Quelques personnes habiles prévenues en faveur du principe de Statique de M. Descartes , qui est qu'il faut autant de force pour faire monter un poids , par exemple, d'une livre à 100 pied de hauteur , que pour en faire monter un de 100 livres à un pied : ces personnes , dis-je , prévenues en faveur de ce principe , sur tout par rapport à l'explication de l'équilibre des Liqueurs , parmi lesquelles est un Auteur , dont on verra les objections Latines résolues dans la suite , m'ayant marqué toutes simplement qu'elles ne voyoient pas comment on pourroit , hors lui , qui a dit nettement qu'on ne peut pas rendre raison de cet équilibre par le principe dont je me servis en 1687. & dont je me fers encore ici pour démontrer l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines ; m'engagent à ajouter ici cette Section pour les satisfaire sur ce sujet , & en même tems ce qu'il y en pourroit avoir d'autres , auxquels cette prévention commune à plusieurs , ou quelque autre cause ne laisseroit pas assez d'attention pour voir d'eux-mêmes que le principe qu'on suit ici , peut servir aussi aisément à rendre raison de l'équilibre des Liqueurs , qu'on l'a vû servir jusqu'ici à rendre celle de l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines , & ici comme là par la generation de l'équilibre toujours & par tout résultant de l'opposition directe entre deux forces égales , ou entre une force & une résistance invincible , soit que chacune de ces forces soit simple , ou dérivée , ou composée de tant d'autres qu'on voudra. Cela s'est vû jusqu'ici par rapport à l'équilibre sur des Machines ; le voici aussi par rapport à l'équilibre des Liqueurs , dont les pesanteurs quelconques seront par tout prises

prises ici à l'ordinaire, comme tendantes de haut en bas suivant des directions paralleles verticales.

Si je n'avois affaire qu'à des Cartesiens, tels que l'Auteur dont je viens de parler, & qui seul m'oblige de m'expliquer sur le principe de Statique de M. Descartes, par l'objection qu'il m'en fait; peut-être que pour en obtenir un peu plus d'attention à ce que je vas dire, il ne seroit pas hors de propos de leur demander la solution de quelques difficultez que voici par rapport à leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs: je leur proposerois le Ciphon MDEN de branches cylindriques verticales, MD, NE, inégales en grosseur, dans lequel il y auroit de l'eau en équilibre jusqu'au niveau AH; & je leur demanderois la raison de cet équilibre.

I. Ils me répondroient à leur ordinaire, que s'il n'y avoit pas ici d'équilibre, l'eau descendroit dans une des branches du Ciphon, & monteroit dans l'autre; de maniere que si sa surface, par exemple, AL descendoit de quelque hauteur AB que ce soit dans sa grosse branche MD, elle forceroit la surface HO de l'eau de la petite branche NE d'y monter d'une hauteur HK, telle qu'on auroit alors $AL \times AB = HO \times HK$.

FIG. 236.

Cela est vrai, puisque les quantitez d'eau BALP, HKQQ, sont égales entr'elles. Mais que s'ensuit-il de là? sinon qu'en ce cas de non équilibre les hauteurs AB, HK, qui exprimeroient également ici les vîteses contemporaines & les chemins contemporains des surfaces AL, KO, y seroient entr'elles en raison reciproque de ces mêmes surfaces?

II. En voilà assez pour ce que nous prétendons, diront-ils sans doute; puisque, suivant le principe précédent de M. Descartes, il faut des forces égales pour faire parcourir à des poids des chemins differens qui soient en raison reciproque de ces mêmes poids; & que suivant le nomb. 1. en cas de non équilibre les surfaces ou lames d'eau AL, HO, où leurs poids seroient ici en raison reciproque des chemins AB, HK, qu'elles y parcourroient.

Donc elles y auroient des forces égales ; & par consequent elles y demeureroient en équilibre entr'elles au niveau AH, auquel on les a supposées d'abord, au lieu de se mouvoir, comme ces Messieurs viennent aussi de le supposer, pour en déduire ainsi cet équilibre.

Cette dernière consequence, si elle étoit valable, ne feroit tout au plus que *ab absurdo*, puisque ce ne feroit y conclure l'équilibre que du non-équilibre. Mais il s'en faut bien qu'elle soit juste ; puisque pour l'équilibre entre deux forces ce n'est pas assez qu'elles soient égales entre-elles, il faut de plus qu'elles soient contraires l'une à l'autre jusqu'à se détruire ou s'empêcher mutuellement. Or c'est ce qui ne se trouve point ici ; puisque ce n'est que du non-équilibre entre les surfaces ou lames d'eau AL, HO, qu'on leur y trouve des forces égales, qui bien loin d'être contraires entr'elles, y sont parfaitement d'accord, & tellement que l'une y faisant descendre AL, & l'autre faisant monter HO, la seconde y obéit à la première malgré la résistance qu'y fait le poids de l'eau qu'elle y fait monter dans la petite branche EN ; laquelle résistance ainsi surmontée dans ce cas de non-équilibre par la force du poids de l'eau de la grande branche MD, seroit conséquemment ici moindre que cette force, dont l'excès sur la force du poids de l'eau de la petite branche, s'y distriburoit en deux parties qui seroient les forces égales de descente & d'ascension qu'on vient de trouver aux surfaces ou lames d'eau AL, HO, dans ce cas de non-équilibre, où les poids des colonnes d'eau comprises dans les branches MD, NE, du Ciphon MDEN, auroient ainsi des forces inégales pour les y faire descendre de part & d'autre. Donc de ce qu'en ce cas de non-équilibre les forces de descente d'une des surfaces ou lames d'eau AL, HO, & d'ascension de l'autre, sont égales entr'elles ; il ne s'ensuit pas, ainsi qu'on l'en vient de conclure à la manière (ce me semble) des Cartesiens, que les efforts contraires que les poids des deux colonnes d'eau supposées d'abord à niveau en AH dans les deux branches du Ci-

phon MDEN, font pour les y faire descendre, soient égaux entr'eux ; ni conséquemment que ces colonnes ou cylindres d'eau doivent demeurer en équilibre à ce niveau.

III. Le défaut de justesse de cette conséquence n'est pas le seul qui me paroisse dans le raisonnement de l'art. 2. fait (ce me semble) à la maniere des Cartesiens : il m'y paroît encore un autre défaut, qui consiste en ce qu'on n'y compte que les mouvemens des surfaces AL, HO, quoiqu'il y en ait beaucoup davantage. Car pour que la surface ou lame d'eau AL descende de la hauteur quelconque AB dans la grosse branche MD du Ciphon MDEN, il faut (en supposant horizontal le plan touchant CF du canal de communication des deux branches MD, EN, de ce Ciphon) que tout le cylindre d'eau ACGL descende aussi de cette hauteur AB ; puisque la surface ou lame AL de ce cylindre d'eau contenue dans la branche MD, n'y sçauroit descendre de cette hauteur AB en BP, à moins que cette seconde lame-ci ne descende d'autant en la place d'une troisième de cette distance au-dessous d'elle ; pour cela il faut de même que cette troisième lame d'eau descende aussi d'une pareille hauteur en la place d'une quatrième de même distance au-dessous d'elle, & ainsi de suite jusqu'à la dernière lame CG qui entrera pour lors dans le canal CFED de communication des deux branches du Ciphon MDEN : d'où l'on voit que pour que la surface ou lame d'eau AL descende de la hauteur AB, il faut que toutes les suivantes jusqu'en CG, & conséquemment aussi que tout le cylindre d'eau ACGL, composé de toutes ces lames ou petits cylindres égaux, descende alors de cette hauteur AB. On démontrera de même que pour que la surface HO de l'autre cylindre d'eau HFPO, forcée par cette descente de ACGL (supposé d'abord lui être à niveau) de monter en KQ d'une hauteur HK, qui rende $KQ \times HK = AL \times AB$, monte en effet de cette hauteur, il faut que tout le cylindre KFPQ monte aussi de cette hauteur HK, dans le tems que l'autre ACGL descend de la hauteur AB. Par consequent

en ce cas-ci de non-équilibre les vîteſſes de ce cylindre d'eau ACGL, & d'afcenſion de l'autre KFPQ, ſeront ici entr'elles en raiſon de ces hauteurs AB, HK, qu'ils y parcourent en même tems en cès deux ſens contraires. Ainſi les quantitez de mouvemens de ces deux cylindres d'eau $ACGL = AC \times AL$, & $KFPQ = KF \times KQ$, ſeront ici entr'elles : : $AC \times AL \times AB. KF \times KQ \times HK$ (à cauſe de $AL \times AB = KQ \times HK$) : : $AC. KF$.

Ce ſont-là les quantitez de mouvement réſultantes ici du non-équilibre qu'on y ſuppoſe, & non pas les ſeules des deux ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, priſes dans le raiſonnement de l'art. 2. pour tout ce qui en réſulte de ce non-équilibre. Donc outre le défaut de ce raiſonnement, marqué dans cet art. 2. quand même il n'y auroit point ici d'autre mouvement que celui des ſurfaces AL, HO : y voici encore un autre défaut, qui vient de n'y avoir ſuppoſé que cette ſeule quantité de mouvement.

IV. Peut-être que ceux auxquels j'expoſe bonnement ici mes difficultez ſur leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, diront que les quantitez de mouvement qu'ils prennent ici pour les réſultantes du non-équilibre qu'ils y ſuppoſent entre les cylindres d'eau ACGL, HFPO, pour en conclure l'équilibre entr'eux, ne ſont pas les ſeules des ſurfaces AL, HO, ainſi qu'on l'a crû dans l'art. 2. mais qu'elles ſont celles des cylindres entiers ACGL, HFPO, telles qu'on les leur vient de trouver dans le précédent art. 3. en raiſon des hauteurs AC, EK, de ces deux cylindres d'eau ; leſquelles quantitez de mouvement ſont égales entr'elles, non pas à la vérité toujours, mais du moins au premier inſtant de leurs naiſſances contemporaines ; puifque les hauteurs AB, HK, de deſcente de la colonne d'eau ACGL, & d'afcenſion de HFPO ſuppoſée d'abord à niveau de celle-là, parcourues par ces deux cylindres d'eau pendant ce même inſtant, ſe trouvant alors infiniment petites, & conſequemment négligeables par rapport aux finies AC, EK ; n'empêchent point que celles-ci, ni conſequemment (art. 3.) que les quantitez

de mouvement des cylindres d'eau ACGL, KEFQ, ne puissent être prises pour égales entr'elles en ce cas de non-équilibre. Cela étant, & l'infinie petitesse de la hauteur HK permettant aussi de prendre pour égaux entr'eux les cylindres KEFQ, HFPO, qui en montant la parcourent ensemble de vitesses égales; & conséquemment comme ayant alors des quantitez égales de mouvement: les cylindres d'eau ACGL, HFPO, supposés d'abord à niveau entr'eux, auroient pareillement ici des quantitez égales entr'elles de mouvement au premier instant de leur non-équilibre, lequel par conséquent y rendroit ces deux cylindres d'eau ACGL, HFPO, ou leurs poids en raison reciproque de leurs vitesses exprimées par les hauteurs AB de descente du premier, & HK d'ascension du second, qu'ils y parcoureroient ce premier instant. Donc alors, diront ces Sectateurs de M. Descartes, suivant son principe rapporté ci-dessus, ces deux cylindres d'eau auroient ici des forces égales; & par conséquent y demeureroient en équilibre entr'eux, & leurs surfaces AL, HO, au niveau AH auquel on les a supposées d'abord, au lieu de se mouvoir ainsi que ces Messieurs le supposent aussi d'abord pour prouver cet équilibre.

Cette dernière conséquence est la même que la dernière du raisonnement de l'art. 2. avec cette seule différence, que là elle est déduite de l'égalité des seuls mouvemens que les surfaces AL, HO, des cylindres d'eau ACGL, HFPO, auroient dans le cas de leur non-équilibre; & qu'ici elle est déduite de l'égalité de ce que ces deux cylindres en auroient alors, l'un au gré de sa pesanteur, & l'autre malgré la sienne: de sorte que des deux défauts que les art. 2. 3. font voir dans la première de ces deux conséquences des raisonnemens Cartesiens de l'art. 2. & de celui-ci, la seconde est exempte du premier venu (art. 3.) de n'avoir pas employé dans l'art. 2. comme dans celui-ci, tout le mouvement de l'eau des branches du Ciphon, résultant du non-équilibre supposé. Mais cette seconde conséquence, qui est la dernière du

raisonnement Cartesien de cet article-ci, a le second des défauts de celle-là, étant aussi peu juste qu'elle, comme on le verra par la même raison qui a fait voir le défaut de justesse de cette dernière conséquence de l'art. 2. dans la réflexion faite sur elle dans ce même art. 2.

Fig. 287.

V. J'avouerai encore ici que ce même défaut de justesse me paroît de même, & pour la même raison dans la conséquence que les Cartesiens tirent du même principe de leur Maître par rapport à l'équilibre entre deux forces ou deux poids appliquez à des Machines : par exemple, après avoir dit à l'ordinaire que si deux poids A, F, appliquez aux extrémités du Levier AF appuyé en son point D placé entr'eux, sont en raison reciproque des bras DA, DF, de ce Levier, c'est-à-dire, que si $A.F::DF.DA$. ces deux poids A, F, demeureront en équilibre entre eux sur l'appui D de ce Levier : après, dis-je, cet énoncé, ces Messieurs, pour le prouver, disent que si ces deux poids A, F, ainsi conditionnez, ne demeueroient pas ici en équilibre entr'eux sur cet appui D, un d'eux, par exemple, A l'emporteroit sur l'autre ; & que pendant que ce poids A feroit ainsi passer le Levier AF en une autre situation quelconque CK, il parcourroit autour du centre D l'arc circulaire AC, en forçant l'autre poids F à parcourir en sens contraire l'arc semblable FK autour du même centre D : de sorte que l'on auroit alors $FK.AC::DF.DA$ (*Hyp.*) :: $A.F$. ou $A.F::FK.AC$. c'est-à-dire, les poids A, F, entr'eux en raison reciproque des chemins AC, FK, qu'ils parcourreroient alors. D'où ces Sectateurs de M. Descartes concluent suivant son principe rapporté au commencement de cette Section-ci, que ces poids auroient alors des forces égales ; & conséquemment qu'ils demeueroient ici en équilibre entr'eux sur l'appui D, au lieu de s'y mouvoir comme ces Auteurs le supposent d'abord, pour en déduire ainsi cet équilibre.

Cette dernière conséquence est encore semblable à la dernière de l'art. 2. déduite de même à leur manière ; & conséquemment elle a aussi le même défaut de justesse

que celle-là, remarqué dans la réflexion faite sur cette autre-là dans cet art. 2. ou tout au plus celle ci ne prouveroit comme elle l'équilibre que *ab absurdo*, ou que par l'impossibilité du mouvement qui s'y opposeroit. La raison de cet inconvenient rapportée dans ce même art. 2. pour cette conséquence-là par rapport à l'équilibre des Liqueurs, fera voir ce même inconvenient dans la précédente, par rapport à l'équilibre sur le Levier ici supposé: l'application y en est aisée à faire; ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage.

V I. Cette même raison pourroit aussi servir à faire voir de même cet inconvenient dans la maniere précisément la même dont les mêmes Auteurs expliquent l'équilibre sur les autres Machines, sans compter qu'il y a bien des Problèmes de Statique, qui ne seroient pas aisez à résoudre de cette maniere, sur tout ceux où il s'agiroit de mettre tant de puissances qu'on voudroit en équilibre sur celle qu'on voudroit de ces Machines (parmi lesquelles la funiculaire soit aussi comprise) n'en ayant de donné que l'appui, ou que les rapports de ces puissances, ou seulement leurs directions; ce que les seules solutions qu'on voit ici de pareils Problèmes, font cependant voir être faciles à résoudre par le principe des forces composées ou dérivées, qu'on suit par tout ici.

Au reste, n'ayant en vûe que de faire faire attention à la fécondité de ce principe dans la Statique, & non d'attaquer l'usage qu'on y fait de celui de M. Descartes; je n'expose ici mes difficultez sur cet usage, que forcé par l'Auteur qui m'en a fait une objection, & pour rendre en même tems le Lecteur prévenu en faveur de ce principe Cartesien, plus disposé à écouter l'explication que je vais donner de l'équilibre des Liqueurs suivant l'autre principe, toute aussi naturelle que celle qu'il m'a fournie jusqu'ici de l'équilibre des Solides: c'est dans les propositions suivantes que va se trouver cette explication démontrée de l'équilibre des Liqueurs, que je n'ajoute ici

que parce qu'on m'a marqué la souhaiter, ne m'étant proposé jusques-là que de traiter (comme j'ai fait jusqu'ici) de l'équilibre des Solides, c'est-à-dire, des poids ou des puissances appliquées à des Machines; ce qui étoit tout le dessein du Projet qui parut de cet Ouvrage-ci en 1687. Ce qui s'y trouve démontré dans la prop. 3. comme ici dans la Section 6. des Poids soutenus sur des Plans inclinez, réduisant toujours l'équilibre de quantitez inégales d'une même Liqueur quelconque, ou de poids inégaux de Liqueurs différentes, contenues, par exemple, dans les branches du Ciphon, qui les auroit de grosseurs inégales, à l'équilibre de grosseurs égales & de poids égaux de ces Liquides, lesquelles s'y contrepesent, le surplus de ce qu'en contient la plus grosse des deux branches du Ciphon, étant toujours soutenu (comme sur un plan incliné) sur ou contre le panchant du rétrécissement de cette grosse branche: c'est ce qu'on va démontrer, & en conséquence que cette maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, est toute aussi naturelle que celle qu'on a vûe démontrée dans la prop. 3. du Projet de ceci publié en 1687. & qu'on voit encore ici démontrée de même dans la Section 6. de l'équilibre des Poids soutenus sur des plans inclinez. Ce qu'auroient apperçû sans doute d'eux-mêmes, tant ceux qui m'ont marqué douter, que celui qui a nié que cet équilibre des Liqueurs pût aussi être démontré par le même principe de ce Projet & de tout ceci, si leur prévention pour la maniere Cartesienne d'expliquer cet équilibre des Liqueurs, leur eût permis assez d'attention pour cela: ils en jugeront mieux par ce qui suit, si les difficultez précédentes sur cette maniere Cartesienne, peuvent obtenir d'eux cette attention, pour laquelle obtenir j'ai fait ces difficultez, que j'aurois sûrement omises, si je n'y eusse point été forcé par l'Auteur dont je viens de parler, ne voulant de contestation avec personne.

DEFINITION

DEFINITION XXXIII.

On dit qu'une Liqueur est à *niveau*, lorsqu'elle a toute sa surface horisontale; & l'on appelle *surface* d'une Liqueur ce qu'elle en a de non-touchée par le vase qui la contient, laquelle s'appellera aussi *surface libre*, & *non-empêchée* par les côtes du vase.

AXIOME IX.

Un corps pesant descend tant qu'il le peut, ou que rien ne l'en empêche absolument.

COROLLAIRE I.

Donc une Liqueur (parfaitement coulante, telles que seront celles dont on parlera dans la suite) abandonnée à elle-même dans un vase quelconque ABEF, doit toujours s'y mettre à niveau: car si cette surface libre étoit MDN plus haute du côté de M que du côté de N, les parties de cette surface plus hautes du côté de M en pourroient descendre vers les plus basses du côté de N, le long de cette surface oblique MDN, comme le long d'un plan incliné, si on la suppose droite ou plane, ou comme le long de plusieurs plans inclinez contigus, si on la suppose faite de plusieurs planes, dont le nombre seroit infini, si on la supposoit courbe; & toujours de même jusqu'à ce qu'elle eût toutes ses parties d'égale hauteur dans un plan horisontal GH, qui la rencontrât en un endroit D, qui rendît égaux les espaces MDH, NDG. Donc, suivant l'Axiome précédent, si la surface de la Liqueur contenue dans le vase ABEF, étoit hors de niveau en MDN par quelque cause que ce fût, abandonnée à elle-même, elle s'y mettroit en GH par la chute de la portion MDH de cette Liqueur dans l'espace égal NDG plus bas que MDH; & par la même raison cette Liqueur resteroit à ce niveau GH, après toute agitation cessée, sa surface n'ayant plus alors de profondeur où aucune de ses parties puisse descendre. Donc une Liqueur abandonnée à elle-

FIG. 288.
289.



même dans un vase quelconque , doit toujours enfin s'y mettre à niveau , & y rester en équilibre tant que rien ne l'y troublera.

COROLLAIRE II.

FIG. 290.

En ce cas d'équilibre d'une Liqueur , ce n'est pas assez pour y rester à niveau , autrement l'eau d'une surface horisontale y pourroit rester à niveau sur de l'huile : il faut de plus que les colonnes voisines verticales PCDQ , QDKR , RKLS , &c. de cette Liqueur , se contre-balancent de maniere qu'aucune par son poids ne l'emporte sur l'autre ; autrement l'élévation de cette seconde colonne en rendroit les parties superieures plus élevées que les superieures de la premiere qui l'auroit fait monter , lesquelles se feroient ainsi abaissées : de sorte qu'alors , suivant l'Axiome , ces plus hautes parties tomberoient en la place ainsi abandonnée par les plus basses ; ce qui remettant (*Corol. I.*) la Liqueur à niveau , & ses colonnes au même état qu'auparavant , celle qui auroit élevé sa voisine , l'élèveroit encore , & en feroit encore tomber (*Ax. 9.*) les parties superieures en la place abandonnée par les siennes en descendant , & toujours de même : d'où résulteroit un mouvement perpetuel de cette Liqueur sans aucun niveau permanent , où elle demeurât en équilibre. Donc pour qu'elle y demeure à niveau , conformément au *Corol. I.* ce n'est pas assez que la surface en soit horisontale , il faut de plus que ses colonnes verticales se contre-balancent , & se soutiennent mutuellement , non seulement en s'appuyant contre les côtes du vase , mais encore en faisant effort sur son fond pour s'élever mutuellement comme feroient deux poids égaux aux extrêmités d'une balance appuyée sur ce fond du vase. C'est ainsi que l'eau versée sur de l'huile dans un vase l'y force de monter , l'eau plus pesante que l'huile l'emportant sur elle dans le contre-balancement de leurs colonnes , quoiqu'égaux : l'emportant , dis-je , par son plus grand poids , & non par la force de sa chute en la versant ; autrement de l'huile

versée ainsi sur de l'eau , devroit de même la faire monter ; ce qui est contraire à l'expérience , au lieu que le cas de l'huile élevée par l'eau versée sur elle , y est conforme.

COROLLAIRE III.

Donc dans un vase rétréci par en haut, ou de côtez obliques à l'horison, qui de la Liqueur dont il est rempli, en retiennent une partie au niveau du reste ; ce reste de Liqueur plus élevée, est dans un effort continuel contre ces côtez obliques du vase, ou de son rétrécissement, pour élever à son niveau ce que ces côtez obliques en empêchent d'y monter : aussi l'expérience fait-elle voir que si l'on fait un trou vertical à quelqu'un de ces côtez obliques, au-dessus duquel soit le niveau de la Liqueur, elle s'échappera aussi-tôt par ce trou en montant presque au niveau de la Liqueur qui y seroit entretenue, auquel on démontre que ce jet vertical atteindroit, si la résistance de l'air, & celle du frottement que la Liqueur souffre en passant par ce trou, ne s'y opposoient pas.

S C H O L I E.

I. L'expérience fait aussi voir que telle est la nature générale des Liqueurs, que celle-ci, comme toute autre, s'échapperoit de même force par ce trou, quelque autre direction qu'il eût. D'où l'on voit en général que les Liqueurs pressées à volonté, font des efforts égaux en tous sens pour s'échapper des vases où elles se trouvent ainsi comprimées : c'est pour cela que l'eau d'un vase s'en échappe avec des vitesses égales de tous côtez par des trous faits au-dessus du niveau de cette Liqueur à distances égales de ce niveau.

Je ne sçais personne qui ait donné la raison mécanique de cette expérience, faute de connoître assez la nature des Liqueurs : faute de cela on ne voit que le fait, sans en voir la cause, ni comment des forces comprimantes, par exemple, verticales comme la pesanteur, produisent

des pressions horizontales égales aux verticales qu'elles causent au niveau de ces horizontales. Cependant l'expérience atteste ce fait dans les Liqueurs comprimées dans des vases par leurs pesanteurs. Il faut donc conclure que ce fait ne vient pas de la pression seule de chacune de ces Liqueurs, mais de son concours avec quelque autre cause qui ne peut être (ce me semble) que la fluidité de cette Liqueur : autrement ces pressions ainsi égales en tous sens, se trouveroient dans des globules sans fluidité, ainsi comprimées dans un vase qui en seroit rempli ; ce que l'expérience & la Mécanique font voir n'être pas. Or comment la fluidité des Liqueurs contribue-t-elle avec leur pesanteur, secourue, ou non, de quelque autre cause comprimante, à produire des pressions ainsi égales en tous sens ? C'est ce qu'on n'a point encore démontré, & ce que j'avoue ne pas voir non plus. On s'est contenté de dire que cette fluidité des Liqueurs consiste dans une égale facilité des parties de chacune à se mouvoir en tous sens, abstraction faite de leurs pesanteurs, ou de quelque autre force comprimante, sans dire la cause de cette égale facilité qu'une telle abstraction laisseroit voir de même dans des globules sans fluidité, les laissant voir indifferens à être en repos ou en mouvement, suivant des déterminations quelconques.

II. Il est vrai que les Cartesiens assignent la matiere subtile pour cause de la fluidité des Liqueurs, & conséquemment pour cause de cette égale facilité des parties de chaque Liqueur à se mouvoir en tous sens, en ce que (disent-ils) la matiere subtile traversant chaque Liqueur en tous sens avec des forces égales, en agite aussi les parties en tous sens avec d'égales forces.

Je ne m'arrête point à demander la cause de ces mouvemens en tous sens de la matiere subtile, dont la fluidité qu'on lui suppose, seroit inutilement alléguée pour cause de tous ces mouvemens differens ; puisqu'il s'agit ici de la cause elle-même de la fluidité qu'on fait consister en une égale facilité des parties de chaque Liqueur à se mouvoir

en tous sens ; ce qui permet à sa pesanteur de la mettre toujours à niveau en poussant de tous côtez (lorsqu'elle n'y est pas) vers les plus basses ce que cette Liqueur a de parties plus élevées , qui par leur égale facilité à se mouvoir , ou plutôt à être mues en tous sens , obéissent sans peine.

Je ne m'arrête point non plus à demander comment ces parties de chaque Liqueur , poussées (comme veulent ces Messieurs) chacune de tous côtez à la fois avec des forces égales par la matiere subtile , qui ne leur donneroit ainsi aucun mouvement , auroient plus de facilité chacune à se mouvoir en tous sens , que si cette matiere subtile étoit en repos entr'elles , ou qu'il n'y en eût point du tout entre-elles ; ni pourquoi ces particules de Liqueur auroient plus de cette facilité que des globules sans liquidité , qui leur seroient égaux en masses.

III. Je veux bien supposer avec ces Messieurs , que la matiere subtile donne effectivement aux particules de chaque Liqueur cette facilité à se mouvoir ou à être mues avec des forces égales en tous sens , abstraction faite de leur pesanteur , & de toute autre force comprimante. Mais je demande comment sans cette abstraction , c'est-à-dire , lorsqu'on considère ces Liqueurs comme comprimées par leur pesanteur secourue , ou non , de quelque autre force étrangere , simple ou composée , à volonté : je demande , dis-je , comment il n'en résultera pas alors aux parties de chaque Liqueur , des pressions plus fortes suivant la direction commune de tout ce qu'il y a de forces qui les pressent , qu'en tout autre sens ; & par quelle raison mécanique on peut concevoir que toutes ces pressions seront égales en tous sens dans chaque couche de Liqueur perpendiculaire à cette direction commune. C'est cependant ici un fait que l'expérience atteste de chaque couche horizontale d'eau comprimée par sa pesanteur dans un vase ou réservoir , d'où cette eau s'échappe avec des vitesses égales par des trous faits au-dessous de son niveau à distances égales quelconques de ce niveau , ou par des

trous faits au fond de ce vase, s'il l'a horizontal, & a ses côtes à niveau de ce fond, fait de pressions égales en tous sens, qui doit arriver de même dans toute une couche quelconque de Liqueur quelconque perpendiculaire à la direction commune à sa pesanteur, & à tant d'autres forces comprimantes qu'on lui voudra supposer, lesquelles en compriment également toute la surface, & en conséquence toutes les parties, comme fait la pesanteur.

IV. Quelqu'ignorée que soit la cause totale de ce fait, l'expérience qu'on en a par rapport à l'eau comprimée par sa seule pesanteur dans un vase ou réservoir, où elle est tranquille & comme en repos, l'a fait prendre jusqu'ici pour un principe d'expérience : c'est ainsi que nous le prendrons aussi dans la suite, ou en conséquence nous supposerons à l'ordinaire que les pressions de l'eau comprimée par sa seule pesanteur, sont égales en tous sens à distances égales de son niveau ; & pour faire voir que ces pressions égales en tous sens ne sont pas l'effet de la seule pesanteur, voici celles qu'elle produiroit seule.

LEMME XIX.

Fig. 291.

Soit un cylindre ou prisme quelconque $EAFDCVBT$ de base $BVCT$ de figure quelconque, lequel soit coupé suivant sa longueur par un plan qui y fasse une section parallélogrammique $ABCD$. Soit ce même corps coupé en travers par deux autres plans $HLGK$, $NSOZ$, perpendiculaires à celui-là, avec lequel ils aient des sections communes HG , NO , inclinées à volonté aux côtes parallèles AB , DC , de ce parallélogramme $ABDC$, en faisant les sections $HLGK$, $NSOZ$, avec le cylindre ou prisme quelconque $EAFDCVBT$.

Cela posé, je dis que les aires $HLGK$, $NSOZ$, de ces deux sections prismatiques transversales sont par tout entr'elles comme leurs sections communes HG , NO , avec le parallélogramme $ABCD$, c'est-à-dire, $HLGK. NSOZ :: HG. NO$.

D E M O N S T R A T I O N.

I. Soit aussi le cylindre ou prisme quelconque EAFDCVBT coupé par deux plans $NRPQ$, $HL\pi\beta$, parallèles à ceux des sections prismatiques proposées $HLGK$, $NSOZ$, chacun à chacun; & qui, en faisant avec ce corps les sections curvilignes $NRPQ=HLGK$, $HL\pi\beta=NSOZ$, parallèles & semblables chacune à son égale; & avec le parallélogramme $ABCD$. Les sections rectilignes $NP=GH$, $H\pi=NO$, parallèles aussi chacune à son égale, rendent égaux entr'eux les cylindres ou prismes partiels $KGLHNRPQN$, $L\pi\beta HNSOZN$.

II. Soit de plus NM perpendiculaire au côté AB du parallélogramme $ABCD$; & du point H de son côté opposé DC , les droites HX , HY , perpendiculaires en X , Y , sur les plans $NSOZ$, $NRPQ$, prolongez de ce côté là; & conséquemment aussi perpendiculaires aux droites prolongées ON , PN . Ce qui rendant les triangles rectangles NMO , HXN , semblables entr'eux, & aussi NMP , HYN , donne $HX.HN::NM.NO$. Et $HN.HY::NP.NM$. Donc (en raison troublée) $HX.HY::NP.NO$.

III. Or l'art. 1. vient de donner les cylindres ou prismes partiels $KGLHNRPQN=L\pi\beta HNSOZN$; & conséquemment leurs valeurs $NRPQ \times HY=NSOZ \times HX$, d'où résultent les aires $NRPQ.NSOZ::HX.HY$. Donc (art. 2.) $NRPQ.NSOZ::NP.NO$. Mais l'art. 1. vient de donner aussi $NRPQ=HLGK$, & $NP=HG$. Donc enfin les aires $HLGK.NSOZ::HG.NO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E.

Puisque l'article 1. donne les aires $NRPQ=HLGK$, $HL\pi\beta=NSOZ$, & les lignes droites $NP=GH$, $H\pi=NO$, on voit que l'on aura aussi les aires $HLGK.HL\pi\beta::HG.HP$. Et $NRPQ.NSOZ::NP.NO$. Et aussi $NRPQ.HL\pi\beta::NP.H\pi$ de sorte qu'en general, de quelque manière qu'un prisme quelconque soit coupé transversa-

lement par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires à un qui le coupe suivant la longueur en un parallélogramme quelconque; les aires des sections transversales prismatiques causez au prisme, coupé par ces plans transversaux, seront toutes entr'elles comme les sections communes de ces plans avec celui de ce parallélogramme.

THEOREME XLI.

FIG. 191.

Soient deux tuyaux ou vases prismatiques AB , AD , l'un vertical AB , & l'autre AD arbitrairement incliné à l'horizon, desquels les ouvertures en A , & les fonds ou bases $BSCR$, $KODM$, soient horizontales & de figures quelconques, & les hauteurs AC , AE , terminées à ces fonds prolongez. Soient ces deux vases cylindriques ou prismatiques remplis jusqu'en A de Liqueurs de pesanteurs spécifiques quelconques, f , ϕ , dirigées parallèlement à la verticale AE , & en quantitez dont les masses prismatiques AB , AD , soient m , μ ; des poids desquelles résultent sur les fonds $BSCR$, $KODM$, des vases AB , AD , des pressions p , λ , longitudinales, c'est-à-dire, suivant les longueurs AC , AK , de vases ou tuyaux; & de perpendiculaires p , ω , à ces mêmes fonds $BSCR$, $KODM$.

Cela posé, l'on aura toujours & par tout ici,

I. $\mu\phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A) pour les pressions longitudinales de ces fonds.

II. $\mu\phi \times AE = \omega mf \times AK$ (B) pour les pressions perpendiculaires de ces mêmes fonds.

DEMONSTRATION.

FIG. 192.

Avant toutes choses, pour ne point se broüiller aux noms qui se trouvent dans ces deux formules A, B, ni à ce qui s'en trouvera d'autres dans ce que ces formules en produiront d'autres; voici la liste de tous ces noms.

m, μ , masses des Liqueurs contenues dans les tuyaux AB, AD. Fig. 198

f, ϕ , les pesanteurs spécifiques de ces Liqueurs.

e, ϵ , leurs densitez.

b, β , les fonds horisontaux BSCR, KODM, de ces vases prismatiques.

b, ν , leurs sections BSCR, KOQN, perpendiculaires à leurs longueurs AC, AK.

p, λ , pressions longitudinales des Liqueurs sur les fonds BSCR, KODM.

p, ϖ , leurs pressions perpendiculaires.

PART. I. Cela posé, puisque (*Hyp.*) m, μ , sont les masses des Liqueurs dont les tuyaux AB, AD, sont supposés remplis jusqu'en A; & que f, ϕ , sont les pesanteurs spécifiques de ces Liqueurs: l'on aura $mf, \mu\phi$, pour les poids absolus de ces prismes de Liqueurs. Soit presentement δ la pesanteur relative résultante suivant AK de la pesanteur spécifique absolue ϕ de la Liqueur contenue dans toute cette longueur AK du tuyau AD: l'on aura de même $\mu\delta$ pour le poids relatif suivant AK de cette colonne prismatique AD de Liqueur. Or il est visible que les pressions longitudinales p, λ , que les poids $mf, \mu\delta$, dirigez par leurs pesanteurs f, δ , suivant AC, AK, font suivant ces directions sur les fonds horisontaux BSCR, KODM, sont en raison de ces poids. Donc $p. \lambda :: mf. \mu\delta$. D'où résulte $p\mu\delta = \lambda mf$. Mais la pesanteur δ suivant AK, étant ici dérivée de l'absolue ϕ suivant la verticale AE rencontrée en E par l'horizontale KE; on aura ici AK. AE

$:: \phi. \delta = \phi \times \frac{AE}{AK}$. Donc $p\mu\phi \times \frac{AE}{AK} = \lambda mf$, d'où résulte la for-

mule $p\mu\phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A) qu'il falloit 1°. démontrer.

Autrement. Soit du tuyau AD continué une partie AH de base encore horisontale GH, & remplie dans toute sa longueur AG d'une portion de la même Liqueur de ce tuyau AD supposée de pesanteur spécifique ϕ ; de laq. el-

la portion ou colonne AH de Liqueur, la masse soit x , & conséquemment dont le poids absolu soit $x\phi$, lequel soit capable de faire équilibre sur le plan incliné AG avec le poids absolu mf de la colonne AB de l'autre Liqueur dirigée suivant la verticale AC parallèle aux directions de ces deux poids absolus $x\phi$, mf .

Cela posé, il est démontré dans la Section 6. que pour cet équilibre (soient les horizontales GF, KE, qui rencontrent en F, E, la verticale AC prolongée) il faudroit ici $x\phi \cdot mf :: AG \cdot AF :: AK \cdot AE$. Et conséquemment $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or ce cas d'équilibre entre les poids absolus $x\phi$, mf , des prismes AH, AB, de Liqueurs sur les plans AG, AC, étant un cas où ces poids auroient des forces égales suivant ces plans, & où conséquemment ils presseroient également les bases horizontales GH, BSCR, suivant ces longueurs AG, AC; la pression longitudinale de la première GH de ces deux bases seroit ici égale à la longitudinale p de la seconde BSCR. Donc pour rendre ici égale à p la pression longitudinale de la base GH suivant AG ou AK, il y faudroit $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or il est visible que les pressions longitudinales p , λ , des bases horizontales GH, KODM, causées suivant la même direction AR par les colonnes prismatiques AH, AD, de même Liqueur, sont entr'elles en raison des longueurs

AG, AK, de ces prismes: c'est-à-dire, $p \cdot \lambda :: AG \cdot AK = \frac{\lambda}{p} \times AG$. Donc $x\phi \times AE = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$. Mais les masses x , μ , des

mêmes colonnes AH, AD, de même Liqueur, sont entr'elles comme leurs longueurs AG, AK; c'est-à-dire,

$x \cdot \mu :: AG \cdot AK$. D'où résulte $x = \mu \times \frac{AG}{AK}$. Donc $\mu\phi \times$

$\frac{AE \times AG}{AK} = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$; d'où résulte $\mu\phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A).

Ce qu'il falloit encore démontrer.

PART. II. Si de l'extrémité L de KL prise à volonté sur AK prolongée de ce côté-là, on mene LP perpendiculaire en P sur la verticale KP; si de plus on prend ϖ pour la pression ou force dont la colonne de Liqueur AD presse le fond horifontal KODM suivant cette verticale KP, c'est-à-dire, perpendiculairement à ce fonds, en conséquence de la pression ou force λ dont ce fond KODM est pressé par la même AD suivant sa longueur AK: cette pression verticale ϖ suivant KP résultant ainsi de celle λ suivant AK ou KL, on aura ici $\lambda. \varpi :: KL. KP :: AK. AE$.

Et conséquemment $\lambda = \varpi \times \frac{AK}{AE}$. Donc en substituant cette

valeur de λ en sa place dans l'équation $p\mu\phi \times AE = \lambda m f \times$

AK (A) de la part. 1. l'on aura ici $p\mu\phi \times AE = \varpi m f \times \frac{AK}{AE}$,

ou $p\mu\phi \times \overline{AE}^2 = \varpi m f \times \overline{AK}^2$ (B). Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

COROLLAIRE I.

Pour faire entrer présentement dans cette formule B, & dans celle A de la part. 1. Les fonds horifontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, lesquels fonds sont les bases horifontales des colonnes de Liqueurs que ces vases contiennent jusqu'en A: soient ces bases BSCR, KODM, appellées b, β ; les hauteurs de ces colonnes prismatiques étant AC, AE, l'on aura $b \times AC, \beta \times AE$, pour leurs volumes; & si l'on prend e, ϵ , pour les densitez de ces Liqueurs, les prismes AB, AD, qu'on en suppose dans les vases ou tuyaux de ces noms, auront leurs masses $m = bc \times AC, \mu = \beta \epsilon \times AE$. Donc en substituant ces valeurs de m, μ , en leurs places dans les précédentes équations A, B, des part. 1. 2. elles les changeront en d'aussi generales.

1°. $p\beta\epsilon\phi \times \overline{AE}^2 = \lambda b e f \times AC \times AK$ (C) pour les pressions lon-

H h ij

gitudinales p, λ , des fonds horisontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD.

2°. $p\beta\epsilon\phi \times \overline{AE}^3 = \varpi b\epsilon f \times AC \times \overline{AK}^2$ (D) pour les pressions perpendiculaires p, ϖ , des mêmes fonds.

COROLLAIRE II.

Si de plus on suppose le tuyau ou vase prismatique AD coupé en KOQN perpendiculairement à sa longueur AK, l'on aura $KODM \times AE = KOQN \times AK$, c'est-à-dire (suivant les noms β, ν , des bases KODM, KOQN) $\beta \times AE = \nu \times AK$, d'où résulte $AK = \frac{\beta \times AE}{\nu}$. Cela se trouve aussi par

le moyen du Corol. du Lemme . lequel donne les aires KODM (β). KOQN (ν) :: KD. KQ (à cause des triangles rectangles semblables KQD, AEK) :: AK. AE. D'où résulte aussi $\beta \times AE = \nu \times AK$, & en conséquence encore $AK = \frac{\beta}{\nu} \times AE$. Donc en substituant cette valeur de AK en sa

place dans les équations C, D, du précédent Cor. 1. elles se changeront encore en d'aussi générales.

1°. $p\nu\epsilon\phi \times AE = \lambda b\epsilon f \times AC$ (E) pour les pressions longitudinales p, λ , des fonds horisontaux BSCR. KODM.

2°. $p\nu\epsilon\phi \times \overline{AE}^2 = \varpi b\epsilon f \times AC \times AK$ (F) pour les pressions perpendiculaires ou verticales p, ϖ , des mêmes fonds.

COROLLAIRE III.

Fig. 294.

Supposons présentement que les tuyaux ou vases prismatiques AB, AD soient de hauteurs égales AC, AE, comme dans la Fig. 294. que les grosseurs ou bases perpendiculaires BSCR, KOQN, de figures quelconques en soient aussi égales entr'elles, & qu'ils soient remplis d'une même Liqueur quelconque depuis l'horizontale CK jusqu'en A : la première de ces trois hypothèses renvoyant à la suite précédente des noms employez ici ; la se-

conde rendant $AC=AE$, & la troisième rendant $e=e$, $f=f$, suivant la même liste:

1°. L'équation E du nomb. 1. du précédent Corol. 2. se changera pour ce cas-ci en $p=\lambda$. Ce qui fait voir que les pressions longitudinales p , λ , des fonds horizontaux BSCR, KODM, causées à ces fonds par les poids des prismes AB, AD, de hauteurs égales, de grosseurs égales, & de même Liqueur quelconque, suivant les longueurs AC, AK, de ces prismes, seront toujours ici égales entre-elles, quoique ces poids soient inégaux entr'eux, y étant en raison de ces longueurs AC, AK.

2°. L'équation F du nomb. 2. du même Corol. 2. se changera pareillement pour ce cas-ci en $p \times AE = \varpi \times AK$. Ce qui donnant $p. \varpi :: AK. AE$. fait voir que les pressions verticales ou perpendiculaires p , ϖ , des fonds horizontaux BSCR, KODM, des tuyaux ou vases prismatiques AB, AD, seroient ici comme la longueur AK de l'incliné AD y seroit à sa hauteur AE: de sorte qu'ayant ici (*Hyp.*) $AC=AE$, ces pressions verticales p , ϖ , des fonds horizontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, seroient ici en raison reciproque des longueurs AK, AC, de ces deux vases.

C O R O L L A I R E I V.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Corol. 3. excepté que les bases ou fonds horizontaux BSCR (b), KODM (β), des vases prismatiques AB, AD, soient ici égaux, quelles que soient les grosseurs de ces prismes. Outre $AC=AE$, $e=e$, $f=f$, comme dans le précédent Corollaire 3. l'on aura ici $b=\beta$; & en conséquence,

1°. L'équation C du nomb. 1. du Corol. 1. se changera ici en $p \times AC = \lambda \times AK$, d'où résulte $p. \lambda :: AK. AC$. Ce qui fait voir qu'en ce cas-ci les pressions longitudinales p , λ , des fonds horizontaux égaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, se-

roient entr'elles en raison reciproque des longueurs AC, AK, de ces prismes.

2°. L'équation D du nomb. 2. du même Corol. 1. se changera de même ici en $p \times \overline{AC}^2 = \varpi \times \overline{AK}^2$, d'où résulte $p. \varpi :: \overline{AK}^2. \overline{AC}^2$. Ce qui fait aussi voir qu'en ce cas-ci les pressions verticales ou perpendiculaires p , ϖ , des fonds horizontaux égaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, & toujours remplis d'une même Liqueur quelconque, seroient pareillement ici en raison reciproque des quarrés des longueurs AC, AK, de ces deux prismes.

COROLLAIRE V.

Suivant les précédens nomb. 1. 2. du Corol. 4. dans lequel AK est toujours plus grande que AC, si un vase prismatique vertical AB, & un prismatique AD arbitrairement incliné à l'horison ont des fonds horizontaux égaux, & qu'ils soient remplis jusqu'à des hauteurs égales d'une même Liqueur quelconque; la pression tant longitudinale que verticale du fond du vase vertical, sera toujours plus grande que la pression tant longitudinale que verticale du fond égal du vase incliné.

SCHOLIE.

Jusqu'ici les fonds des vases prismatiques ont été supposés tous horizontaux: voici presentement pour de pareils vases de fonds arbitrairement inclinez à l'horison.

Fig. 295.

I. Pour cela soit en general un vase cylindrique ou prismatique ACDF de position quelconque sur son fond AMFN de figure & de position aussi quelconque; lequel vase, d'ouverture horizontale CBDE, soit rempli de telle Liqueur qu'on voudra, jusqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra aussi. Soit O le centre de gravité de la quantité AGHF de ce que le vase contient de cette Liqueur; du point O soit OS perpendiculaire en S au fond AMFN rencontré en R par OR parallèle à la longueur

Fig. 286.

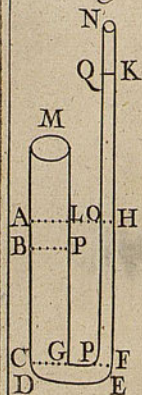


Fig. 287.

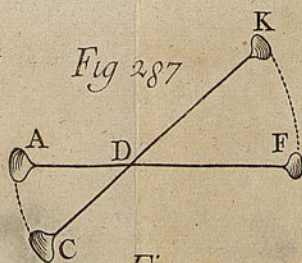


Fig. 288.

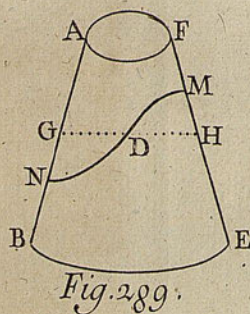
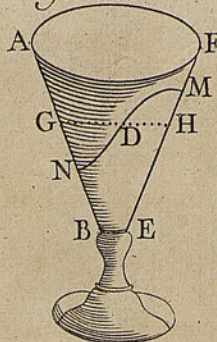


Fig. 289.

Fig. 290.

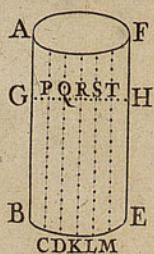


Fig. 291.

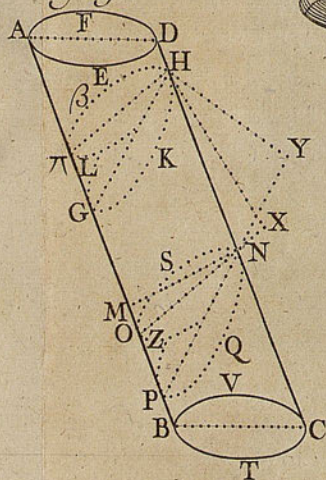


Fig. 292.

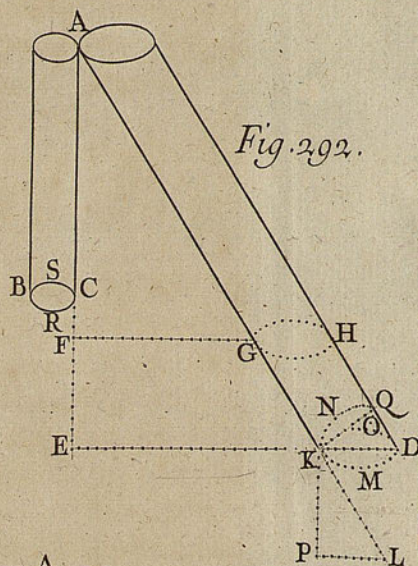


Fig. 293.

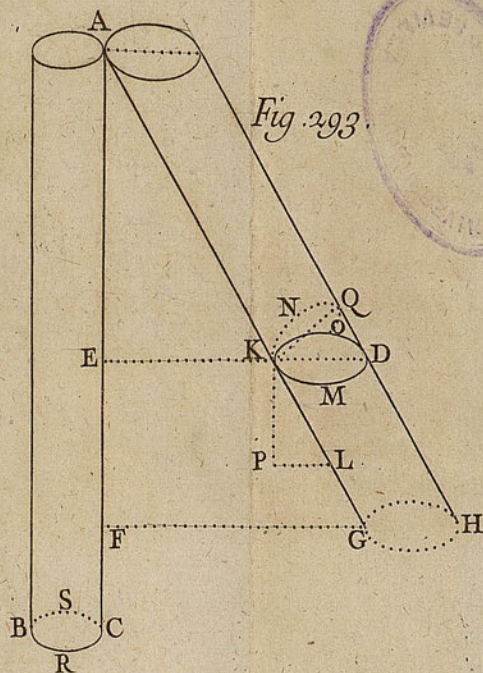
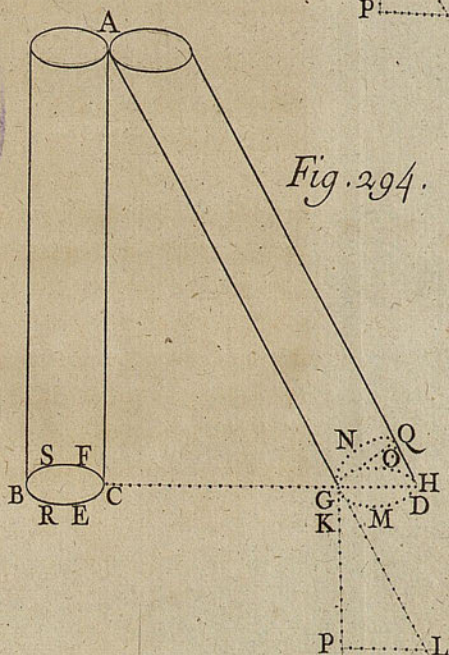


Fig. 294.



ou à un des côtez du vase prismatique ACDF que le plan ROS perpendiculaire au plan du fond AMFN, coupé en un quadrilatere de même nom ACDF, de deux côtez opposés CA, DF, parallèles entr'eux, d'un troisième côté CD qui est horizontal, & d'un quatrième AF de position quelconque. De l'angle D de ce quadrilatere ACDF soit DF perpendiculaire en K sur le fond AMFN prolongé, & conséquemment sur la droite AF aussi prolongée de ce côté-là; ce qui donnera le triangle rectangle DKF semblable au triangle OGR. Soient enfin les verticales OL, DZ, rencontrées en L, Z, par des plans perpendiculaires en R, F, aux parallèles OR, DF; ce qui rendra aussi les triangles rectangles ORL, DEF, semblables entr'eux.

Fig. 297.
& suivantes
jusqu'à 301.

II. Cela posé, puisque (*art. 1.*) les angles ORL, OSR, sont droits, & que la droite OL est verticale, le poids absolu de la quantité AGHF de Liqueur (dont O est supposé être le centre de gravité, & AL la direction) est à la force dont il presse suivant OR le fond AMFN :: OL. OR. Et cette force suivant OR est à ce qu'il en résulte de pression à ce fond AMFN suivant sa perpendiculaire OS :: OR. OS. Donc (en raison ordonnée) le poids absolu de tout ce que le vase prismatique ACDF contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, est à ce qu'il en résulte de pression perpendiculaire au fond AMFN :: OL. OS.

III. Or (*art. 1.*) les triangles ORL, DEF, sont semblables entr'eux, & aussi entr'eux les triangles OSR, DKF; ce qui donne OL. OR :: DZ. DF. Et OR. OS :: DF. DK. d'où résulte (en raison ordonnée) OL. OS :: DZ. DK. Donc (*art. 2.*) le poids absolu de tout ce que le vase prismatique ACDF contient de Liqueur jusqu'au niveau quelconque GH, est à ce qu'il en résulte de pression perpendiculaire au fond AMFN :: DZ. DK.

IV. Or en prenant T pour le sinus total, & \int pour la caractéristique des autres sinus, ayant (*art. 1.*) les angles DEF, DKF, droits; la Trigonometrie donnera par tout ici DZ. DF :: T. \int DZF. Et DF. DK :: T. \int DFK. Donc

(en multipliant par ordre) $DZ \cdot DK : T \times T \cdot \sqrt{DZF} \times \sqrt{DFK}$.
 Donc (*art.* 3.) le poids total & absolu de la quantité
 AGHF de Liqueur contenue jusqu'au niveau GH dans
 le vase prismatique ACDF, est à la pression ou force dont
 ce poids total presse perpendiculairement le fond AMFN
 de ce vase :: $T \times T \cdot \sqrt{DZF} \times \sqrt{DFK} : T \times T \cdot \sqrt{DZF} \times \sqrt{DFA}$.

V. Si le quadrilatere ACDF est vertical, & qu'ainsi la
 verticale DZ soit dans le plan de ce quadrilatere dont le
 côté CD (*art.* 1.) horizontal soit prolongé vers X, l'on
 aura l'angle ZDX droit en même plan que le droit DFZ;
 ce qui donnera pour lors les angles $ZDF + FDX = ZDX$
 $= DFZ = ZDF + DZF$, & conséquemment $FDX = FDZ$,
 ou $\sqrt{FDX} = \sqrt{FDZ}$. Donc (*art.* 4.) le poids total & absolu
 de la quantité AGHF de Liqueur contenue jusqu'au ni-
 veau GH dans le vase prismatique ACDF, est ici à la
 pression ou force dont ce poids total presse perpendiculai-
 rement le fond AMFN de ce vase (l'un & l'autre étant
 d'inclinaison quelconque à l'horison) :: $T \times T \cdot \sqrt{FDX}$
 $\times \sqrt{DFA}$. c'est-à-dire, comme le quarré du sinus total T
 est au produit du sinus de l'angle FDX d'inclinaison de
 ce vase prismatique ACDF avec l'horison DX, multi-
 plié par le sinus de l'angle DFA d'inclinaison de ce vase
 sur son fond AMFN.

VI. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le
 précédent art. 5. si le vase prismatique ACDF est égale-
 ment incliné entre son fond AMFN & son ouverture ho-
 rizontale CEDB, c'est-à-dire, si les angles FDX, DFK,
 qu'il fait avec eux sont égaux entr'eux, soit que le fond
 AMFN soit aussi horizontal, comme dans la Fig. 297.
 ou non comme dans la Fig. 299. Ce cas rendant les an-
 gles FDX, DFK, égaux entr'eux, l'on aura ici $\sqrt{FDX} \times$
 $\sqrt{DFA} = \sqrt{DFK} \times \sqrt{DFK} = \sqrt{FDA} \times \sqrt{DFA}$. Donc (*art.* 5.) le
 poids absolu de tout le prisme oblique AGHF de Liqueur
 contenue dans ce vase ACDF, est à ce qu'il en résulte de
 pression perpendiculaire au fond horizontal AMFN de ce
 vase prismatique incliné :: $T \times T \cdot \sqrt{DFK} \times \sqrt{DFK} : T \times T \cdot$
 $\sqrt{DFA} \times \sqrt{DFA}$. c'est-à-dire, comme le quarré du sinus
 total

total T est ici au quarré du sinus de l'angle DFK d'inclinaison de ce vase à l'horison.

VII. Si ce vase prismatique ACDF est droit ou perpendiculaire à son fond horisontal AMFN, comme dans la Fig. 298. Ce cas rendant droit son angle DFA d'inclinaison sur ce fond horisontal AMFN, on aura ici $\int DFA = T$. Donc (art. 6.) le poids absolu de tout le prisme droit AGHF de Liqueur contenue dans ce vase ACDF, est à ce qu'il en résulte de pression perpendiculaire au fond horisontal AMFN de ce vase prismatique droit :: $T \times T$. $T \times T$. c'est-à-dire, que ce poids absolu est ici égal à ce qu'il cause de pression perpendiculaire au fond horisontal AMFN de ce vase prismatique droit ou perpendiculaire à l'horison.

VIII. Si le vase prismatique ACDF est incliné de quelque maniere que ce soit à l'horison, & qu'il ait son fond AMFN perpendiculaire à sa longueur CA ou DF, comme dans la Fig. 299. ce cas rendant encore ici droit l'angle DFA, l'on y aura encore $\int DFA = T$. Donc (art. 5.) le poids absolu de toute la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vase prismatique incliné ACDF, perpendiculaire à son fond AMFN, est ce que tout ce poids cause de pression perpendiculaire à ce fond :: $T \times T$. $T \times \int FDX :: T. \int FDX$ (soit CV perpendiculaire en V sur FD) :: $\int DVC. \int VDC :: DC. CV :: DC. AF$ (Corol. du Lem. 19.) :: CEDB. AMFN :: GH. AMFN. c'est-à-dire, comme la surface supérieure GH de la Liqueur est à l'inférieure ou au fond AMFN.

IX. Si le vase prismatique ACDF est vertical, & qu'il ait son fond AMFN arbitrairement incliné à l'horison, comme dans la Fig. 300. ce cas rendant droit l'angle FDX, l'on aura ici $\int FDX = T$. Donc (art. 5.) le poids total & absolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vase jusqu'au niveau GH, est à la pression ou force dont ce poids total presse perpendiculairement le fond incliné AMFN de ce vase vertical ACDF :: $T \times T$. $T \times \int DFA :: T. \int DFA$ (à cause des paralleles CA, DA)

:: T. $\int CAF$ (soit FP perpendiculaire en P sur CA)
 :: $\int APF. \int PAF :: AF. PF :: AF. CD$ (*Corol. du Lem. 19.*)
 :: $AMFN. CEDB :: AMFN. GH$. c'est-à-dire, comme le
 fond ou la surface inferieure $AMFN$ de la Liqueur est à
 sa surface superieure GH .

X. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le
 précédent art. 9. si le fond $AMFN$ du vase prismatique
 vertical $ACDE$ est incliné de 60 degrez à l'horison, ou
 (ce qui revient au même) si l'angle DFK ou CAF d'in-
 clinaison de ce vase sur ce fond, est de 30 degrez, l'on
 aura ici $AF = 2 \times PF = 2 \times CD$; & consequemment (*Corol.*
du Lem. 19.) ce fond ou son aire $AMFN = 2 \times CEDB =$
 $2 \times GH$. Ainsi venant de trouver (art. 9.) que le poids
 total & absolu de la quantité $AGHF$ de Liqueur conte-
 nue dans ce vase prismatique vertical $ACDE$, est à ce
 qu'il en resulte de pression perpendiculaire sur son fond
 $AMFN$ d'inclinaison quelconque avec lui :: $AMFN. GH$.
 l'on aura ici ce poids absolu à cette pression perpendicu-
 laire :: $2 \times GH. GH :: 2. 1$. c'est-à-dire, que ce poids ab-
 solu sera ici double de cette pression perpendiculaire du
 fond $AMFN$.

Fig. 299.

XI. Toutes choses étant aussi les mêmes que dans l'art.
 8. si le vase prismatique $ACDE$ du fond $AMFN$ perpen-
 diculaire à sa longueur CA , DE , est incliné de 30 de-
 grez à l'horison; & qu'ainsi l'angle VDC soit de 30 de-
 grez, l'on aura ici $CD = 2 \times CV = 2 \times AF$; & consequem-
 ment (*Corol. du Lem. 19.*) l'aire $CEDB$ ou sa parallele
 $GH = 2 \times AMFN$. Or suivant l'art. 8. de quelqu'angle
 que le vase prismatique $ACDE$ de fond $AMFN$ perpen-
 diculaire à sa longueur CA , DE , soit incliné à l'horis-
 on; le poids absolu de la quantité $AGHF$ de Liqueur
 contenue dans ce vase, est à ce qu'il en resulte de pres-
 sion perpendiculaire à son fond $AMFN$:: $GH. AMFN$.
 Donc en ce cas-ci de ce vase prismatique $ACDE$ incliné
 de 30 degrez sur l'horison, le poids absolu de tout ce
 qu'il contient de Liqueur jusqu'au niveau quelconque
 GH , est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire.

au fond AMFN de ce vase :: $2 \times \text{AMFN}$. AMFN :: 2. 1.
 c'est-à-dire, comme dans le précédent art. 10. que ce poids absolu sera encore ici comme là double de cette pression perpendiculaire du fonds AMFN.

REMARQUE.

Ce qu'on voit dans le précédent Th. 41. dans ses Corollaires, & dans son Scholie, seroit ce qui arriveroit si l'on ne considéroit, comme l'on a fait jusqu'ici, que l'action seule de la pesanteur, & les colonnes de Liqueurs comprises dans les tuyaux ou vases prismatiques, que comme des corps solides soutenus sur des plans inclinez par les fonds de ces vases ou tuyaux, suivant les longueurs desquelles ces corps ne pressent ou chargent ces fonds ou bases que de ce que leurs pesanteurs leur donnent de forces suivant ces longueurs de ces mêmes tuyaux. Mais si l'on considère (*Schol. de l'Ax. 9.*) que la fluidité de ces colonnes de Liqueurs donne aux particules de chacune une égale facilité à être également pressée en tous sens, de la force entière de la pesanteur ou du poids de ce qu'il y en a d'autres qui les chargent; on verra dans la suite que ces colonnes cylindriques ou prismatiques de Liqueurs soutenues sur les fonds de leurs tuyaux inclinez, ou non, y doivent toujours presser ou charger chacune chacun de ces fonds, comme feroit le poids entier de cette colonne totalement soutenu sur ce fond: en voici la preuve dans le suivant Th. 42. & dans les autres, où l'on considérera ainsi les Liqueurs comme pesantes & comme fluides tout à la fois, & dans des vases de figures quelconques.

THEOREME XLII.

Soit un tuyau cylindrique ou prismatique quelconque AKDX FIG. 302
 arbitrairement incliné suivant le plan vertical AKI sur son fond horizontal KBDC de figure quelconque, & rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra, dont on considère presentement la fluidité. So

dis que cette fluidité jointe à la pesanteur de ce que le tuyau incliné $AKDX$ contient de cette Liqueur, lui fera presser de tout son poids absolu le fond horizontal $KBDC$ de ce tuyau, c'est-à-dire, d'une force verticale précisément égale à celle dont ce fond seroit pressé par un prisme droit ou vertical $KYZD$ de la même Liqueur qui auroit ce fond pour base horizontale, & dont la hauteur seroit égale à celle KY du niveau GH de ce que le tuyau incliné $AKDX$ en contient au-dessus de ce fond horizontal $KBDC$.

DEMONSTRATION.

Soit AKI l'angle quelconque d'inclinaison du tuyau proposé $AKDX$ sur ce fond horizontal $KBDC$; & le parallélogramme de même nom $AKDX$, la section de ce tuyau coupé par le plan vertical AKI prolongé, lequel en rencontre la base ou le fond en la droite KD . Imaginons presentement la Liqueur contenue dans ce tuyau incliné $AKDX$, comme divisée en un nombre presque infini de filets verticaux OM , RT , séparément mobiles, ainsi que la fluidité le permet; desquels les premiers OM soient empêchez en autant de points M par le côté inférieur AK de ce tuyau, de descendre suivant leurs directions; & dont les autres RT soient aussi empêchez en autant de points T par le côté supérieur opposé XD de ce tuyau, de monter jusqu'en S au niveau GH de la Liqueur qu'il contient. De deux points opposez M , T , pris sur une même horizontale MT , soient imaginées MN , TV , perpendiculaires à ces côtes opposez paralleles AK , XD , du tuyau incliné $AKDX$; lesquelles de longueurs arbitraires, soient les diagonales de deux parallélogrammes rectangles EF , PQ , de côtes verticaux ME , TQ , pris sur les filets MO , TR , & d'horizontaux MF , TP , pris sur l'horizontale MT .

Cela posé, il est manifeste que les résistances que les côtes opposez AK , XD , du tuyau incliné $AKDX$ font en M , T , à la descente verticale de OM filet de Liqueur, & à l'ascension verticale de l'autre filet RT que les plus longs que lui tendent à faire monter en S jusqu'à leur niveau

GH prolongé vers Z : que ces résistances que ces côtes opposées AK, XD, font aux filets OM, RT, sont suivant MN, TV, égales à des forces qui les suppléeroient en repoussant seulement comme eux suivant ces directions les points M, T, de ces filets OM, RT, de Liqueur ; & qu'ainsi chacune de ces résistances se décompose comme en deux forces purement passives, suivant MF, ME, & TP, TQ, dont chacune des horizontales suivant MF, TP, soutient par son invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire à cette résistance horizontale. Quant aux autres forces suivant les verticales ME, TQ, résultantes de ces résistances suivant MN, TV, des côtes opposées AK, DX, de ce tuyau incliné AKDX ;

1°. Il est pareillement visible que la première suivant ME directement opposée au poids du filet OM, le soutient en M dans le repos que lui exige le supposé de ce qu'il y a de Liqueur dans le tuyau incliné AKDX, sans lui laisser aucune action sur le fond KBDC de ce tuyau, lequel conséquemment n'en est aucunement chargé. La même chose se démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux OM de ce qu'il y a de Liqueur dans l'espace GKY sur le côté inférieur AK du tuyau incliné AKDX, dont il exprime tout ce qu'il a de surface concave de ce côté là autour du cylindre droit KYZD. Donc cette quantité GKY de Liqueur comprise entre ce cylindre droit & cette portion de surface inférieure du tuyau incliné AKDX, se trouvant ainsi soutenue toute entière sur cette même portion oblique AK de surface ; rien de cette quantité GKY de Liqueur n'agit ou ne pèse sur le fond KBDC de ce tuyau incliné AKDX.

2°. Mais en recompense ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'espace HLD compris entre le plan HL perpendiculaire à la droite KD, & ce que ce plan retranche du côté de HD de la surface supérieure de ce tuyau incliné AKDX, presse ce fond horizontal KBDC d'une force égale à celle dont il seroit pressé par la portion cylindrique HLDZ, que ce même plan HL retranche du cylin-

dre droit KYZD de la même Liqueur ; car la force suivant TQ , résultante de la résistance que le côté supérieur XD du tuyau incliné AKDX , fait suivant sa perpendiculaire TV , à l'ascension du filet vertical RT de Liqueur , se trouvant directement opposée à l'effort dont le poids du surplus de longueur des plus longs tend à le faire monter jusqu'au point S de leur niveau GH , & empêchant cet effet , est égale à cet effort suivant RT , auquel par la même raison le poids d'une portion ST de la même Liqueur seroit aussi égal. Donc la force de résistance avec laquelle le côté oblique XD du tuyau incliné AKDX , repousse le filet vertical TR suivant sa direction , est égale au poids d'une portion ST de cette Liqueur. Par conséquent le poids de ce filet TR , ainsi repoussé suivant TQ , fait le même effort en ce sens sur le fond vertical KBDC du tuyau incliné AKDX , qu'y feroit ce même poids du filet TR augmenté du poids de ST , c'est-à-dire , le même effort qu'y feroit le poids d'un filet vertical entier SR de la même Liqueur. La même chose se démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux TR de ce qu'il y a de Liqueur dans l'espace HLD , retenus ou empêchez de monter par le côté supérieur XD du tuyau incliné AKDX , dont il exprime tout ce qu'il y a de surface retranchée de ce côté-là par le plan vertical HL perpendiculaire à la droite KD. Donc cette portion HLD de Liqueur comprise entre ce plan vertical HL & cette portion de surface qu'il retranche de celle du tuyau incliné AKDX , charge ou presse verticalement le fond horizontal KBDC d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé en ce sens par le poids de la portion cylindrique HLDZ , que le plan HL retranche du cylindre droit KYDZ de la même Liqueur.

Donc ce fond horizontal KBDC étant outre cela pressé verticalement par tout le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'espace AYHL commun à ce cylindre droit KYZD , & au tuyau incliné AKDX , & ne l'étant aucunement (*nomb. 1.*) par ce qu'il y en a dans l'espace GYK

compris de ce côté-là entre ce tuyau oblique & ce cylindre droit ; il suit de ce nomb. 2. que ce fond horifontal KBDC est verticalement pressé par tout ce que le tuyau incliné AKDZ contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, d'une force précisément égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical de même Liqueur, implanté sur ce fond horifontal KBDC, qui en fût la base, & de même hauteur que celle KY de ce niveau GH au-dessus de ce fond ; & conséquemment d'une force égale au poids du cylindre oblique KGHD de ce qu'il y a de Liqueur contenue dans le tuyau incliné AKDY ; puisque le cylindre vertical AYZD presseroit ce fond horifontal KBDC de tout son poids, qui est égal à celui de l'oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur que ce vertical AYZD, ces deux cylindres (*Hyp.*) de même base & de même hauteur, étant égaux entr'eux. *C'est tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Puisque suivant cela les cylindres KGHD de Liqueurs quelconques contenues dans des tuyaux AKDX d'inclinaisons quelconques AKI sur leurs bases ou fonds horifontaux quelconques ABDC, pressent chacun de tout son poids absolu le fond du sien ; il suit que les pressions ou forces avec lesquelles ces cylindres de Liqueurs quelconques presseront verticalement les fonds horifontaux de leurs tuyaux inclinez à volonté sur ces fonds, feront entr'elles comme les poids absolus de ces cylindres de Liqueurs, c'est-à-dire, de ce qu'en contiennent leurs tuyaux.

C O R O L L A I R E I I.

Donc lorsque ces tuyaux inclinez à volonté ont des bases ou fonds horifontaux égaux quelconques, & sont remplis tous d'une même Liqueur quelconque jusqu'à des hauteurs égales quelconques au-dessus de ces fonds ; les cylindres de ce qu'ils contiendront tous de cette mê-

me Liqueur, se trouvant tous alors de poids égaux, les pressions verticales qui en résulteront aux fonds horizontaux de leurs tuyaux, seront aussi pour lors toutes égales entr'elles, & chacune égale à chacun de ces poids égaux.

S C H O L I E.

I. Le présent Th. 42. peut être encore démontré autrement que ci-dessus, en imaginant un tuyau vertical λGZD de fond horizontal λD , & rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'au niveau GZ . Dans ce tuyau vertical imaginons qu'il s'en forme un autre incliné $KGHD$ de base ou fond $KBDC$ (que j'appellerai simplement KD , pour l'uniformité des expressions) portion de l'horizontale λD , lequel sans aucun mouvement de la Liqueur du premier en intercepte une quantité qui le remplisse jusqu'au même niveau GH , & qui ne laisse de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions KGL , HDZ expriment entre ces deux tuyaux λGZD , $KGHD$, desquelles les portions de surface de l'incliné $KGHD$ exprimées par ses côtes obliques GK , HD , rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur. Cela imaginé ou supposé,

1°. Il est visible que le côté solide & ferme GK du tuyau incliné $KGHD$ traversant en M le filet vertical Om de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λGZD , en soutient dans l'oblique $KGHD$ la partie OM comme son autre partie Mm la soutenoit dans le vertical λGZD , sans lui laisser ici non plus que là aucune action contre le fond KD ; & ainsi de tous les autres filets OM de Liqueur, appuyez de même en autant de points M sur la portion de surface du tuyau incliné $KGMD$ exprimée par son côté inférieur GK . Par conséquent ce qu'il y a de cette Liqueur ainsi soutenue sur GK dans la portion GKY de l'espace cylindrique vertical λGYK , comme elle l'étoit avant la supposition du tuyau incliné $KGHD$, dans le vertical λGZD sur ce qu'il y a de la même Liqueur dans le reste $KG\lambda$ de ce cylindre λGYK , ne pressera non plus
ce

ce fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que ce cylindre de Liqueur λ GYK le pressoit libre dans le tuyau vertical λ GZD, dont il ne pressoit le fond λ D qu'en λ K.

2°. Un pareil raisonnement fera voir que le côté solide & ferme HD du tuyau incliné KGHD, traversant en T le filet vertical SR de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λ GZD, en retient la partie TR en même sujétion & en même action ou pression contre le fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que celle que sa partie retranchée ST par le côté HD de ce tuyau incliné, lui causoit contre le fond λ D dans le tuyau vertical λ GZD avant l'intervention de ce côté HD de l'incliné; puisque cette intervention survenue ici par une formation subite de ce tuyau incliné KGHD, comme s'il n'étoit fait que d'une surface cylindrique de la Liqueur glacée là, & fluide dans tout le reste, s'est ici faite sans aucun mouvement, & qu'il faudroit qu'il y en eût eu quelqu'un pour que la pression que le filet SR libre avant cette intervention dans le tuyau vertical λ GZD, causoit en R à son fond λ D, eût varié par cette intervention dans le tuyau incliné KGHD, dont le fond KD, où se trouve ce point R, n'est (*Hyp.*) qu'une portion de celui-là. Donc cette partie TR du filet vertical SR de Liqueur, ainsi retenue par le côté HD du tuyau incliné KGHD en même action ou pression contre le fond KD, qui l'y retenoit libre dans le tuyau vertical λ GZD le poids de sa partie retranchée ST alors joint à celui de cette autre TR, pressera ce fond KD en R d'une force verticale égale à celle dont y étoit pressé le fond λ D par le poids entier du filet total SR, lorsque ce filet étoit libre dans le tuyau vertical λ GZD; & ainsi de tous les autres filets verticaux TR de la même Liqueur, retenus de même en pression contre le fond KD par la portion de surface du tuyau incliné KGHD, exprimée par son côté supérieur HD. Par conséquent ce qu'il y a de cette Liqueur dans la portion DHL de l'espace cylindrique vertical LHZD, qu'on voit ainsi être autant pressée par HD contre le fond KD, qu'elle l'étoit

contre cette partie du fond KL avant la supposition du tuyau incliné KGHD dans le vertical λ GZD, par le reste HDZ de ce cylindre LHZD de la même Liqueur, pressera ce fond KD du tuyau incliné KGHD d'une force égale à celle dont cette portion KD du fond horizontal λ D du tuyau vertical λ GZD, étoit pressée par la portion cylindrique LHZD de ce que ce tuyau vertical contenoit de cette Liqueur.

II. Supprimons présentement ce tuyau vertical λ GDZ, en sorte qu'il ne reste plus ici que l'incliné KGHD ou AKDX rempli de la même Liqueur quelconque jusqu'au niveau GH. Le nomb. 1. faisant voir que le fond horizontal KD de ce tuyau incliné n'est aucunement pressé par ce qu'il contient de cette Liqueur dans l'espace GKY; & le nomb. 2. faisant voir au contraire que ce fond KD est précisément autant pressé par ce qu'il y a de cette Liqueur dans la partie LHD de ce tuyau AKDX, qu'il le seroit par le poids entier d'un cylindre vertical LHZD de la même Liqueur : si à cette pression verticale l'on ajoute celle que cause sur ce fond KD le poids qu'il y a de cette Liqueur dans le reste LHYK du cylindre vertical KYZD; on verra encore ici que ce qu'il y en a dans le tuyau incliné AKDX jusqu'au niveau quelconque GH, en presse le fond horizontal KD d'une force verticale précisément égale à celle dont il seroit pressé en ce sens par le poids entier d'un cylindre vertical KYZD de la même Liqueur, qui auroit ce fond KD pour base horizontale, & pour hauteur celle KY du niveau GH de cette Liqueur dans ce tuyau incliné AKDX : de sorte que le cylindre oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur, de même base, de même hauteur, & conséquemment de même poids que ce vertical KYZD presse aussi de tout son poids le même fond horizontal KD du tuyau incliné AKDX dans lequel il se trouve. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

THEOREME XLIII.

Soit un vase $ABCDEF$ plus large en haut où il soit ouvert, qu'en bas où il soit rétréci en $BCDE$, & terminé par un fond horizontal moindre à volonté que son ouverture AF . Soit ce vase rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'au niveau ou plan horizontal GH . Je dis que de toute la Liqueur dont on suppose le vase rempli jusqu'à ce niveau GH , la colonne verticale $CTZD$, qui aura le fond horizontal CD pour base, sera la seule qui pese ou fasse effort sur ce fond, & qu'elle le pressera de tout son poids.

DEMONSTRATION.

Imaginons encore ici la Liqueur du vase $ABCDEF$ comme divisée en plusieurs filets verticaux RK , YC , CD , &c. à niveau en GH , dont ces égaux-ci YC , CD , aillent jusqu'au fond CD du vase, avec ceux qui sont entr'eux, & dont les autres RK , plus courts que ceux-là, rencontrent les côtes obliques BC , DE , &c. de ce vase. Au point K , où chacun de ces filets RK rencontrent un de ces côtes obliques, par exemple, BC , soit BL perpendiculaire à ce côté BC ; laquelle de longueur quelconque soit la diagonale d'un parallélogramme rectangle MN , dont un côté KN soit sur le filet vertical RK , & l'autre KM horizontal.

FIG. 302.

Cela conçu, il est visible (comme dans la démonstr. du Th. 42.) que la résistance que le côté BC fait en K à la descente de ce filet RK de Liqueur, en suivant KL , est égale à une force qui la suppléeroit en repoussant comme lui suivant KL le bout K de ce filet; & qu'ainsi cette résistance que le côté BC lui fait suivant KL , se décompose comme en deux forces purement passives suivant KM , KN , dont la première suivant KM soutient par son invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire suivant MK , résultante de ce que la fluidité permet (art. 3. du Schol. de l'Ax. 9.) aux filets collatéraux d'en

FIG. 303.

K k ij

avoir en tous sens ; & dont la seconde suivant KN de bas en haut , soutient (comme dans le nomb. 2. du Th. 42.) l'effort directement contraire de haut en bas , dont la pesanteur du filet vertical RK tend à le faire descendre suivant cette direction : de sorte que cet effort de pesanteur , qui est tout ce que ce filet RK en a pour descendre , étant ainsi soutenu , ce filet doit être ici retenu en K sur BC , comme sur un plan incliné , ainsi qu'y demeurerait un poids égal au sien , repoussé comme lui suivant MK .

Cela se démontrera de même de tous les autres filets verticaux RK rencontrez en K par les côtez obliques du vase. Donc de toute la Liqueur contenue jusqu'au niveau GH dans ce vase $ABCDEF$ retreci par en bas , il n'y a que le seul cylindre vertical $YCDZ$ implanté sur le fond horizontal CD , qui le presse ; & comme il est vertical sans être appuyé sur ou contre aucun des côtez du vase , c'est de tout son poids qu'il presse ce fond CD . *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

A l'imitation du Scholie du Th. 42. imaginons pour un moment que la colonne cylindrique verticale $YCDZ$ de Liqueur , qui a pour base le fond horizontal CD du vase $ABCDEF$ plus étroit là qu'ailleurs , est dans un tuyau cylindrique de cette base horizontale CD , entouré de tout ce qu'il y a de Liqueur autour de ce cylindre vertical $YCDZ$ dans ce vase qu'on en suppose rempli jusqu'au niveau GH . Il est manifeste que les côtez fermes & solides YC , ZD , de ce tuyau vertical $YCDZ$ soutiendront entr'eux & les côtez du vase $ABCDEF$ tout ce qu'il aura de Liqueur autour de ce même tuyau vertical , & qu'ils empêcheront cette Liqueur extérieure par rapport à lui , d'entrer dans la colonne $YCDZ$ de ce qu'il en contient , en résistant suivant leurs perpendiculaires , c'est-à-dire , horizontalement à tout ce que cette Liqueur extérieure pourroit faire d'effort pour cela , & pour presser en

consequence le fond horifontal CD du vase ABCDEF, lequel dans la presente hypothese est le fond du tuyau YCDZ supposé dans ce vase.

Or si l'on imagine toute la Liqueur dont ce vase & ce tuyau sont remplis jusqu'au niveau GH, comme divisées en plusieurs couches horifontales, telles que KT; on verra, en concevant ce tuyau YCDZ n'y être plus, les particules M de la Liqueur de chacune de ces couches horifontales KT, appuyées contre les côtez du vase ABCDEF par la médiation de tout ce qu'il y en a dans cette couche jusqu'à ces côtez de ce vase, se faire mutuellement des resistances égales suivant le plan de cette couche; & conséquemment on verra ce que le cylindre YCDZ a de ces particules dans cette même couche, empêcher ce qu'elle en a au dehors de lui, d'entrer dans ce cylindre en les repoussant du centre à la circonference, comme faisoient les côtez solides du tuyau retranché: outre que quand il y en entreroit quelqu'une, ce ne feroit qu'à la place d'une autre qui en sortiroit; ce qui revient au même.

La même chose, & pour la même raison, devant arriver depuis le fond CD jusqu'au niveau GH à toutes les autres couches horifontales de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF jusqu'à ce niveau GH; on voit que la colonne cylindrique verticale YCDZ de cette Liqueur y retient appuyé sur ou contre les côtez de ce vase, ce qu'il contient de cette Liqueur autour de cette colonne verticale, comme l'y retenant les côtez fermes & solides du tuyau retranché, dans lequel cette colonne a été supposée d'abord. Donc de tout ce qu'il y a de Liqueur jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF, cette colonne verticale cylindrique YCDZ implantée sur le fond horifontal CD de ce vase plus étroit là qu'ailleurs non seulement est ici comme dans ce tuyau de même nom YCDZ, tout ce qui presse ce fond CD, mais encore le presse ici comme là de tout son poids absolu. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Fig. 304.

Pour la vérité de ce Th. 43. il n'est pas nécessaire que le vase ABCDEF soit plus étroit en son fond horizontal CD que par tout ailleurs, ni que les filets verticaux du cylindre vertical CYZD supposé de Liqueur la même quelconque, & de même hauteur que celle dont on suppose ce vase rempli jusqu'au niveau GH, ne rencontrent aucun des côtez de ce vase: il suffit que ce vase aille en s'élargissant depuis son fond horizontal CD jusqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle que soit son ouverture supérieure AF. Car,

1°. Si quelques-uns, ou tous les filets verticaux de la Liqueur dont on suppose ce cylindre vertical CYZD, rencontrent quelque côté EF du vase comme les filets verticaux CG, RK, DL, font en G, K, L; on démontrera, comme dans le nomb. 2. de la démonstr. du Th. 42. que chacun de ces filets verticaux, par exemple, RK, qui rencontre en K ce côté EF, qui l'empêche de monter jusqu'en S au niveau GH prolongé vers Z, est repoussé vers R suivant KR par la résistance de ce côté EF, d'une force, qui jointe au poids de ce filet KR, presse précisément autant le fond CD du vase, que le presseroit un filet libre SR de la même Liqueur. La même chose se démontrera de tous les autres filets verticaux KR de la Liqueur du vase ABCDEF, compris entre les extrêmes GC, LD, sur le fond horizontal CD de ce vase: sçavoir, que son côté EF, que ses extrêmes rencontrent aussi en G, L, comme tous ces filets KR en K, les empêchant tous de s'élever jusqu'en YZ au niveau GH de la Liqueur que ce vase contient, les repousse tous verticalement vers ce fond horizontal CD avec des forces qui jointes à leurs pesanteurs, les fait presser tous ensemble ce fond aussi fortement que le presseroit un cylindre vertical CYZD de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horizontal CD pour base, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que ce vase ABCDEF contient de cette Liqueur.

2^o. Quant aux autres filets de la même Liqueur, qui autour de la partie CGLD de ce cylindre CYZD, rencontrent en GH, LE, le même côté EF qui les empêche aussi de s'élever jusqu'à ce niveau GH; ce côté EF du vase ABCDEF les repousse de même tous verticalement en bas contre les côtes BC, DE, qui les soutiennent comme dans les démonstrations du présent Th. 43. sans leur laisser aucune action contre le fond horizontal CD, contre lequel, par la même raison la partie GM du côté BC n'en laisse de même à ce que le vase a de Liqueur de plus dans l'espace GHM terminé par la surface verticale HM.

Donc le fond horizontal CD, où ce vase ABCDEF est plus étroit que jusqu'à telle hauteur qu'on voudra au-dessus de ce fond, n'est ici pressé que par la colonne cylindrique verticale CGLD de la Liqueur contenue dans ce vase jusqu'au niveau GH; & que cette colonne verticale presse ce fond horizontal CD d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical CYZD de pareille Liqueur, lequel eût ce fond horizontal CM pour base, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que le vase supposé ABCDEF contient de cette Liqueur: le tout conformément au présent Th. 43.

C O R O L L A I R E II.

Suivant ce Corol. 1. & le présent Th. 43. le fond horizontal CD d'un vase quelconque ABCDEF rétréci en ce fond, n'étant pressé par tout ce que ce vase contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, que comme il le seroit par un cylindre vertical CYZD de cette Liqueur, lequel le presseroit de tout son poids absolu, & (Th. 42. Corol. 2.) de même force verticale que celle dont le presseroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur dans un tuyau incliné CY à volonté, lequel auroit ce fond horizontal pour le sien; il suit de là que ce que le vase ABCDEF rétréci en ce fond horizontal CD, contient de Liqueur jusqu'au niveau GH,

Fig. 302.
303. 304.

ne presse ce fond CD que de la force dont ce même fond seroit pressé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur CY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horizontal CD pour le sien. D'où l'on voit que les pressions verticales ou perpendiculaires de ce fond horizontal CD par une même Liqueur quelconque à différentes hauteurs dans un vase quelconque rétréci en ce fond, sont toujours entre-elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond : & conséquemment en raison de ces seules hauteurs.

T H E O R E M E X L I V.

FIG. 305.
306. 307.

Renversons le vase ABCDEF du précédent Th. 43. en sorte qu'il devienne plus large en bas, où il soit fermé par un fond horizontal AF, qu'en haut, où il soit rétréci en BCDE, & terminé par une ouverture CD moindre à volonté que la base ou fond AF. Soit ce vase rempli d'une Liqueur aussi quelconque jusqu'au niveau ou plan horizontal GH qui passe par son rétrécissement. Je dis présentement que la force dont ce fond AF sera pressé par le poids de la Liqueur dont on le suppose chargé jusqu'en GH, sera égale à celle dont il seroit pressé par le poids de tout ce qu'un vase cylindrique vertical ATZF de même base ou fond horizontal AF pourroit contenir de cette Liqueur jusqu'à ce niveau GH ou YZ.

D E M O N S T R A T I O N.

Soit la Liqueur du vase ABCDEF conçue comme divisée en plusieurs filets verticaux KR, PQ, dont ceux-ci PQ atteignent jusqu'au niveau GH de cette Liqueur, & dont les autres KR soient empêchez d'y arriver par les côtes obliques BC, DE, &c. du vase. Au point K où chaque filet KR rencontre un de ces côtes obliques, par exemple, BC, soit KL perpendiculaire à ce côté BC; laquelle KL de longueur à volonté, soit la diagonale d'un parallélogramme rectangle MN dont le côté KN soit sur le filet vertical KR, & l'autre KM horizontal.

Cela

Cela conçu, il est visible (comme dans la démonstrat. du Th. 42.) que la résistance que le côté BC fait en K à l'ascension de ce filet RK, que ceux PQ du niveau GH tendent (*Ax. 9. Corol. 2. 3.*) à faire monter jusqu'au point S de ce niveau, est suivant KL, & égale à une force qui la suppléeroit, en repoussant comme ce côté BC suivant KL, le bout K de ce filet; & qu'ainsi cette résistance suivant KL se décompose comme en deux forces purement passives suivant KM, KN, dont la première suivant KM soutient par son invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire suivant MK, & dont la seconde suivant KN de haut en bas, soutient (comme dans le nomb. 2. de la démonstr. du Th. 42.) l'effort directement contraire de bas en haut suivant RK, dont le poids du surplus des filets PQ au-dessus de KR, tend à faire monter celui-ci jusqu'au point S de leur niveau GH; auquel effort suivant RK cette force de résistance du côté BC suivant KN, est conséquemment égale. Mais le poids d'une portion SK de la même Liqueur seroit aussi égal à cet effort directement contraire suivant RK. Donc la force de résistance que le côté oblique BC du vase supposé, fait suivant KN ou KR à l'ascension de ce filet RK, en le repoussant suivant RK, est égal au poids d'une portion SK de cette Liqueur. Par conséquent le poids de ce filet KR, ainsi repoussé par cette résistance verticale suivant KN, fait le même effort en ce sens sur le fond AF du vase ABCDEF, qu'y feroit ce même poids du filet KR augmenté du poids de SK, c'est-à-dire, le même effort qu'y feroit un filet vertical entier SR de la même Liqueur.

Ce qu'on voit du filet vertical KR de Liqueur, retenu au-dessous de la surface ou du niveau GH de cette Liqueur par le côté oblique BC du vase ABCDEF, se démontrera de même de tous les autres filets verticaux KR ainsi retenus au-dessous de ce niveau GH par le même côté BC, & par ce que ce vase en peut avoir d'autres obliques DE, &c. Donc ces filets verticaux KR trop

courts pour atteindre au niveau GH de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF, en presseront autant le fond AF, que s'ils atteignoient tous à ce Niveau. Par conséquent tous les autres filets PQ y atteignant, le total de tous ces filets de Liqueur, c'est-à-dire, tout ce que ce vase ABCDEF contient de cette Liqueur jusqu'au niveau GH & au dessous en pressera le fond AF d'une force égale à celle dont il seroit pressé par tout ce qu'un vase cylindrique vertical AYZF de même base ou fond horizontal AF, pourroit contenir de cette Liqueur jusqu'à ce niveau GH ou YZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Encore à l'imitation du Schol. du Th. 42. comme dans la démonstration du Th. 41. supposons pour un moment que le vase cylindrique vertical AYZF de base ou fond horizontal AF, soit rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'au niveau YZ. Concevons que dans ce vase cylindrique sur son fond AF, il s'en forme un autre ABCDEF plus large en bas qu'en haut, lequel sans aucun mouvement de la Liqueur en intercepte une quantité qui le remplisse jusqu'au même niveau YZ, qui rencontre son rétrécissement en GH, & qui ne laisse de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions CBY, DEZ, en expriment entre ces deux vases, desquelles les portions de surface du rétréci, exprimées par ses côtes obliques CB, DE, rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur.

Il est visible que le côté BC traversant en K le filet vertical SR de cette Liqueur, en retient dans ce vase rétréci ABCDEF la partie KR dans la même sujettion & dans la même action contre son fond AF que celle que la partie retranchée SK lui causoit contre ce fond dans le cylindre AYZF avant l'intervention de ce côté BC, puisqu'il retient dans le vase rétréci ABCDEF cette partie KR du filet SR aussi serrée contre ce fond AF que la retenoit

alors le poids de l'autre partie SK de ce filet SR, n'y ayant en ceci aucun mouvement, & y en fallant quelque'un de cette partie KR vers S, pour diminuer la pression qu'elle caufoit en R à ce fond AF, lorsqu'elle étoit chargée de SK libre dans le cylindre AYZF avant l'introduction ou la formation de ce rétréci ABCDEF. Donc cette partie KR du filet vertical SR, renfermée dans ce vase rétréci, en pressera le fond AF d'une force égale à celle dont il étoit pressé par le poids de ce filet entier SK, lorsque ce filet étoit libre dans le vase cylindrique AYZF.

Ce qu'on voit ici du filet vertical KR que le côté oblique BC du vase rétréci ABCDEF y retient au-dessous du niveau YZ ou GH des plus hauts PQ, qui tendent à l'y élever, se démontrera de même de tous les autres filets verticaux de la même Liqueur, que ce bord BC, & les autres obliques DE, &c. de ce vase rétréci par haut, empêchent d'être élevez jusqu'à ce niveau GH par ceux PQ, qui y atteignent: on démontrera, dis-je, de même que tous ces filets KR retenus plus bas que ce niveau YZ ou GH dans ce vase rétréci ABCDEF par les côtes obliques BC, DE, &c. en pressent tous le fond AF de même force que s'ils étoient tous à ce niveau YZ, augmentées de parties SK, que l'intervention de ces côtes obliques a retranchées des filets totaux SR, c'est-à-dire, de même force que celle dont ces filets SK libres dans le vase cylindrique AYZF avant cette intervention, en pressoient le même fond AF. Donc ce que le vase ABCDEF plus large en bas qu'en haut, contient de cette Liqueur quelconque jusqu'au niveau GH, en presse le fond AF d'une force égale a celle dont il seroit pressé par le poids de tout ce qu'un vase cylindrique vertical AYZF de même fond horizontal AF, contiendrait de la même Liqueur jusqu'au même niveau YZ. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Pour la verité de ce Th. 44. il n'est pas necessaire que
Lij

FIG. 306.

vase ABCDEF soit plus large en son fond horizontal AMFN que par tout ailleurs : il suffit que ce vase aille en se rétrécissant depuis ce fond jusqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle qu'en soit l'ouverture supérieure CD.

Pour le voir, soit ce vase ABCDEF tel, par exemple, qu'on le voit ici, mais toujours de base ou fond horizontal AMFN, rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra. Sur son fond horizontal AMFN imaginons un cylindre vertical AYZF de la hauteur AY de la Liqueur dans ce vase ; & ce cylindre coupé par un plan vertical de même nom AYZF, lequel en rencontre la base horizontale AMFN en la section AF, & auquel soit perpendiculaire un autre plan vertical, qui passant par E, le coupe en KL, que je prendrai pour ce second plan, qui coupe aussi en MN le fond AMFN du vase ABCDEF. Cela posé,

1°. L'on verra, comme dans le nomb. 1. du Scholie du Th. 42. & comme dans les démonstrations 1. 2. du Th. 43. que tout ce que ce vase ABCDEF contient de Liqueur entre lui & le cylindre vertical AYZF dans l'espace GBAY sur ce que ses côtes obliques AB, BC, expriment de sa surface vers eux, est soutenu sur cette portion oblique de surface ABC sans aucune action sur ou contre le fond AMFN de ce vase ABCDEF. On verra de même que tout ce que ce vase contient de la même Liqueur dans l'espace opposé HEK sur ce que son côté oblique DE exprime de la surface opposée, qui avec la portion KE du plan vertical KL, renferme cet espace HEK, est pareillement soutenu sur cette portion DE de surface oblique de ce vase ABCDEF, sans aucune action non plus sur ou contre son fond horizontal AMFN.

2°. L'on verra aussi, comme dans le nomb. 2. du Scholie du Th. 42. & comme dans les démonstrations 1. 2. du présent Th. 44. que ce que ce vase ABCDEF contient de la même Liqueur dans l'espace FEL entre l'autre portion EL du plan vertical KL, & de ce que le côté oblique EF de ce vase exprime de sa surface jusqu'à cette partie

EL de ce plan vertical KL sur la portion MFN qu'il re-tranche de la base ou fond horizontal AMFN, charge ou presse ce fond de ce vase ABCDEF, d'une force verticale égale à celle dont ce même fond AMFN, seroit pressé en MFN par le poids entier d'un cylindre vertical LKZF de même Liqueur à même hauteur AY que celle du vase proposé, ayant pour base horizontale cette portion MFN du fonds AMFN de ce vase ABCDEF.

Donc ce fond horizontal étant outre cela pressé en MAN par le poids entier de l'autre portion cylindrique AY KL d'un cylindre vertical AYZF de même Liqueur que celle du vase ABCDEF de la hauteur AY qu'elle a dans ce vase, laquelle portion cylindrique AYKL de ce cylindre AYZF de Liqueur a pour base horizontale cette partie MAN du fond AMFN de ce vase ABCDEF; & ce fond horizontal AMFN n'étant (*nomb. 1.*) aucunement pressé parce que ce vase contient de Liqueur dans les espaces GBAY, HEK; il suit du *nomb. 2.* qu'il n'y a que ce que le vase ABCDEF contient de cette Liqueur dans l'espace KEFA Y, qui en presse le fond AMFN, & que ce fond horizontal en est pressé verticalement par cette portion KEFA Y de Liqueur, d'une force égale à celle dont il seroit pressé par le poids entier d'un cylindre vertical AYZF de pareille Liqueur de même base horizontale AMFN, & de même hauteur AY que la contenue dans le vase ABCDEF. Par conséquent tout ce que ce vase contient de cette Liqueur quelconque jusqu'au niveau quelconque GH, presse encore ici verticalement son fond horizontal AMFN d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé par le poids d'un cylindre vertical AYZF à même hauteur AY que là dans un tuyau droit ou vertical qui auroit ce même fond horizontal AMFN pour le sien, conformément au présent Th. 44.

C O R O L L A I R E II.

Suivant ce Corol. 1. & le présent Th. 44. le fond horizontal AF (appellé AMFN dans ce Corol. 1. & que

Fig. 307.
306. 307.
308.

j'appelle dans celui AF, pour l'accommoder aux Figures 305. 306. 307. du présent Th. 44.) d'un vase quelconque ABCDEF élargi en ce fond, étant pressé par ce que ce vase contient de Liqueur quelconque jusqu'au niveau GH, comme il le seroit par un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel le presseroit de tout son poids absolu, & (Th. 42. Corol. 2.) de même force verticale dont le presseroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau incliné à volonté, lequel auroit ce fond horizontal AF pour le sien; il suit de là que ce que le vase ABCDEF élargi en ce fond horizontal AF, contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, presse ce fond AF de la force dont ce même fond seroit pressé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horizontal AF pour le sien. D'où l'on voit que les pressions verticales ou perpendiculaires de ce fond horizontal AF pour une même Liqueur quelconque à différentes hauteurs dans un vase quelconque élargi en ce fond, sont toujours entr'elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond; & conséquemment en raison de ces seules hauteurs.

COROLLAIRE III.

Ce Corol. 2. joint aux Corol. 2. des précédens Th. 42. 43. fait voir que si un vase de figure quelconque de largeurs par tout égales ou inégales à volonté, & d'un fond horizontal aussi quelconque, est rempli d'une même Liqueur quelconque à différentes hauteurs ou niveaux aussi quelconques; les différentes quantitez de même Liqueur dont ce vase sera successivement rempli jusqu'à ces différentes hauteurs, en presseront verticalement le fond horizontal avec des forces qui seront toujours entr'elles en raison de ces hauteurs.

Cela suit encore de ce que suivant les Th. 42. 43. 44.

ces pressions ou forces verticales seront toujours égales aux poids absolus de cylindres verticaux de la même Liqueur, qui auroient ces hauteurs pour les leurs, & toutes le fond du vase pour leurs bases horizontales.

C O R O L L A I R E I V.

Soient presentement deux vases V, U , differens à volonté, de fonds horizontaux quelconques b, β , & remplis de differentes Liqueurs quelconques L, Λ , jusqu'à des hauteurs quelconques h, k , au-dessus de ces fonds; desquelles Liqueurs L, Λ , les pesanteurs specifiqués soient f, ϕ , & leurs densitez e, ϵ . Si l'on appelle P, Π , les poids absolus de deux cylindres faits chacun de chacune de ces Liqueurs, desquelles les hauteurs soient celles h, k , de ces mêmes Liqueurs dans les vases V, U , & qui ayent pour bases les fonds horizontaux b, β , de ces vases: le présent Th. 44. joint aux précédens Th. 42. 43. faisant voir que les pressions ou forces dont les quantitez de ce que ces vases V, U , contiennent de ces Liqueurs L, Λ , pressent verticalement leurs fonds horizontaux b, β , sont toujours égales entr'elles aux poids absolus P, Π , de ces cylindres; si l'on appelle p, ϖ , ces pressions verticales des fonds b, β , l'on aura toujours ici $p = P, \varpi = \Pi$. Or suivant les noms précédens, ces cylindres de poids P, Π , ayant (*Hyp.*) h, k , pour leurs hauteurs; b, β , pour leurs bases; & étant (*Hyp.*) faits de Liqueurs L, Λ , de pesanteurs specifiqués f, ϕ , & de densitez e, ϵ , ont leurs poids absolus $P = b h e f, \Pi = \beta k e \phi$. Donc on aura toujours ici $p = b h e f, \varpi = \beta k e \phi$; & consequemment $p. \varpi :: b h e f. \beta k e \phi$, ou $p \beta k e \phi = \varpi b h e f$ (A). Donc,

1°. Si la Liqueur est la même quelconque dans les vases quelconques V, U , cette identité d'espece des Liqueurs L, Λ , rendant leurs pesanteurs specifiqués $f = \phi$, & leurs densitez $e = \epsilon$, changera la précédente formule A en $p \beta k = \varpi b h$ (B) pour ce cas-ci; ce qui y donne $p. \varpi :: b h. \beta k$. D'où l'on voit que les pressions verticales p, ϖ , des fonds horizontaux b, β , de ces vases V, U , causées

par les poids de même Liqueur quelconque contenus dans ces vases à hauteurs quelconques h, k , seront toujours ici entr'elles en raison des produits $bh, \beta k$, de ces fonds horisontaux quelconques par ces hauteurs aussi quelconques h, k , de ces vases V, U , de figures & de capacitez quelconques, contiennent de la même Liqueur aussi quelconque.

2°. Si cette même Liqueur se trouve à hauteurs égales h, k , dans ces vases V, U , au-dessus de leurs fonds horisontaux b, β , les précédentes équations A, B , donneront également $p\beta = \omega b$ (C) pour ce cas-ci : ce qui donnant $p. \omega :: b. \beta$. fait voir que les pressions verticales p, ω , des fonds horisontaux b, β , de ces vases V, U , seront toujours ici en raison de ces fonds quelconques.

3°. Si ces fonds horisontaux b, β , de figures quelconques sont égaux, à quelques hauteurs h, k , que leurs vases V, U , soient remplis d'une même Liqueur quelconque, les précédentes formules A, B , donnant aussi également ici $pk = \omega b$ (D), les pressions verticales p, ω , de ces fonds horisontaux égaux b, β , seront ici en raison des hauteurs h, k , au-dessus de ces fonds dans les vases quelconques V, U : ce qui donne le précédent Corol. 3. en supposant ces vases être le même successivement remplis de la même Liqueur jusqu'à ces hauteurs h, k .

4°. Enfin si les vases V, U , quelques differens qu'ils soient, ont leurs fonds horisontaux égaux b, β , & qu'ils soient remplis d'une même Liqueur quelconque jusqu'à hauteurs égales h, k , au-dessus de ces fonds les équations précédentes A, B, C, D , donneront également ici toutes $p = \omega$; ce qui fait voir que les pressions verticales p, ω , des fonds horisontaux égaux de ces vases V, U , differens à volonté dans tout le reste, seront toujours ici égales entr'elles.

SCHOLIE

Commun aux Théoremes XLIII. XLIV.

I. Les deux derniers Th. 43. 44. se trouvent conformes à l'expérience, en se servant d'un vase ABCDEF plus large dans la Fig. 309. & plus étroit dans la Fig. 310. en bas qu'en haut, duquel le fond AF puisse aisément monter & descendre le long de la partie cylindrique verticale VAFX de ce vase prolongé vers le bas, y demeurant cependant toujours si justement appliqué, qu'il ne laisse rien échapper de la Liqueur qu'on suppose dans ce vase ABCDEF. Car si l'on arrête fixement ce vase en l'air, suspendu à un crochet, ou attaché par le côté à quelque mur ou poteau ferme MN; de manière que son fond AF soit parallèle à l'horison, & qu'on attache ensuite un fil vertical KL au centre de gravité K de ce fond, & à l'extrémité L d'un (OL) des bras d'une balance LP appuyée en son milieu O, laquelle à l'extrémité P de son autre bras OP porte un bassin Q chargé de petit plomb ou de sable, jusqu'à ce qu'il demeure en équilibre avec le fond AF chargé de la Liqueur dont on remplit ensuite le vase ABCDEF jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra, où la surface de cette Liqueur parallèle à ce fond horizontal AF, soit moindre ou plus grande que lui: tout cela (dis-je) ainsi disposé, l'on verra cet équilibre n'arriver que lorsque le bassin Q & sa charge feront ensemble un poids égal à celui d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, de base AF, & de hauteur AY égale à la plus grande que la même Liqueur ait au-dessus de ce fond AF dans le vase ABCDEF. Hors ce cas on verra le fond AF de ce vase y monter vers BC, tant que le poids total fait de celui du bassin Q & de sa charge, sera plus grand que celui de ce cylindre AYZF de Liqueur, quoique moindre que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. On verra au contraire ce fond AF descendre vers VX, lorsque ce poids fait de ce-

lui du bassin Q & de sa charge, sera moindre que celui de ce même cylindre AYZF de Liqueur, quoique plus grand que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'autre vase ABCDEF de la Fig. 309.

C'est ce que M. Pascal a observé le premier, & ce qu'il a fait remarquer dans son Traité de l'Equilibre des Liqueurs; mais sans que lui, ni aucun autre que je sçache, en ait donné la raison qu'on en voit dans les démonstrations Th. 42. 43. dans le principe general de tout cet Ouvrage-ci.

II. Comme cette décomposition de forces vient de la résistance des côtez obliques CB, DE, dans la Figure 309. à l'ascension, & dans la Fig. 310. à la descente des filets verticaux de Liqueur qui les rencontrent, dont les uns dans la Fig. 309. sont sollicités à monter par le surplus des poids des plus longs, & dont les autres de la Fig. 310. tendent par leur propre poids aussi bas que les plus longs; & que suivant les démonstrations des Th. 42. 43. c'est de-là que vient dans la Fig. 309. la nullité de pression du fond AF du vase ABCDEF par les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur que contient ce vase plus étroit en bas qu'en haut, lesquels seuls en pressent ce fond; & dans la Fig. 310. l'égalité de pression du fond AF de l'autre vase ABCDEF par tous les filets verticaux, tant courts que longs de la Liqueur que contient cet autre vase plus large en bas qu'en haut. De-là (dis-je) vient que,

Fig. 309.

1°. Suivant la démonstration du Th. 42. les filets verticaux, tant courts que Longs de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en pressent tous également le fond AF, & aussi fortement tous ensemble que le presseroit un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horizontal AF pour base, & pour hauteur la plus grande AY de ce qu'en contient ce vase ABCDEF rétréci par en haut, quoique le poids de ce qu'il en contient soit moindre que celui de ce cylindre vertical AYZF

de la même Liqueur : cela, dis-je, venant de la résistance que les côtez obliques CB, DE, du vase ABCDEF rétréci par en haut, font à l'ascension des filets verticaux de la Liqueur que ce vase contient, moindres que les plus longs qui tendent à les faire monter jusqu'à leur niveau GH, tant que cette Liqueur est fluide ; & cette sollicitation à monter, & conséquemment aussi les résistances qu'y feroient ces côtez obliques CB, DE, cessant dès que cette Liqueur est toute glacée, & ne fait plus qu'une masse solide, dont les plus longs filets verticaux attachez alors comme d'une pièce avec les moindres, ne tendent plus à les faire monter, mais au contraire à les faire descendre, & à les entraîner en bas avec eux par leur pesanteur, quand même ces moindres filets n'en auroient d'eux-mêmes aucune : il suit manifestement qu'alors ce total de glace détaché du vase en le chauffant tout autour, ne doit plus presser son fond AF que d'une force égale au poids de ce que le vase en question contient de Liqueur ainsi glacée. C'est ce que M. Paschal a aussi observé par le moyen de la balance de l'art. 1. en s'en servant là comme ici.

2°. Suivant les démonstrations du Th. 43. les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, n'en pressent aucunement le fond AF, qui ne se trouve ainsi pressé que par ces plus longs filets égaux à AY, d'une force seulement égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horizontal AF pour base, & AY pour hauteur, quoique le poids de ce que le vase ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur, soit plus grand que celui du cylindre vertical AYZF : cela, dis-je, venant de la résistance que les côtez obliques AB, CD, du vase ABCDEF rétréci par en bas, font à la descente des moindres filets verticaux de Liqueur appuyez sur eux, sans en faire aux plus longs appuyez sur le fond AF, tant que la Liqueur composée de

FIG. 310

tous ces filets est fluide, & que ces filets peuvent agir par leur pesanteur indépendamment les uns des autres; dès que cette Liqueur sera toute glacée, les plus longs de ces filets attachez alors comme d'une piece avec les moindres soutenus sur les côtez obliques AB, CD, du vase ABCDEF rétréci par en bas, ces plus longs filets de Liqueur glacée se trouveront aussi pour lors soutenus par la médiation des moindres sur les côtez obliques AB, CD, de ce vase, sans s'appuyer sur son fond AF, qui alors seroit inutile pour les retenir avec les autres dans ce vase; de sorte que quand le total de ce qu'il contient de Liqueur ainsi glacée, en seroit détachée en la chauffant tout autour, ce total de glace ainsi appuë sur les côtez AB, CD, du rétrécissement de ce vase, ne peseroit plus du tout sur le bras OL de la balance OP, ni conséquemment contre son bassin Q.

Fig. 309.
310.

III. Au reste quoique, suivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en presse le fond horizontal AF d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé par le poids d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel eût ce fond horizontal AF pour base, & pour hauteur la plus grande AY qu'ait la même Liqueur dans ce vase ABCDEF de la Fig. 309. plus large en-bas qu'en haut; & que suivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue aussi jusqu'au niveau GH dans le vase de même nom de la Fig. 310. plus étroit au contraire en bas qu'en haut, n'en presse le fond horizontal AF que d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé par le poids d'un cylindre AYZF de la même Liqueur, lequel eût aussi ce fond horizontal AF pour base, & pour celle AY qu'a la même Liqueur au-dessus de ce fond AF dans ce vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut: quoique (dis-je) cela soit vrai de part & d'autre, suivant les Th. 42. 43. il ne faut pourtant pas s'imaginer que la Liqueur contenue jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF de

là Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, pesât autant à la main qui soutiendrait ce vase, qu'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que soutiendrait ou porteroit cette main dans un vase cylindrique de même base AF que celui-là; ni que la Liqueur contenue aussi jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, ne pesât à la main qui soutiendrait ou porteroit ce vase, qu'autant qu'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que cette main soutiendrait ou porteroit dans un vase cylindrique de même fond AF que celui-là. Car,

1°. Suivant la démonstration 1. du Th. 43. la Liqueur dont est rempli jusqu'au niveau GH le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, ne pèse pas seulement de tout son poids sur son fond AF, mais de plus elle y pèse d'un effort de résistance dont les côtes obliques CB, DE, de ce vase ou de son rétrécissement BCDE en repoussent vers ce fond AF les filets lateraux que les plus longs ou plus élevez qu'eux, tendent à y faire monter d'une force égale & directement contraire à cet effort, laquelle pousse autant en haut ce rétrécissement ou les côtes obliques de ce vase, que son fond AF est repoussé en bas par leurs résistances; ce qui, comme un ressort appuyé par un bout sur ce fond, & par l'autre contre ces côtes obliques CB, DE, du vase ABCDEF de la Fig. 309. ne tend qu'à écarter d'eux ce fond, & non à charger ce vase, qui ne se trouve ainsi l'être que du seul poids de la Liqueur qu'il contient. Donc le cylindre supposé de la même Liqueur, de hauteur égale à la plus grande qu'elle ait dans ce vase ABCDEF rétréci par en haut, pressant aussi de tout son poids le fond horizontal AF de son vase cylindrique vertical supposé de même base ou fond que celui-là, & y étant en plus grande quantité, & conséquemment d'un plus grand poids: ce n'est pas merveille, au contraire c'est une conséquence nécessaire qu'en soutenant ou en portant séparément

Fig. 309

ces deux vases avec ce qu'on y suppose de la même Liqueur ; la contenue dans le vase ABCDEF rétréci par en haut, pese à la main la valeur de son poids , & conséquemment moins que la soutenue par la même main dans le vase cylindrique vertical de même fond AF que celui-là , & à même hauteur que dans ce même-là , quoique ces deux portions de la même Liqueur pressent également (*Th.* 42.) les fonds égaux de ces deux vases dans la Fig. 309.

Fig. 310.

2°. Suivant les démonstrations du Théor. 43. la Liqueur dont est aussi rempli jusqu'au niveau GH le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, pressant vers le bas de tout son poids les fonds AF & les côtes obliques CB, DE, de ce vase ; & ne pressant (*Th.* 43) ce fond horizontal AF que d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur dans un vase cylindrique de même fond AF que celui-là : c'est aussi une conséquence nécessaire que ce que cet autre vase ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur , pese de tout son poids à la main qui la soutiendrait dans ce vase ; & conséquemment qu'elle y pese plus que n'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, soutenu par la même main dans un vase cylindrique de même fond horizontal AF que celui-là , quoique ces deux portions de la même Liqueur pressent également (*Th.* 43.) ce fond ou les fonds égaux de ces deux vases dans la Fig. 310.

R E M A R Q U E S

Sur les Théoremes XLII. XLIII. XLIV.

Fig. 311.
312. 313.

I. Dans les *Th.* 42. 43. dans leurs Corollaires, & dans le précédent Scholie qui leur est commun, l'on a supposé que les vases ABCDEF remplis de Liqueur quelconque jusqu'au niveau quelconque GH, ont leurs fonds horizontaux, lesquels sont AF, lorsque les vases sont cylin-

Fig. 302.



Fig. 303.

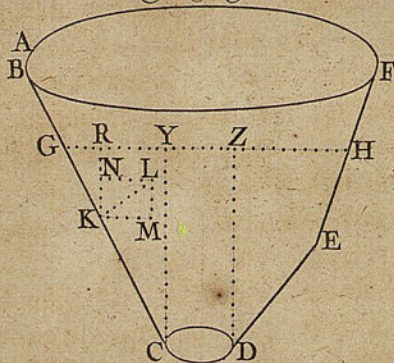


Fig. 304.

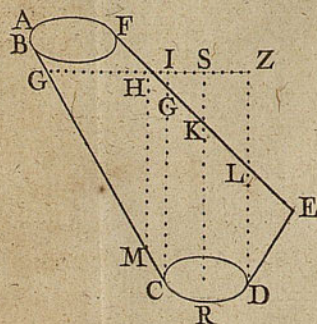


Fig. 306.

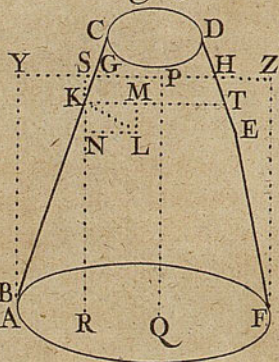


Fig. 307.

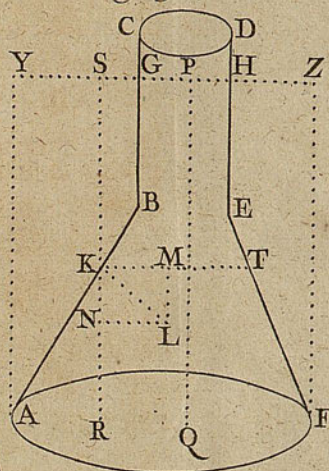


Fig. 305.

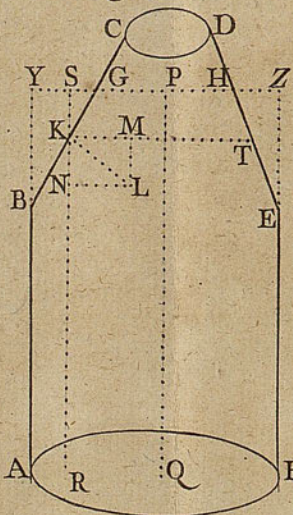


Fig. 308.

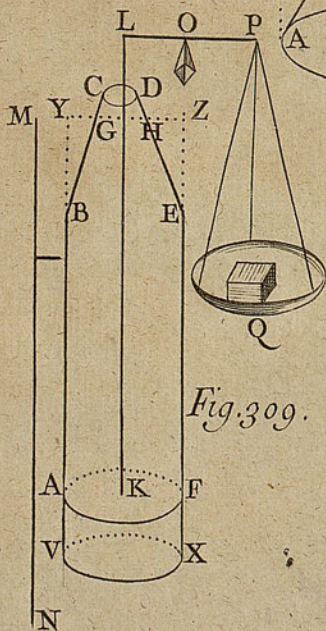
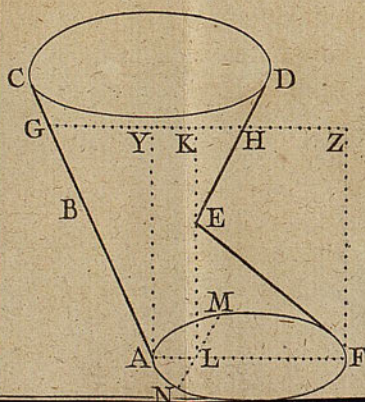


Fig. 309.

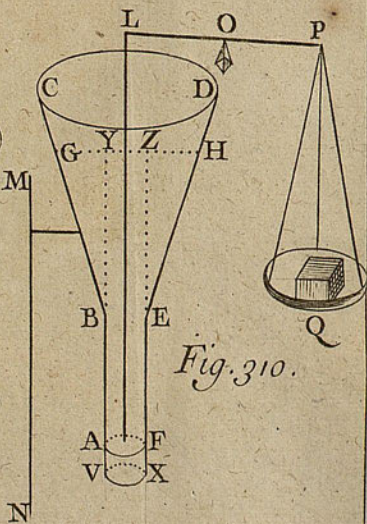


Fig. 310.

driques inclinez, comme dans le Th. 42. ou plus larges en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. & CD lorsque ces vases sont au contraire plus larges en haut qu'en bas, comme dans le Th. 43. La raison de cette supposition vient de ce que,

1°. Si le vase ABCDEF cylindrique incliné, comme dans le Th. 42. ou plus large en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. avoit son fond AF oblique à l'horison, comme ici dans les Fig. 311. 312. plus haut en F qu'en A; des filets verticaux de la Liqueur dont on le suppose rempli jusqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtes obliques au-dessous du plan horizontal FO, comme le filet vertical RK en rencontre ici en K l'oblique BC, lequel s'opposant à l'ascension de ce filet RK sollicité à monter par les plus longs, comme dans les démonstr. 1. des Th. 42. 44. en repousse comme là le point K suivant sa perpendiculaire KL, & conséquemment (par décomposition de force de la résistance de ce côté BC suivant sa perpendiculaire KL) suivant les côtes KM, KN du parallélogramme rectangle MN fait, comme dans la démonstr. 1. avec des forces qui pressent le fond oblique AF non seulement comme là en R, suivant le côté vertical KN qui le rencontre en R, mais encore en T, suivant le côté horizontal KM, qui rencontre ce fond oblique AF en ce point T; & ainsi de toutes les résistances que les côtes obliques du vase font à l'ascension de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-dessous du plan horizontal FO. Or si ce fond AF n'en étoit pressé que suivant les verticales KK, on démontreroit de la manière qu'on a démontré les Th. 42. 43. que ce fond oblique AF seroit pressé par tout ce que le vase ABCDEF contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, précisément de la même force qu'il le seroit par un cylindre vertical, ou (Th. 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour base ce fond AF pareillement oblique à l'horison, & qui se termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vase ABCDEF.

Fig. 311.
312.

cylindrique incliné dans la Fig. 311. ou plus large en bas qu'en haut dans la Fig. 312.

Fig. 313.

2°. Si ce vase ABCDEF étoit renversé, en sorte qu'il en devînt un plus large au contraire en haut qu'en bas, où il eût CD pour fond, comme dans le Th. 43. & qu'il eût aussi ce fond CD oblique à l'horison comme ici dans la Fig. 314. plus haut en D qu'en C; des filets verticaux de la Liqueur dont on le suppose rempli jusqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtes obliques au-dessous du plan horizontal DO, comme le vertical RK rencontre ici en K l'oblique BC, qui s'opposoit à la descente de ce filet RK, comme dans la démonstr. 1. du Th. 43. en repousse comme là le point K suivant sa perpendiculaire KL, & conséquemment (encore par décomposition de force de la résistance de ce côté BC suivant sa perpendiculaire KL) suivant les côtes KM, KN, du parallélogramme rectangle MN fait aussi comme dans cette démonstr. avec des forces dont l'une suivant le côté KN soutient comme là le poids directement contraire du filet RK, & l'autre suivant le côté horizontal KM presse en ce sens le fond oblique CD, qu'il rencontre en T; & ainsi de toutes les résistances que les côtes obliques du vase font à la descente de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-dessous du plan horizontal DO. Or si ce fond CD n'étoit pressé par aucun des filets verticaux qui rencontrent les côtes obliques du vase ABCDEF de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut, on démontreroit comme l'on a démontré le Th. 43. que ce fond oblique CD ne seroit pressé par tout ce que ce vase contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, que d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical, ou (Th. 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour base ce fond CD pareillement incliné à l'horison, & qui se termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vase de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut.

3°. Donc (nomb. 1. 2.) un vase de fond oblique à l'horison,

rifon, tant cylindrique incliné, que plus ou moins large en ce fond qu'au-dessus, rempli de Liqueur quelconque jusqu'à quelque hauteur ou niveau que ce soit, aura ce fond oblique plus pressé par ce qu'il contiendra de cette Liqueur, que ce fond ne le seroit par un cylindre quelconque de même Liqueur, qui auroit pour base ce même fond pareillement incliné à l'horifon, & qui se termineroit en haut au niveau de la Liqueur contenue dans le vase supposé cylindrique incliné, ou plus ou moins large en bas qu'en haut. Ce qui ne revient aux Th. 42. 43. 44. qu'en rendant ce fond horifontal: cas seul où se trouve vrai ce qu'on dit d'ordinaire sur le seul témoignage (ce me semble) de l'expérience, & ce qui se trouve démontré dans ces Th. 42. 43. 44. sçavoir, qu'à quelque hauteur ou niveau qu'un vase quelconque de fond horifontal, soit rempli de Liqueur quelconque, ce qu'il contiendra de cette Liqueur, en pressera toujours ce fond d'une force égale à celle dont ce fond horifontal seroit pressé par un cylindre quelconque de la même Liqueur, lequel auroit ce même fond horifontal pour base, & pour hauteur celle de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vase supposé plus ou moins large en bas qu'en haut. C'a été pour démontrer ce Théoreme appris par l'expérience de M. Paschal que le fond d'un tel vase a été supposé horifontal dans les Th. 42. 43. 44.

II. Dans le précédent art. 1. en parlant des vases cylindriques (la même chose se dira des prismatiques quelconques) de fonds ou bases obliques à l'horifon, n'y ayant parlé que des bases cylindriques, qui lui sont aussi inclinez: voici présentement pour ceux qui ont aussi des fonds obliques à l'horifon. Pour cela soit le tuyau ou vase cylindrique vertical ACDF, de base ou fond oblique quelconque AMNFP, qui prolongé fasse un angle quelconque DFK avec la longueur de ce tuyau, lequel soit rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra.

FIG. 314

1°. Il est évident que ce qu'il y a de cette Liqueur jusqu'en GH dans ce vase cylindrique ou prismatique ver-

tical ACDF, en presse verticalement, ou suivant sa longueur le fond oblique AMNFP d'une force égale au poids absolu de cette quantité AGHF de Liqueur; puisque ce poids porte tout entier sur ce fond.

2°. Quant à la pression perpendiculaire qui en résulte à ce fond oblique AMNFP, soit toute cette quantité de Liqueur conçue encore ici comme divisée en un nombre presqu'infini de filets verticaux OR terminez en autant de points O de son niveau GH, & en autant de points R du plan de la base ou fond oblique AMNFP du tuyau cylindrique ou prismatique vertical proposé ACDF, lequel soit imaginé coupé par un plan mené suivant quelque'un OR de ces filets verticaux parallèlement au plan vertical DFK, & qui rencontre en la droite MN prolongée vers L, ce fond AMNFP oblique à l'horison; sur lequel fond prolongé tombent les perpendiculaires DK, OL, qui en rencontrent en K, L, les droites FK, ML, parallèles (*constr.*) entr'elles, aussi-bien que DF, OR.

Cela posé, il est pareillement visible que le poids absolu de chaque filet OR de Liqueur, est à la pression où à la force dont il presse perpendiculairement le fond oblique AMNFP :: OR. OL (*constr.*) :: DF. DK. Donc ce dernier rapport étant constant, la somme des poids absolus de tous les filets OR, c'est-à-dire, le poids total & absolu de toute la quantité de Liqueur AGHF supposée jusqu'au niveau GH dans le cylindre vertical ACDF, est à la pression ou force dont ce poids total presse perpendiculairement le fond oblique de ce tuyau, comme DF est à DK; & conséquemment comme la surface inférieure AMNFP de la Liqueur est à la surface supérieure GH, quelle qu'en soit la figure.

III. On suppose ici (*art. 2. nomb. 2.*) que AMNFP. GH :: DF. DK. En voici la démonstration pour toutes sortes de cylindres ou prismes de bases de figures quelconques, tel qu'on suppose le précédent vertical ACDF, lequel soit ici en position quelconque.

Soit ce cylindre ou prisme quelconque ACDF de bases

opposées DXCT, AMFP, dont celle qu'on voudra soit de figure quelconque, & dont la premiere DXCT soit perpendiculaire, & l'autre AMFP lui soit inclinée de tel angle DFK qu'on voudra, soit tendu par DK perpendiculaire en K au plan de la base oblique AMFP.

Cela fait, je dis que l'aire de cette base oblique AMFP du cylindre ou prisme ACDF est à l'aire de sa base perpendiculaire opposée DXCT, comme DF est à DK; c'est-à-dire, $AMFP. DXCT :: DF. DK$.

Pour le faire voir, soit ce cylindre ou prisme quelconque ACDF coupé en DS par un plan parallele à l'oblique AMFP, & en FRQP par un autre plan perpendiculaire à ce cylindre ou prisme ACDF. Cela fait, il est manifeste que les sections obliques DS, AMFP, de ces cylindres ou prismes quelconques étant égales, semblables, & semblablement posées, de même que les sections perpendiculaires DXCT, FRQP, les cylindres partiels ASDF, DCQF, sont égaux entr'eux: de sorte qu'ayant ici le cylindre oblique $ASDF = AMFP \times DK$, & le droit $DCQF = FRQP \times DF = DXCT \times DF$, l'on y aura aussi $AMFP \times DK = DXCT \times DF$. Donc $AMFP. DXCT :: DF. DK$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

IV. On voit presentement que ACDF de position quelconque dans le précédent art. 3. est supposé être le tuyau vertical de même nom dans l'art. 2. & de base AMFP oblique à l'horison, rempli de Liqueur quelconque jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra; cette surface horisontale GH de sa Liqueur étant la base superieure perpendiculaire du tuyau vertical partial AHGF de base inferieure AMFP oblique à l'horison: on voit, dis-je, suivant le précédent art. 3. qu'en ce cas la surface oblique inferieure AMFP de la Liqueur sera à sa surface superieure GH, comme DF est à DK, ainsi qu'on la supposé sur la fin du nomb. 2. de l'art. 2.

Cela se voit encore en ce que si l'on suppose que la base superieure DXCT du tuyau vertical ACDF est horisontale, & consequemment perpendiculaire à ce tuyau

comme l'est la surface supérieure GH de la Liqueur qu'il contient ; ayant ici $GH = DXCT$, & le précédent art. 3. y donnant $AMFP.DXCT :: DF.DK$. il donnera pareillement ici $AMFP.GH :: DF.DK$. c'est-à-dire, que la surface oblique inférieure AMFP de la Liqueur supposée jusqu'au niveau GH dans le tuyau vertical ACDF, sera encore ici à cette surface supérieure GH de cette Liqueur, comme DF est à DK.

V. On peut remarquer en passant que la manière dont l'art. 3. vient de donner le rapport de l'aire de la section oblique quelconque d'un cylindre ou prisme quelconque ACDF, à l'aire de la section perpendiculaire de ce prisme ou cylindre presentement de position quelconque, comme dans l'art. 3. donneroit aussi les rapport entr'elles des aires des sections obliques quelconques de ce corps, lesquelles seroient en des plans, qui passant par F, seroient tous perpendiculaires à celui DKF, suivant lequel ce cylindre ou prisme ACDF seroit incliné au plan d'une quelconque AMEP de ces sections obliques à ce cylindre ; & cela en imaginant autant de perpendiculaires DK sur leurs plans prolongez. Ce qui donneroit ainsi les rapports des aires de toutes les autres sections obliques du cylindre, paralleles à celles-là dans toute sa longueur.

Mais sans tant de perpendiculaires DK, voici comment les rapports des aires de toutes ces sections obliques cylindriques ou prismatiques, peuvent se trouver par le moyen de la seule perpendiculaire DK imaginée (art. 3.) sur le plan prolongé d'une quelconque AMEP de ces sections obliques. Il n'y a pour cela qu'à imaginer le plan DKF prolongé à travers le cylindre ou prisme ACDF ; lequel plan DKF en le coupant en quelque trapeze ACDF de deux côtes opposez DF, CA, paralleles entr'eux, coupe sa section oblique AMEP en la droite AF, qui prolongée passe par K, & sa section perpendiculaire FRQP en la droite FQ perpendiculaire en Q au côté CA. Car ayant ainsi les triangles rectangles AQF, FKD, semblables entr'eux on aura les droites FA. FQ :: DF. DK. De sorte que dans la sup-

position que $DXCT$ est, aussi-bien que $FRQP$, une section perpendiculaire du cylindre ou prisme $ACDF$, & conséquemment que $DXCT = FRQP$; l'art. 3. venant de donner $DE : DK :: AMFP : DXCT :: AMFP : FRQP$. l'on aura aussi les droites $FA : FQ :: AMFP : FRQP$. ou $FRQP : AMFP :: FQ : FA$. c'est-à-dire, que les aires de la section perpendiculaire $FRQP$, & de l'oblique quelconque $AMFP$ du cylindre ou prisme $ACDF$, sont entr'elles en raison des droites FQ , FA , où ces sections cylindriques sont coupées par le plan DKF prolongé, qui est perpendiculaire aux leurs.

Donc la section oblique $AMFP$ arbitrairement inclinée à la longueur du cylindre ou prisme quelconque $ACDF$, pouvant être prise pour tout ce que le prisme ou cylindre en peut avoir d'obliques à sa longueur par son point F , en des plans perpendiculaires à celui DKF , suivant lequel ce prisme ou cylindre $ACDF$ est incliné au plan d'une quelconque $AMFP$ de ces sections obliques; les aires de toutes ces sections seront entr'elles comme les droites en qui elles seront coupées par ce plan DKF prolongé à travers d'elles, & à l'aire de la section perpendiculaire $FRQP$, comme ces droites correspondantes seront à la droite FQ , en qui elle fera aussi coupée par le même plan DKF .

Ainsi de quelque maniere que le cylindre ou prisme quelconque $ACDF$ soit coupé en travers par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires au plan DKF , & passant tous par F , les aires de toutes les sections, tant droites qu'obliques quelconques, qui en résulteront à ce prisme ou cylindre $ACDF$, seront toutes entr'elles comme leurs sections communes chacune avec ce plan DKF suivant lequel ce cylindre ou prisme est incliné au plan d'une quelconque $AMFP$ de ses sections obliques.

Cela a déjà été remarqué d'une autre maniere pour les cylindres de bases ou de sections perpendiculaires circulaires, ou (ce qui revient au même) de sections obliques elliptiques quelconques: mais je ne sçais point qu'on l'ait jusqu'ici remarqué.

pour toutes sortes de cylindres ou de prismes de sections de figures quelconques : c'est ce qui me fait ajouter ici cet art. 5. quoique hors d'œuvre.

THEOREME XLV.

Fig. 316.
317.

Quelque Liqueur qu'il y ait dans un Ciphon recourbé de branches quelconques,

I. Dès que cette Liqueur y sera à hauteurs égales quelconques, c'est-à-dire, à niveau dans ces branches, elle y restera en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y sera libre.

II. Si elle n'y est pas à niveau, elle s'y mettra d'elle-même, & y restera pareillement en équilibre.

DEMONSTRATION.

PART. I. Soit d'abord un vase de figure quelconque ABCD, rempli de quelque Liqueur que ce soit, jusqu'à tel niveau ou plan horizontal GH qu'on voudra. Imaginons ensuite que dans ce vase il se forme un Ciphon recourbé GEMNFHQPG fait (si l'on veut) de la même Liqueur gelée seulement en ce qu'il faudroit d'autre matière pour le former, c'est-à-dire, seulement en une lame roulée, de laquelle il soit fait comme il le seroit de verre, de fer blanc, ou de quelqu'autre métal : en sorte que ce que ce Ciphon de glace intercepte de la Liqueur non glacée dans tout le reste, y soit contenu comme dans un autre, qui n'en differeroit que dans la matière dont il seroit fait.

Une telle formation ou naissance de ce Ciphon de glace, ne causant aucun mouvement ni variété aucune dans le reste de la Liqueur qu'on ne suppose glacée que dans ce qu'il y en a d'employé à la construction de ce Ciphon ; il est évident que ce qu'il contient de cette Liqueur non glacée, y doit rester dans le même état qu'avant que ce Ciphon l'eût intercepté d'avec ce qui en reste hors de lui dans le vase ABCD, & y être retenu par les côtes fermes de ce Ciphon, comme ce reste de Liqueur environnante

rétènoit celle-là dans la place qu'elle y occupe. De sorte que si l'on conçoit présentement que le vase ABCD soit anéanti avec tout ce qu'il contient de Liqueur au dehors du Ciphon GEMNFHQPG qui soit toujours dans la même situation ; cet anéantissement ne causant non plus aucun mouvement ni variété aucune à ce ciphon, ni à ce qu'il contient de Liqueur, elle y doit encore rester en équilibre au niveau GH, comme avant cet anéantissement ; & conséquemment y seroit-elle aussi restée en équilibre à ce niveau GH, si, de quelque matiere que ce Ciphon eût été fait, on l'eût rempli jusques-là de cette Liqueur, sans y en employer davantage dans aucun vase qui contînt le tout comme on l'a supposé d'abord. Donc une Liqueur quelconque mise à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce soit, y doit toujours demeurer en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y sera libre. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

La même chose se prouveroit de même quand toute la Liqueur du vase ABCD seroit glacée à la reserve de ce qu'il y en auroit dans un canal GEMNFHQPG de Ciphon, qui resteroit comme creusé dans cette glace ; puisqu'il ne s'agit ici que de l'équilibre de cette Liqueur toujours fluide dans ce canal, & non de l'épaisseur de la matiere qui le renferme.

Fig. 313

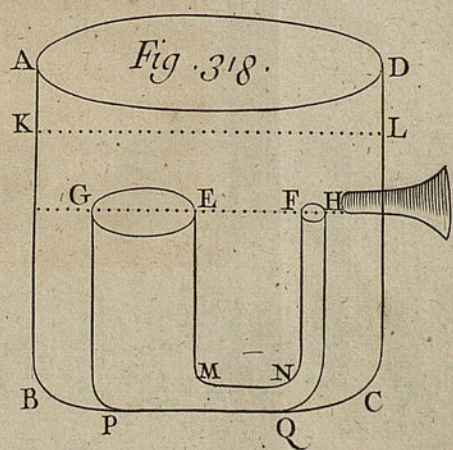
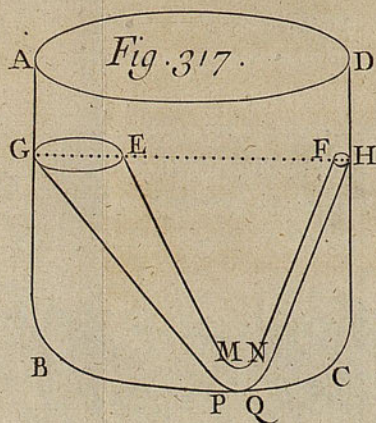
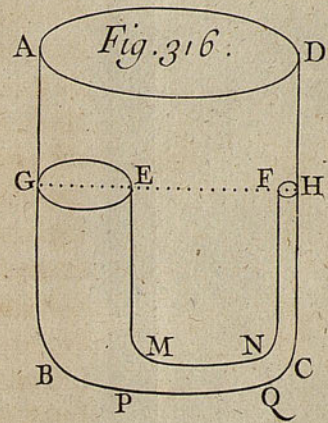
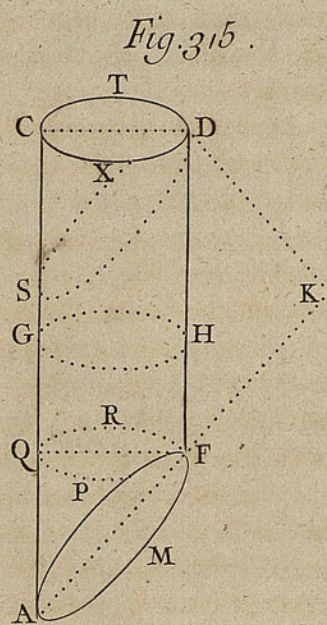
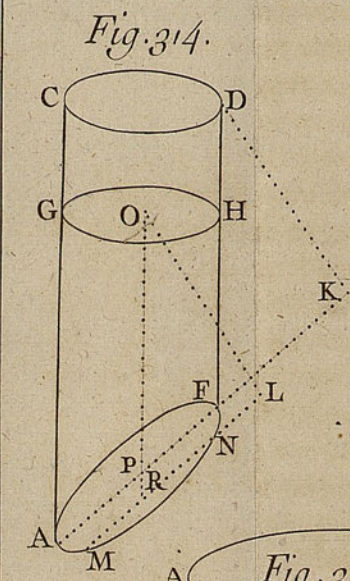
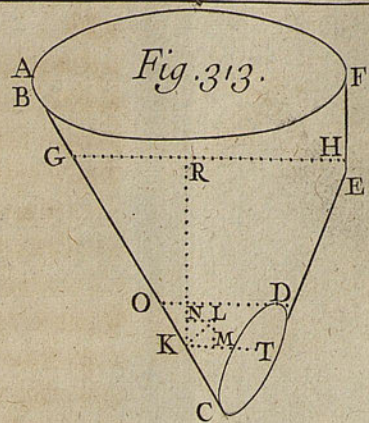
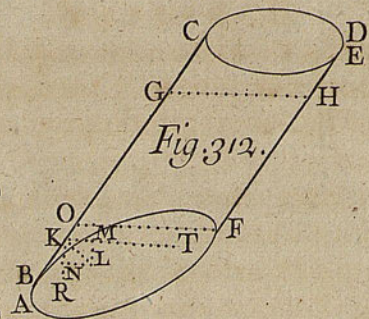
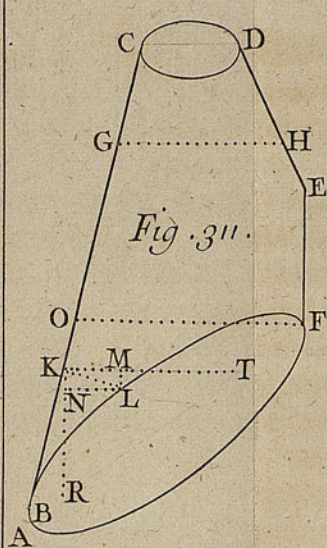
Autrement. Soit un Ciphon GEMNFHQPG de matiere quelconque, & de jambes GEMP, HFNQ, de directions & de cavitez à volonté, fait & placé de maniere que les ouvertures GE, FH, en soient à niveau, c'est-à-dire, dans un même plan horizontal GH au-dessus de ce Ciphon. Je dis que si on le remplit d'une Liqueur quelconque jusqu'à ces ouvertures, c'est-à-dire, jusqu'à ce niveau GH, elle y demeurera en équilibre, quelles qu'en soient les grosseurs des colonnes GEMP, HFNQ.

Pour le voir, imaginons ce Ciphon vuide ainsi placé dans un vase quelconque ABCD plus haut que le niveau GH, au-dessus duquel il ait (si l'on veut en H) un trou qui de son bord inférieur touche ce niveau ou plan horizontal GH, & qui bouché d'une cheville juste H, per-

mette de remplir de Liqueur ce vase ABCD jusqu'à quelque autre niveau supérieur KL, lorsque ce trou H est fermé, & la laisse descendre jusqu'au niveau GH, lorsqu'il est ouvert.

Ce trou H étant fermé, soit le vase ABCD rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'au niveau KL, il est visible qu'elle n'y arrivera qu'après que le Ciphon GEMNFHQPG en sera entièrement rempli jusqu'à ses ouvertures GE, FH, supposées au niveau GH; & que si ce trou H reste fermé après que cette Liqueur sera arrivée à cet autre niveau KL, elle y restera en repos suivant le Corol. 1. de l'Ax. 9.

Ouvrons présentement ce trou H, qu'on suppose toucher de son bord inférieur le niveau GH. Il est pareillement manifeste qu'en ce cas la Liqueur descendra de l'autre niveau KL en celui-ci GH, & qui étant arrivée, elle y demeurera, quoique ce trou H reste ouvert, à moins que quelque une des colonnes de cette Liqueur, contenues jusqu'en ce niveau GH dans les branches du Ciphon, par exemple, la plus grosse colonne GEMP ne l'emportât sur l'autre HFNQ; ce qui ne sçauroit être. Car en ce cas, si l'on referme le trou H, ce qu'il sortiroit de Liqueur par l'ouverture FH, devenant plus haute là que le niveau GH, & conséquemment que l'ouverture GE supposée à ce même niveau, refluerait (Ax. 9. Cor. 1.) par cette ouverture GE en la place de celle qui s'y abaisseroit alors; laquelle redevenue jusqu'au bord de cette ouverture GE, continueroit d'en faire sortir par l'autre FH, qui de son côté la rendroit ainsi à l'ouverture GE, & toujours de même. Ce qui causeroit ainsi un mouvement perpétuel dans la Liqueur du Ciphon GEMNFHQPG, & dans la surface de ce qu'il en auroit de plus entre lui & le vase ABCD: absurdité qui fait voir que la Liqueur dont ce Ciphon est rempli jusqu'au niveau GH, y doit demeurer en équilibre. De sorte qu'y étant sans aucune communication avec ce qu'il y en a de plus au même niveau GH entre ce Ciphon & le vase; & conséquemment



de même que s'il n'y en avoit point d'autre dans ce vase ABCD, & que ce vase lui-même ne fût plus ici; mais le Ciphon seul rempli de Liqueur jusqu'au niveau GH des ouvertures GE, FH, de ses branches. Donc une Liqueur quelconque mise à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce soit, y doit toujours demeurer en équilibre à ce niveau tant qu'elle y sera libre. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

PART. II. Je dis présentement que si la Liqueur n'est pas à niveau dans les branches du Ciphon, elle s'y mettra d'elle-même, & y restera en équilibre. Pour le voir, soit un Ciphon APQB de branches quelconques AP, BQ, dans lequel soit une Liqueur quelconque KPQS plus haute en RS dans la branche BQ, qu'en KL dans l'autre branche AP. Soit GH le plan horisontal auquel cette Liqueur seroit à niveau en GE, FH, dans ces deux branches. On vient de voir (*part. I.*) qu'en ce cas-ci cette Liqueur quelconque demeureroit en équilibre à ce niveau; & conséquemment que les colonnes GPE, HQF, presseroient également alors en sens contraires ce qu'il y auroit de cette Liqueur dans le canal PQ de communication. Or dans le cas de cette même Liqueur à hauteurs inégales en RS & en KL, dans les branches du même Ciphon APQB; ce qu'il y en auroit dans le canal PQ de communication, seroit plus fortement pressé de Q vers P par la colonne RQS que par la colonne FQH, & moins pressé de P vers Q par la colonne KPL, que par la colonne GPE. Donc en ce cas-ci de la surface RS de Liqueur plus élevée dans la branche BQ, que l'autre surface KL de la même Liqueur dans l'autre branche AP du Ciphon APQB; la Liqueur comprise dans le canal PQ de communication, sera plus fortement pressée de Q vers P, que de P vers Q; & toujours de même tant que RS sera plus haute que KL. Donc en ce cas la surface RS de la Liqueur descendra jusqu'en FH, & l'autre surface KL montera jusqu'en FE; & si par l'impetuosité de la des-

FIG. 329
320.

cente de la Liqueur dans la branche BQ, la surface RS descend plus bas que FH; & qu'en consequence l'autre surface KL monte plus haut que GE: celle-ci KL redescendra par la même raison, & l'autre RS remontera, & toujours de même jusqu'à ce que leur mouvement cesse; ce qu'on voit ne pouvoir arriver qu'au niveau GH. Donc cette Liqueur d'abord inégalement haute dans les branches du Ciphon, n'y aura de repos qu'en ce niveau GH, auquel elle se mettra ainsi d'elle-même, & auquel, suivant la part. 1. elle demeurera en équilibre tant qu'elle sera libre. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

On va voir encore d'autres preuves de ces parties 1. 2. dans les art. 2. 3. du Scholie que voici.

S C H O L I E.

Fig. 321.
322. 323.
324.

I. Voilà quelle est la nécessité de l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon, quelques inégales que soient les grosseurs de ces branches, & conséquemment des colonnes de cette Liqueur, qui s'y trouvent ainsi en équilibre entr'elles à ce niveau, nonobstant l'inégalité de leurs poids. Pour voir présentement la raison d'un tel effet, autant que peut le permettre le peu de connoissance que nous avons de la nature de la fluidité, ainsi qu'il a été remarqué dans le Scholie de l'Axiome. Soit un tuyau APBCRD recourbé en PR, ouvert par le haut en AB, & fermé en bas d'un fond CD de position quelconque, soit ce tuyau rempli de telle Liqueur qu'on voudra jusqu'en GE, laquelle presse le fond CD de plus en plus depuis son plus haut point C jusqu'au plus bas D, selon que les hauteurs des filets de Liqueur, qui le pressent, vont en augmentant en ce sens, depuis le niveau ou plan horizontal GH prolongé vers M jusqu'aux profondeurs des differens points où ils pressent ce fond. Soit la verticale MO moyenne arithmétique entre toutes ces hauteurs différentes; &

consequemment telle que multipliée par le nombre de ces hauteurs ou filets de Liqueur, le produit en soit égal à leur somme : laquelle étant proportionnelle à ce qu'ils exercent tous ensemble de force contre le fond CD suivant le fil inferieur du tuyau en cet endroit ; ce produit doit être aussi proportionnel à ce total de forces, c'est-à-dire, à tout ce que la Liqueur GERCDPG cause de pression, suivant cette direction, au fond CD d'angle quelconque avec cette direction. Or le nombre des filets de Liqueur, qui pressent ainsi ce fond CD à plein canal, est égal au nombre des points de ce fond. Donc leur hauteur moyenne MO multipliée par le nombre des points de ce fond CD, c'est-à-dire, par ce fond lui-même, est aussi proportionnelle à tout ce que la Liqueur cause de pression au fond CD, suivant la direction de cette Liqueur en cet endroit.

II. Suivant cela, une Liqueur quelconque mise à tel niveau GH qu'on voudra dans un Ciphon APQB de branches AP, BQ, de grosseurs & de directions à volonté, y restera toujours en équilibre à ce niveau, ainsi qu'on l'a déjà vû dans la part. 1. du present Th. 45. Car si l'on imagine où l'on voudra dans le canal PQ de communication une lame, laquelle lame conçûe comme une pellicule, ou comme de glace détachée des côtez de ce canal, soit regardée comme un fond aussi mobile que tout le reste parfaitement fluide de la Liqueur, & toujours juste de chacune des deux parties APDCRA, BQDCSB de ce Ciphon APQB ; & qu'on prenne, comme dans l'art. 1. la ligne verticale MO pour la moyenne hauteur arithmétique entre toutes les différentes hauteurs de ce que la premiere partie APDCRA du Ciphon contient de filets de cette Liqueur, qui pressent la lame CD de P vers Q : l'on aura aussi cette même verticale MO pour la hauteur moyenne arithmétique entre toutes celles de ce que la seconde partie BQDCSB contient de filets de la même Liqueur, qui pressent au con-

Fig. 327

O o i j

traire la même lame CD de Q vers P ; puisque les hauteurs de ces filets sont les mêmes de part & d'autre depuis le niveau ou plan horizontal GH, jusqu'à tous les points de la lame CD, à chacun desquels il s'en termine par tout deux égales de part & d'autre, une de chaque côté.

Donc en appellant p , ϖ , les pressions directement contraires qui en résultent à la lame CD ; le précédent art. 1. donnera ici $MO \times CD. p :: MO \times CD. \varpi.$ ou $MO \times CD. MO \times CD :: p. \varpi.$ D'où l'on voit que les pressions directement contraires de cette lame CD sont ici égales entr'elles, quelques inégales que soient les quantitez GERCDPG, HFSCDQH, de la même Liqueur qui les causent par leurs poids. Donc nonobstant l'inégalité de ces poids cette lame CD doit rester ici en repos ; & conséquemment aussi tout ce qu'il a de Liqueur à niveau GH dans le Ciphon APQB, laquelle doit ainsi demeurer en équilibre à ce niveau GH dans les deux branches de ce Ciphon, comme on l'a déjà vu dans la part. 1. du présent Th. 45.

III. La part. 2. de ce Théoreme 45. suit immédiatement aussi du précédent art. 1. sans y employer la part. 1. comme l'on a fait dans la démonstration de cette partie 2. Pour cela soit d'abord la Liqueur à hauteurs inégales en KL, TV, dans les branches AP, BQ, du Ciphon APQB. Soit encore imaginée une lame CD de cette Liqueur dans le canal de communication PQ, la même & pour le même usage que dans le précédent art. 2. soit aussi comme dans les art. 1. 2. depuis le plan horizontal KL prolongé vers N, la verticale NO moyenne hauteur arithmétique entre toutes les différentes hauteurs de ce que la partie APDCRA du Ciphon renferme de filets de Liqueurs, qui pressent la lame CD de P vers Q : il est visible que la verticale XO menée jusqu'en O depuis le plan horizontal TV prolongé vers X, sera aussi la moyenne hauteur arithmétique entre toutes celles de

ce que l'autre partie BQDCSB du Ciphon contient de filets de la même Liqueur, qui pressent au contraire la même lame CD de Q vers P.

Cela posé, si l'on appelle encore p la première de ces pressions, qui est de P vers Q; & ϖ , la seconde qui est au contraire de Q vers P; l'art. 1. donnera ici $NO \times CD$. $XO \times CD :: p. \varpi$. D'où l'on voit que pour que ces pressions directement contraires p , ϖ , soient égales entr'elles, & que la lame CD demeure en repos avec tout ce que le Ciphon APQB contient de Liqueur, il faudroit ici $NO = XO$, c'est-à-dire, que les surfaces TV, KL, de cette Liqueur y fussent à hauteurs égales, comme au niveau GH; & qu'ainsi la première TV descendît en HF, & que l'autre KL montât en GE, c'est-à-dire, que l'une & l'autre de ces surfaces TV, KL, de la Liqueur, vinsent à ce niveau: lequel cas rendant $XO = MO = NO$, & changeant ainsi l'analogie précédente en $MO \times CD$. $MO \times CD :: p. \varpi$. la Liqueur ainsi venue de part & d'autre à ce niveau GH, y resteroit en équilibre comme dans le précédent art. 2. ainsi qu'on l'a déjà vû dans la démonstr. de la par. 2. du présent Th. 45.

IV. Puisque dans les art. 2. 3. en quelque endroit du canal PQ de communication des branches AP BQ du Ciphon APQB que se trouve la lame CD de la Liqueur dont on suppose ce Ciphon rempli jusqu'à telles hauteurs qu'on voudra dans ses branches; les pressions des côtes ou faces opposées de cette lame CD, sont entr'elles (art. 1.) en raison des produits faits de cette lame, multipliez par les hauteurs moyennes arithmétiques chacune entre celles de tout ce qu'il y a de filets de Liqueur qui pressent cette lame de chaque côté: on voit que ce qu'il y a de cette Liqueur qui presse de chaque côté cette même lame CD, équivaut en force contr'elle à un cylindre de la même Liqueur, qui auroit CD pour base, & pour hauteur la moyenne arithmétique entre toutes

les hauteurs de ce qu'il y a de filets de cette Liqueur, qui pressent cette lame CD de ce côté-là. Donc ces deux produits étant égaux de part & d'autre de cette même lame en cas (art. 2.) de la Liqueur à même niveau dans les branches du Ciphon, & en cas (art. 3.) d'équilibre de cette Liqueur dans ces branches: sçavoir, l'un & l'autre (art. 2. 3.) $\equiv MO \times CD$ par rapport au niveau GH dans chacun de ces deux cas; les pressions directement contraires p, ϖ , de la lame CD, lesquelles se trouvent en l'un & en l'autre (art. 2. 3.) égales entr'elles, font l'effet des colonnes de même Liqueur égales en grosseurs & en hauteurs. Ce qui considéré, fait évanouir tout le merveilleux qui paroît d'abord dans l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon qui les a de grosseurs inégales.

Ce merveilleux vient de ce qu'on croit que tout ce qu'il y a de Liqueur dans la grosse branche, est employé contre tout ce qu'il y en a dans la plus menue, & reciproquement: de maniere que lorsque cette Liqueur est à niveau dans ces deux branches du Ciphon, on en regarde l'équilibre, qui (art. 2. & part. 1.) s'y trouve alors comme entre deux forces inégales, au lieu qu'on voit ici qu'il est toujours entre deux forces égales, de même que si les branches du Ciphon étoient de grosseurs égales.

Dans l'article 1. de ce Scholie-ci, conformément à l'article 3. du Scholie de l'Axiome, l'on a supposé à l'ordinaire sur le rapport de l'expérience, que la nature de la fluidité des Liqueurs est telle que les pressions de l'eau (& ainsi des autres Liqueurs) comprimée par sa seule pesanteur dans un reservoir ou vase quelconque, sont égales entr'elles en tous sens à distances égales de son niveau: Et de-là on a conclu dans le précédent article 1. que la pression ou force dont le fond de position quelconque d'un vase de figure quelconque, rempli de Liqueur jus-

qu'à quelque niveau que ce soit, est toujours proportionnelle au produit de ce fond multiplié par la hauteur moyenne arithmétique de cette Liqueur, ou de son niveau au-dessus de differens points de ce même fond. Cela revient aux Théoremes 43. 44. qui n'en sont même que des Corollaires.



AVERTISSEMENT.

M. Varignon travailloit à des Problèmes pour faire voir l'application de la Théorie précédente à la Pratique , quand la mort nous l'a enlevé. Comme cet Ouvrage n'auroit pas été moins utile que curieux , on a crû qu'on feroit plaisir au Public de lui donner dans cette seconde Partie ce qu'on a pû trouver touchant cette matiere parmi ses Ecrits , & dans les Memoires de l'Académie.



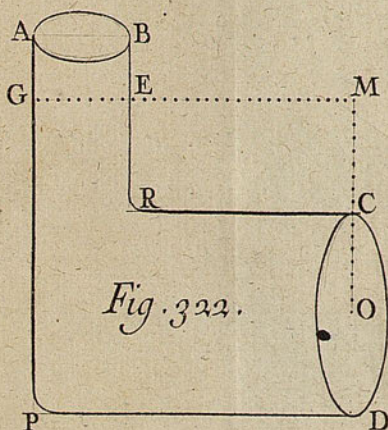
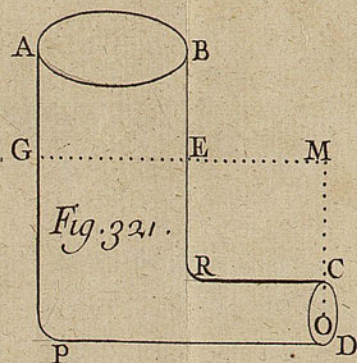
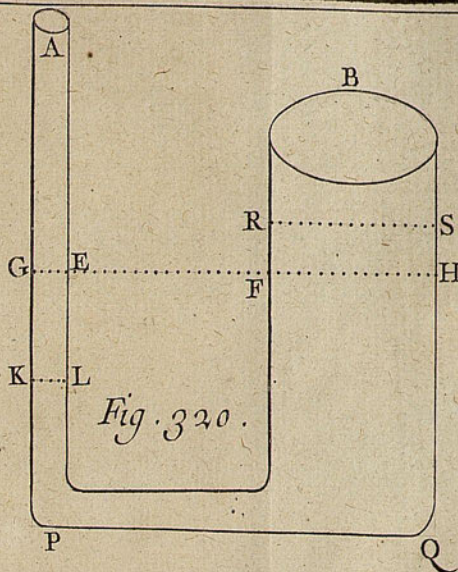
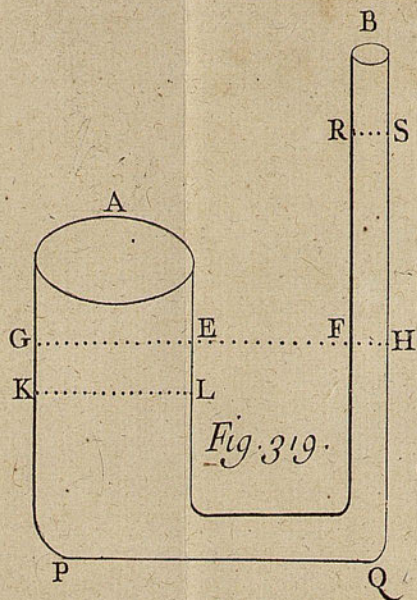


Fig. 323.

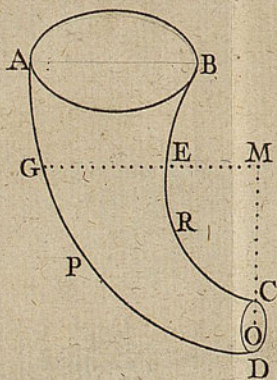


Fig. 324.

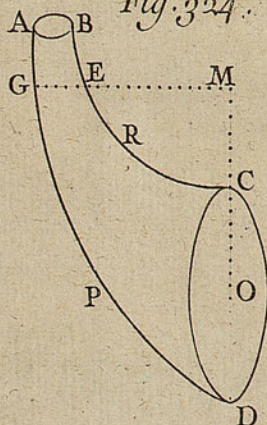
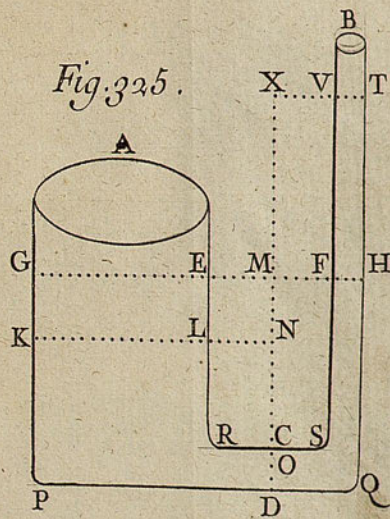


Fig. 325.



NOUVELLE MECANIQUE.

SECONDE PARTIE.

OU L'ON APPLIQUE LA THEORIE
précédente à la résolution de plusieurs Problèmes ; à la démonstration de quelques Machines, & à l'examen de l'opinion de M. Borelli, sur les propriétés des Poids suspendus par des Cordes.

MECANIQUE NOUVELLE

DEUXIEME PARTIE.

OU L'ON APPLIQUE LA THEORIE
DES PROGRESSES A LA MECHANIQUE
MATERIELLE, A LA CONSTRUCTION DE
MACHINES, & A L'EXAMEN DE L'OPINION DE
M. BERNARD, SUR LES PROPRIETES DES
CORPS ELASTIQUES.



APPLICATION

DE LA

NOUVELLE MECANIQUE

A LA RESOLUTION

DE PLUSIEURS PROBLEMES.



AN s la suite lorsqu'il s'agira de poids, on les supposera de directions paralleles entr'elles, & chacun de direction par tout parallele à elle-même, à moins qu'on n'avertisse du contraire. Et en parlant de cordons, auxquels autant de puissances seront appliquées, nous les supposons toujours tous attachez ensemble par un seul & même noeud commun, jusqu'à ce que nous avertissions du contraire.

PROBLEME I.

Une force quelconque étant donnée, en trouver une infinité d'autres, qui trois à trois appliquées à des cordes perpendiculaires entr'elles, faisant équilibre avec celle-là. FIG. 316.

Ce qui revient à

Une force quelconque étant donnée suivant AE, la décomposer en trois autres de directions perpendiculaires entr'elles.

Ppij

Autour de la diagonale AE prise à volonté sur la direction donnée de la puissance donnée, soit le parallélogramme rectangle quelconque $EBAF$, dont le côté AF soit aussi la diagonale d'un autre parallélogramme rectangle quelconque $FCAD$ dans un plan perpendiculaire à celui du premier $EBAF$. Je dis que la force quelconque suivant AE , se décomposera en trois autres suivant des directions AB , AC , AD , toutes perpendiculaires entre-elles ; & cette force suivant AE , sera ces dérivées suivant ces trois directions AB , AC , AD , comme AE est à ces trois côtés des parallélogrammes BF , CD .

DEMONSTRATION.

Puisque AE , AF , sont les diagonales de ces deux parallélogrammes, il est manifeste que la force suivant AE , se décomposera en deux autres suivant AB , AF , auxquelles elle sera comme AE à AB , AF ; & que la résultante suivant AF , se décomposera de même en deux autres suivant AC , AD , auxquelles elle sera comme AF à AC , AD . Donc la première force donnée suivant AE , se décomposera ainsi en trois autres suivant AB , AC , AD , auxquelles elle sera comme AE est à ces trois côtés des parallélogrammes BF , CD . Or ces trois côtés AB , AC , AD , sont perpendiculaires entr'eux : puisque les plans des parallélogrammes BF , CD , sont supposez perpendiculaires entr'eux, & que AB supposez perpendiculaires à leur section commune AF , l'est aussi aux lignes AC , AD , qu'on suppose perpendiculaires entr'elles. Donc la force donnée suivant AE se trouve ici décomposée en trois autres suivant des directions AB , AC , AD , toutes perpendiculaires entr'elles ; & est à chacune de ces trois forces dérivées, comme AE est à chacune de ces trois lignes AB , AC , AD . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si l'on veut que les trois puissances dérivées suivant les directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entre-elles, soient égales entr'elles, la direction AE de la puissance donnée étant laissée arbitraire; soient faites AF, BE, parallèles entr'elles, & AB qui les rencontrent angles droits: ensuite sur BE soit prise BG=AB; & après avoir fait du centre A, & du rayon AG, l'arc de cercle GF qui rencontre AF en F: de ce point F soit menée FE, parallèle à AB, qui rencontre BG prolongée en E, par lequel point E soit menée la diagonale AE du parallélogramme rectangle BF, autour du côté AF, comme diagonale, soit fait le quarré CD dans un plan perpendiculaire à celui du parallélogramme BF & le côté AF, fera la section commune de ces deux plans orthogonaux l'un à l'autre.

FIG. 327.

Il est déjà visible, suivant la démonstration précédente, que la force donnée suivant AE se décompose ici en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles, & que cette force suivant AE est à chacune de ces trois forces dérivées suivant ces trois directions AB, AC, AE, comme AE à chacune de ces trois lignes: de sorte qu'il ne reste plus qu'à démontrer que ces trois lignes sont égales entr'elles pour faire voir que les forces dérivées suivant ces directions, le sont aussi entr'elles. Or cela est aisé, puisqu'ayant (*Hyp.*)

l'angle B droit, & AB=BG, on aura $\overline{2 \times AB} = \overline{AG} = \overline{AE}$

(à cause du quarré CD) $\overline{AD} + \overline{FD} = \overline{AE} + \overline{AC} =$

$\overline{2 AC} = \overline{2 AD}$. d'où résulte $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$; & conséquemment $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$. Ce qui restoit ici à démontrer.

COROLLAIRE II.

Fig. 317.

Pour trouver la même chose, lorsque AE est donnée, soit sur le diamètre AE un demi-cercle AFE , dans lequel soit inscrite une corde AF . $AE :: \sqrt{\frac{2}{3}}$. 1. Soit achevé le parallélogramme $AFEB$, dont le côté AF soit la diagonale d'un quarré CD fait sur un plan perpendiculaire à celui de ce parallélogramme $AFEB$. Il est encore visible par la démonstration précédente, que la force de direction donnée AE , sera encore ici décomposée en trois autres, suivant des directions AB , AC , AD , toutes perpendiculaires entr'elles; & que cette force est à chacune des dérivées suivant ces directions AB , AC , AD , comme AE est à ces trois lignes; de sorte qu'il ne s'agit plus que de faire voir que ces trois lignes sont égales entr'elles; ce qui est aisé: car puisque (*Hyp.*) $AF. AE :: \sqrt{\frac{2}{3}}$. 1. si l'on prend $AE=1$, l'on aura $AF=\sqrt{\frac{2}{3}}$; & conséquemment (à cause de l'angle droit AFE) $FE=\sqrt{\frac{1}{3}}$. De plus AF ($\sqrt{\frac{2}{3}}$) étant la diagonale du quarré CD , l'on aura aussi ses côtes FD , AD , chacun $=\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc $FE=FD=AD$. Or $FE=AB$, $FD=AC$. Donc $AB=AC=AD$. *Ce qui restoit à démontrer.*

PROBLEME II.

Fig. 318.

Trois puissances P , Q , R , étant données, ou de rapports donnés entr'elles, appliquées à trois cordons AP , AQ , AR , diriger ces cordons avec ces trois puissances, de manière qu'elles fassent équilibre entr'elles.

SOLUTION.

On a vu (*Th. I. Corol. 6. art. I.*) que pour la possibilité de ce Problème, la somme de deux quelconques de ces trois puissances, doit être plus grande que la troisième.

Fig. 326.

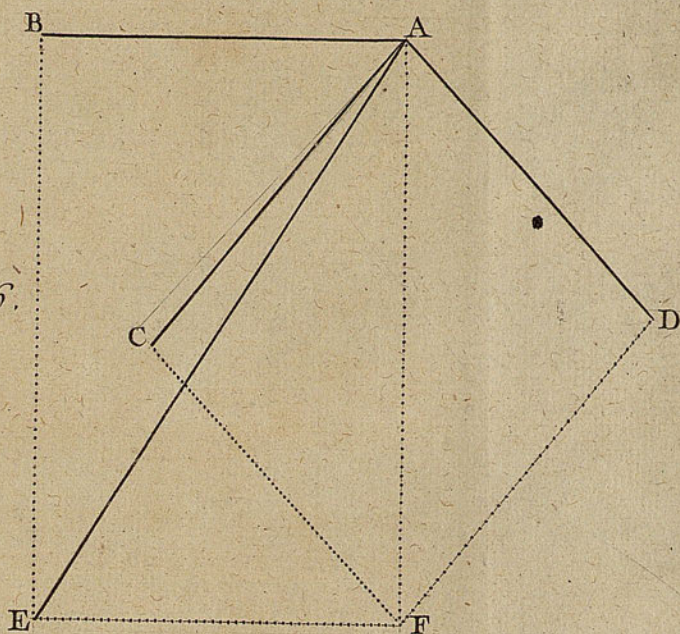
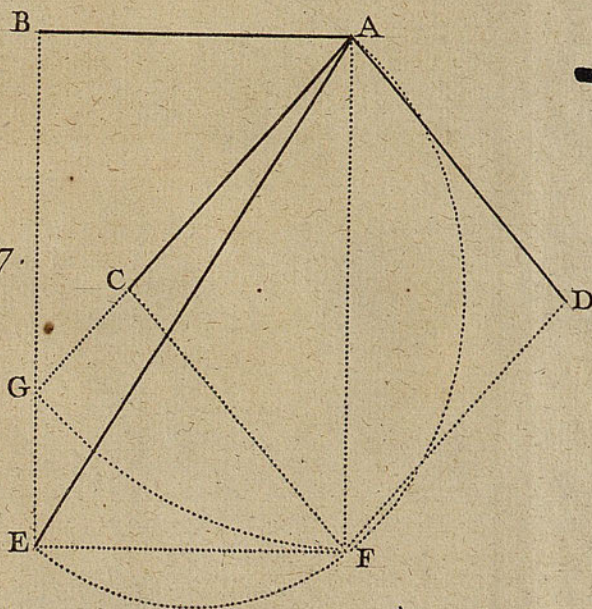


Fig. 327.



Cela posé, soit à volonté la direction d'une quelconque de ces trois puissances, par exemple, de la puissance Q , sur une partie quelconque AD de cette direction QA , prolongée vers D , soit fait le triangle ABD , dont les côtes AB , BD , soient au troisième AD , comme les puissances données P , R , sont à la puissance Q pareillement donnée, soient ensuite la puissance P dirigée suivant AB , & la puissance R dirigée suivant AR parallèle à BD . Je dis que ces deux puissances P , R , & la puissance Q , ainsi dirigées suivant AP , AR , AQ , feront équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit trouver.*

D E M O N S T R A T I O N.

Soit achevé le parallélogramme BC , en faisant DC parallèle à AB ; ce qui rend $AC=BD$. Donc par la solution ayant AB , BD , à AD , comme les puissances P , R , sont à la puissance Q ; les côtes AB , AC , du parallélogramme BC , sont pareillement à sa diagonale AD , comme les puissances P , R , sont à cette puissance Q . Donc (*Th. 1. part. 5.*) ces trois puissances P , R , Q , appliquées aux trois cordons AP , AR , AQ , dirigez suivant ces trois lignes AB , AC , AD , feront ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

P R O B L E M E I I I.

Soient deux puissances données Q , R , avec deux directions AR , AP , pareillement données. On demande une troisième puissance P à diriger suivant AP , & une troisième direction AQ de la puissance donnée Q ; telles que les trois puissances P , R , Q , appliquées à trois cordons dirigées suivant AP , AR , AQ , fassent équilibre entr'elles. Fig. 329.
330. 331.

S O L U T I O N.

Après avoir pris à volonté AC sur la droite AR de position donnée, & ensuite sur elle prolongée pris du côté de A ,

une autre partie AE . $AC :: Q. R$. dont les puissances Q, R , sont aussi données ; soit fait du rayon AE un arc de cercle ED , qui rencontre en D la droite OO menée par le point C parallèlement à la direction donnée AP de la puissance requise P .

Cela fait, je dis que si de ce point D par A on mène la droite DAQ , & qu'on achève le parallélogramme $ACDB$, l'on aura AQ pour la direction requise de la puissance donnée Q ; & qu'une puissance qui sera aux données Q, R , comme AB est à AD, AC , sera aussi la requise P , qui appliquée suivant la direction donnée AP , fera équilibre avec ces deux autres Q, R , appliquées de même suivant AQ, AR . *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Ces trois puissances P, R, Q , étant ainsi appliquées à leurs cordons AP, AR, AQ , suivant AB, AC, AD , & entr'elles comme les côtes AB, AC , & la diagonale AD du parallélogramme $ABDC$, la part. 5. du Th. 1. fait voir qu'elles seront alors toutes trois en équilibre entre-elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

On voit que selon que le cercle ED décrit du centre A , & du rayon $AE = AD$, rencontre CO parallèle à AP , en un ou en deux points D, d , différens de C , le Problème n'aura qu'une ou deux solutions. Or,

1°. Lorsque AC est plus grande que AE , comme dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. dans lesquelles Fig. 330. 331. ce cercle ne rencontre CO qu'en un seul point D , différent de C . Donc dans chacun de ces deux cas le Problème n'aura point d'autre solution que la précédente ; c'est-à-dire, que la direction requise de la puissance donnée Q , n'y pourra être que suivant l'unique DA prolongée vers Q ; & que la puissance P , aussi requise suivant AP pour faire équilibre avec les

FIG. 330.

331.

Les données R, Q , dirigées suivant AR, AQ , y devra nécessairement être à chacune d'elles comme le côté AB du parallélogramme $ABDC$ est à son autre côté AC & à sa diagonale AD . Donc la précédente solution ayant $AC.AE::R.Q$. le Problème n'aura aussi que cette unique solution, lorsque la puissance donnée R sera plus grande que l'autre donnée Q , ou qu'elle lui sera égale.

2°. Mais lorsque AC est moindre que $AE=AD$, ainsi Fig. 329.
que dans la Fig. 329. le cercle ED y rencontre OO en deux points D, d , différens de C . Donc le Problème y aura deux solutions : l'une comme la précédente, dans laquelle le point D donne la droite DAQ pour une direction de la puissance donnée Q , & une puissance P , qui dirigée suivant AP , doit être aux deux données R, Q , comme AB est à AC, AD , pour faire équilibre avec elles dirigées suivant AR, AQ .

L'autre solution donnera de même dAg pour une autre direction de la même puissance donnée Q placée en g , & une autre puissance P , qui dirigée comme l'autre suivant AP , doit être ici (en achevant le parallélogramme $AbdC$) aux puissances données R, Q , comme Ab est à AC, Ad , pour faire aussi équilibre avec ces mêmes puissances R, Q , dirigées suivant AR, Ag . Cette seconde solution se démontrera comme la première, la démonstration précédente convenant également à toutes les deux, en employant ici le parallélogramme $AbdC$ comme l'autre $ABDC$ a été employé là.

Puisque le Problème est ici (Fig. 329.) susceptible de Fig. 329.
ces deux solutions, lorsque AC est moindre que AE , & qu'elles exigent également $AC.AE::R.Q$. Ce Problème est aussi susceptible de deux solutions, lorsque des deux puissances données R, Q , la première R est moindre que la seconde Q .

3°. Donc (nomb. 1. 2.) le présent Probl. 3. n'est susceptible que d'une solution, telle que la première du nomb. 1. lorsque des deux puissances données R, Q , la première R est plus grande que la seconde Q , comme

dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. & de deux solutions, quand la première R de ces deux puissances est plus petite que la seconde, comme dans la Fig. 329.

P R O B L E M E I V.

Fig. 332.
333.

Trois puissances P , Q , R , ou trois poids des mêmes noms, étant donnez, appliquez à trois cordons AEP , AQ , AFR , ou les rapports de ces trois puissances de la Fig. 332. ou de ces trois poids de la Fig. 333. étant simplement donnez avec deux points fixes dans la Fig. 332. & deux pivots ou poulies de mêmes noms dans la Fig. 333. par lesquels points fixes ou pivots E , F , l'on veut que passent les cordons de deux quelconques P , R , de ces trois puissances ou poids: on demande les directions que leurs trois cordons doivent avoir en partant de leur nœud commun A , pour mettre ces trois puissances, ou ces trois poids en équilibre entr'eux.

S O L U T I O N.

On sçait (*Th. I. Corol. 6. art. 1.*) que pour cela la puissance Q , ou le poids de ce nom, doit être moindre que la somme des deux autres.

Pour cela soit dans la Fig. 332. une droite quelconque GK en même plan avec la droite, qui passe par les points donnez E , F , & de position quelconque différente d'elle dans la Fig. 332. & parallèle à la direction du poids Q dans la Fig. 333. sur cette droite de grandeur arbitraire GK des Fig. 332. 333. soit fait un triangle KHG aussi en même plan avec les points donnez E , F , duquel triangle les deux côtes KH , HG , soient au premier GK , comme les puissances ou les poids donnez P , R , sont à Q pareillement donné. Prenant ensuite les poulies ou les pivots E , F , de la Fig. 333. pour des points fixes, tels que sont E , F , dans la Fig. 332. De ces points E , F , dans chacune de ces deux Fig. 332. 333. soient menées les droites EA parallèle à HK , & FA parallèle à GH . Enfin par le point A , où ces deux droites EA , FA , se rencontrent,

Soit AQ parallèle à GK dans chacune des Fig. 332. 333.

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant ces trois droites AE, AF, AQ, les cordons des trois puissances ou poids P, R, Q, il y aura équilibre entr'elles dans la Fig. 332. & entr'eux dans la Fig. 333. desquelles puissances ou poids les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, F. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Autour de AD, portion quelconque de QA prolongée vers D, comme diagonale, soit imaginé un parallélogramme BC, fait de côtez AB, AC, pris sur les directions AE, AF, des cordons AEP, AFP, continues en lignes droites par les points donnez E, F, dans la Fig. 332. & qui passent par-dessus les poulies ou pivots E, F, pareillement donnez de position dans la Fig. 333. Ce parallélogramme BC, qui a par construct. sa diagonale AD parallèle à KG, & son côté AC parallèle à HG, aura le triangle ABD semblable au primitif KHG; & en conséquence les côtez AB, BD, AD du premier ABD de ces deux triangles, sont ici proportionnels aux côtez KH, HG, KG, de l'autre triangle KHG; qui les a aussi (*constr.*) proportionnels aux puissances ou aux poids P, R, Q. Donc les puissances P, R, sont ici à la puissance Q dans la Fig. 332. & les poids P, R, au poids Q dans la Fig. 333. comme les côtez AB, BD, du triangle ABD, sont à son troisième côté AD, c'est-à-dire (à cause de $AC=BD$) comme les côtez AB, AC, du parallélogramme BC, sont à sa diagonale AD. Par conséquent (*Th. 1. part. 5.*) il y aura ici équilibre tant entre les trois puissances P, R, Q, de la Fig. 332. qu'entre les poids de mêmes noms dans la Fig. 333. desquelles puissances ou poids, les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, F: le tout ainsi qu'on l'exigeoit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

I. Cette dernière condition, suivant laquelle on exige
Q q ij

geoit que dans l'équilibre demandé entre les trois puissances ou poids donnez P, R, Q , les directions de P, R , passassent par les points donnez fixes E, F , n'est ici rigoureusement observée que dans le cas des puissances de la Fig. 332. & n'approche de cette rigueur dans le cas des poids de la Fig. 333. qu'autant que la petitesse des poulies ou des pivots E, F , qui s'y trouvent, approche de l'infinie petitesse de ces points, pour lesquels nous les avons prises jusqu'ici.

Fig. 333.

II. Mais si l'on ne veut pas prendre ainsi ces poulies ou ces pivots E, F , de la Fig. 333. pour de véritables points, & qu'on veuille seulement trouver les directions que les cordons des trois poids donnez P, R, Q , doivent avoir en partant de leur nœud commun A , pour mettre ces trois poids en équilibre entr'eux sur des poulies E, F , données de position & de grandeurs quelconques, par-dessus lesquelles les cordons des deux premiers poids P, R , doivent passer. Voici la solution de cet autre Problème, qui fera voir, que si outre cela on vouloit que les directions des deux cordons AEP, AFR , des poids P, R , passassent par deux points donnez sur les poulies E, F , ou ailleurs, le Problème en seroit impossible, à moins que ces deux points ne fussent heureusement donnez dans ces deux directions que la direction déterminée du poids Q , rend aussi déterminées, sans permettre de les faire passer par où l'on veut, comme l'indéterminée de la puissance Q de la Fig. 332. le vient de permettre des directions des puissances P, R . Quelque clair que tout cela soit, on le verra encore mieux dans le Schol. du Probl. 5.

PROBLÈME V.

Fig. 334.

Si l'on veut présentement avoir égard aux grandeurs des poulies, imaginons-en deux VX, XZ , de rayons EV, FX , donnez de grandeurs quelconques dans un plan vertical, & mobiles dans ce plan autour des centres fixes E, F , donnez de position. Soient encore trois poids donnez P, R, Q , appli-

que à trois cordons $AVYP$, $AXZR$, AQ , dont les deux premiers $AVYP$, $AXZR$, doivent passer par-dessus les poulies Y , Z . On demande la situation de leurs parties AV , AX , propres à mettre leurs poids P , R , en équilibre avec le poids Q .

S O L U T I O N.

Je repete encore que pour cet équilibre chacun de ces trois poids doit être (*Th. I. Corol. 6. art. I.*) moindre que la somme des deux autres.

Cela posé, soit fait sur une verticale quelconque GK dans le plan des poulies VY , XZ , un triangle GKH , dont les deux côtes KH , HG , soient au troisième GK , comme les poids donnez P , R , sont au donné Q . Soient ensuite menées les droites LS parallèle à KH , & MT parallèle à HG ; sur lesquelles des centres E , F , des poulies VY , XZ , soient menées les perpendiculaires ES , FT , qui prolongées des côtes de E , F , rencontrent en V , X , les circonférences de ces mêmes poulies; ausquels points V , X , soient enfin leurs tangentes VA , XA , qui se rencontrent en A .

Cela fait, je dis que si l'on met en ce point A le nœud commun des cordons $AVYP$, $AXZR$, AQ , bandez par les poids P , R , Q , & dont les deux premiers passent par-dessus les poulies VY , XZ ; ces trois poids y demeureront en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit trouver.*

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque (*constr.*) les droites AV , AX , sont tangentes en V , X , des poulies VY , XZ ; & conséquemment sont perpendiculaires à leurs rayons VE , XF , qui prolongez vers S , T , le sont aussi (*constr.*) en ces points aux droites LS , MT ; ces autres droites AV , AX , sont parallèles chacune à chacune des droites LS , MT , sçavoir, AV à LS , & AX à MT . Or (*constr.*) LS l'est à KH , & MT à HG . Donc AV est aussi parallèle à KH , & AX à HG . Or, à cause de GK supposée parallèle à AQ , si l'on prolonge celle-ci vers D , & qu'autour de sa partie quelconque AD

(comme diagonale) l'on fasse le parallelogramme $ABDC$, dont les côtez AB , AC , sont sur AV , AX ; ce parallelogramme aura aussi AD parallele à KG , & BD parallele à AC , ou à AX . Donc son triangle ABD est équiangle à KHG ; & conséquemment ce triangle ABD à ses côtez AB , BD , AD , proportionnels à ceux KH , HG , KG , de KHG . Or (*constr.*) ce triangle-ci KHG à ces mêmes côtez KH , HG , KG , en raison des poids P , R , Q . Donc l'autre triangle ABD a aussi ses côtez AB , BD , AD , en raison de ces mêmes poids P , R , Q ; par conséquent le parallelogramme BC , ayant $AC=BD$, donne pareillement ici AB , AC , AD , en raison de ces poids donnez P , R , Q ; ce qui y rend les deux premiers P , R , au troisième Q , comme les deux côtez AB , AC , du parallelogramme BC , sont à sa diagonale AD . Donc (*Th. 1. art. 5.*) ces trois poids P , R , Q , doivent ici demeurer en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

Cet équilibre résultant de ce que le parallelogramme BC se trouve ici avoir ses côtez AB , AC , & sa diagonale AD , en raison des poids donnez P , R , Q ; & ces rapports entre AB , AC , AD , dépendant de ceux des angles des trois cordons entr'eux, lesquels rapports d'angles seroient autres qu'ici, si l'on plaçoit le nœud commun de ces trois cordons ailleurs que dans le point A , qu'on lui a trouvé dans la solution. On voit que pour l'équilibre ici requis entre les poids donnez P , R , Q , ce point A est l'unique où le nœud commun de leurs trois cordons puisse être placé; & qu'ainsi les directions suivant AV , AX , sont les seules suivant lesquelles les poids P , R , puissent ici faire équilibre avec le poids Q . De sorte que si outre ce que dessus l'on exigeoit ces directions des poids P , R , par des points qui fussent hors de ces lignes AV , AX , le Problème seroit alors impossible, ainsi qu'on le vient de dire dans l'art. 2. du Schol. du précédent Probl. 4.

Fig. 328.

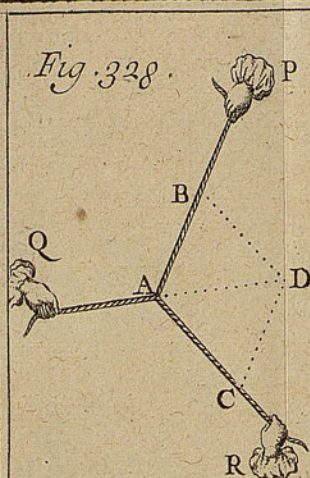


Fig. 229.

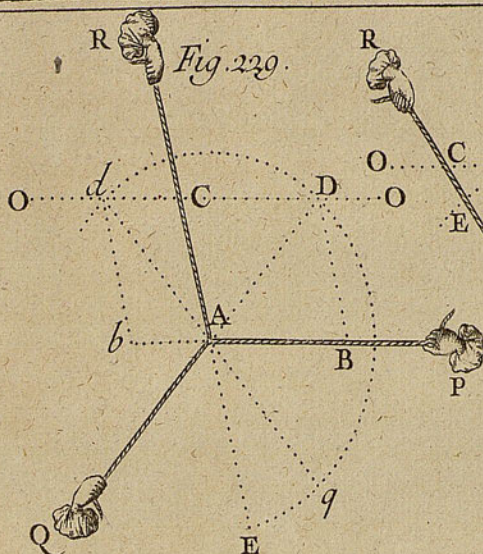


Fig. 330.

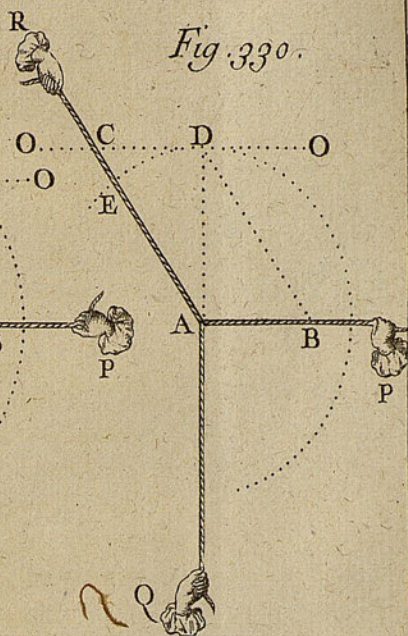


Fig. 331.

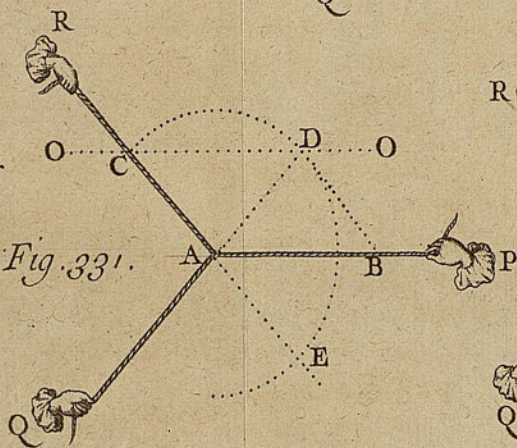


Fig. 332.

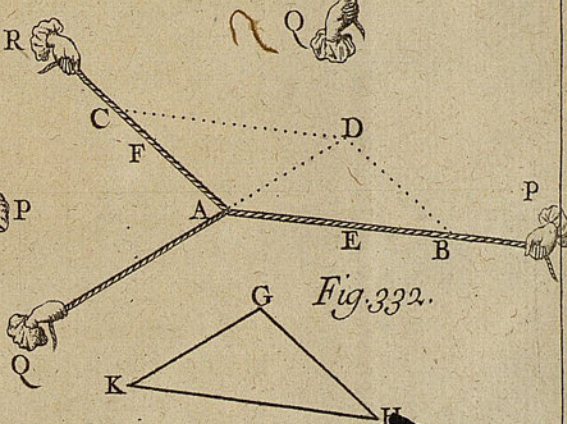


Fig. 333.

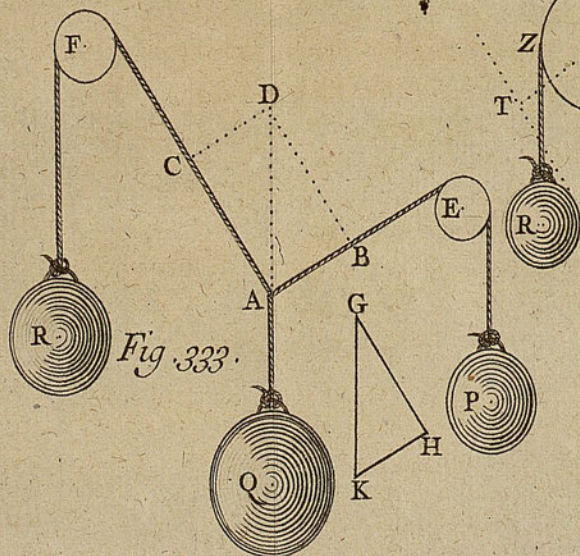
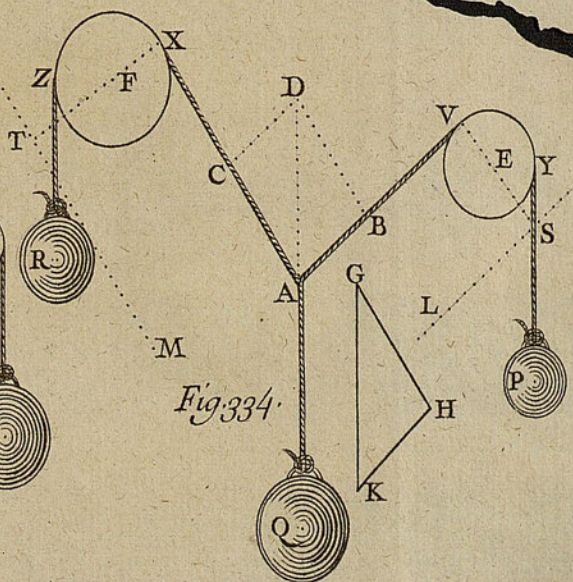


Fig. 334.



PROBLEME VI.

Trois puissances P, Q, R , étant données à volonté, les Fig. 335
appliquer à trois cordons, de maniere qu'elles fassent équilibre
entr'elles suivant des directions qui passent par trois points
 A, B, C , donnez aussi à volonté en toute autre position qu'en
ligne droite.

SOLUTION.

Il est encore ici à remarquer (*Th. I. Corol. 6. part. I.*)
que pour cet équilibre chacune des puissances données
 P, Q, R , doit être moindre que la somme des deux
autres.

Cela posé, par deux A, B , des trois points donnez A, B, C , soit la droite AB , sur laquelle soit le triangle AFB , dont les trois côtes AB, AF, BF , soient entr'eux comme les trois puissances données R, Q, P . Après avoir circonscrit le cercle $AFBE$ à ce triangle AFB , du troisième point donné C soit menée par F la droite CF , qui rencontre encore la circonference de ce cercle en quelque point E de l'arc AEB .

Cela fait, je dis que si l'on met en E le nœud commun des trois cordons auxquels les puissances données P, Q, R , doivent être appliquées, & qu'on les dirige suivant EA, EB, FC , prolongée vers R ; ces trois puissances P, Q, R , demeureront en équilibre entr'elles suivant ces directions EP, EQ, ER , qui passent ainsi par les trois points donnez A, B, C . *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Puisque (*constr.*) les trois côtes BF, AF, AB , du triangle AFB sont entr'eux comme les trois puissances données P, Q, R ; & aussi entr'eux comme les sinus des angles BAF, ABF, AFB , qui leur sont opposez dans ce triangle AFB : ces trois puissances P, Q, R , sont pareillement entr'elles comme ces trois sinus. Or ces trois sinus des angles BAF, ABF, AFB , sont les mêmes que ceux des an-

gles BEF, AEF, AEB : puisque de ces fix angles, tous à la circonference du cercle AFBE, les deux BAF, BEF, appuyez sur le même arc BF, sont égaux entr'eux ; que les deux ABF, AEF, appuyez sur le même arc AF, sont aussi égaux entr'eux ; & que les deux AFB, AEB, sont complemens l'un de l'autre à deux droits. Donc les trois puissances données P, Q, R, sont aussi entr'elles comme les sinus des angles BEF, AEF, AEB ; c'est-à-dire, comme les sinus des angles QER, PER, PEQ, les deux premiers de ces trois-ci étant complemens à deux droits des deux premiers des trois autres, & le troisiéme étant le même de part & d'autre. Donc (*Th. I. Corol. 20.*) ces trois puissances données P, Q, R, demeureront ici en équilibre entr'elles suivant les directions EP, EQ, ER, qui (*constr.*) passent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Sans le secours des Sinus.

Si l'on fait BM parallèle à EA, & qui rencontre la droite EF en quelque point M, l'on aura le triangle EBM, lequel ayant les angles BEM = BEF = BAF, & BME = AEF = ABF, sera semblable au triangle AFB ; & conséquemment aura ses trois côtez BM, EB, EM, en raison des trois côtez BF, AF, AB, de cet autre triangle AFB, lesquels sont (*constr.*) entr'eux comme les trois puissances données P, Q, R. Donc ces trois puissances sont aussi entr'elles comme les trois côtez BM, EB, EM, du triangle EBM. Par conséquent si l'on acheve le parallelogramme BMNE, qui donne EN = BM, l'on aura ici les puissances P, Q, à la puissance R, comme les côtez EN, EB, à la diagonale EM de ce parallelogramme BMNE. Donc (*Th. I. Corol. 6. art. 1.*) ces trois puissances données P, Q, R, seront ici en équilibre entr'elles suivant les directions EP, EQ, ER, qui (*constr.*) passent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

SCHOLIE.

SCHOLIE.

I. On voit que tant que le troisiéme C des trois points donnez A, B, C, se trouvera quelque part dans quelqu'un des angles AFB, GFH, opposez au sommet ; le nœud commun E des trois cordons EP, EQ, ER, qui doivent passer par ces trois points dans l'équilibre requis, fera toujours quelque part sur l'arc circulaire AEB compris entre les deux autres points donnez A, B.

II. On voit aussi que si ce troisiéme point donné C ne se trouve dans aucun des angles AFB, GFH, il n'y aura qu'à mener de ce point C par quelqu'un des deux autres A, B, une ligne droite, & s'en servir comme l'on vient de faire de AB dans la solution, pour résoudre comme là le Problème en question.

III. Si les trois points donnez A, B, C, l'étoient en ligne droite, par exemple, tous trois sur la droite AB de longueur quelconque ; il est manifeste que pour l'équilibre requis entre les trois puissances données P, Q, R, dont on veut que les directions passent par ces trois points, le commun E de leurs cordons devroit aussi être sur cette ligne droite AB, suivant laquelle ces trois cordons devroient aussi pour lors être tous dirigés : sçavoir, deux d'un même côté de ce nœud E, & le troisiéme du côté directement opposé ; & qu'en ce cas la puissance appliquée à ce troisiéme cordon devroit être seule égale à la somme des deux autres, qui auroient alors une même direction directement contraire à la sienne ; & qui par conséquent ainsi réunies en une directement contraire à celle-là, l'emporteroient sur elle, si elle étoit moindre que leur somme, ou seroient emportées par elle, si elle étoit plus grande.

PROBLEME VII.

Etant donnez les deux angles ACD, BDC, que deux poids quelconques E, F, font faire à la corde ACDB lâchement tendue entre deux clous ou crochets A, B, auxquels elle est attachee FIG. 336.

chée par ses extrêmités, & entre lesquels ces deux poids E, F , pendent aux points quelconques C, D , de cette corde : l'on demande les rapports de ces deux poids entr'eux.

SOLUTION.

Soient AC, BD , prolongées jusqu'à leurs rencontres en G, H , avec les directions CE, DF , des poids E, F , qu'on suppose les avoir parallèles entr'elles.

Cela fait, je dis que ces poids E, F , sont entr'eux en raison reciproque des parties CH, DG , de leurs directions, comprises en AC, BD , prolongées jusqu'à elles ; c'est-à-dire, $E.F :: DG.CH$. Ce qu'il falloit trouver.

DEMONSTRATION.

Soient appelées C la force dont le point D est tiré vers C , & D , la direction contraire, dont le point C est tiré vers D : soit de plus f la marque des sinus.

L'équilibre étant ici supposé, le Corol. 20. du Th. 1. donnera $E.D :: f.ACD. f.ACE :: f.DCG. f.ECG :: f.DCG. f.CGD :: DG.CD$. c'est-à-dire, $E.D :: DG.CD$. le même Corol. 20. du Th. 1. donnera pareillement $F.C :: CH.CD$. ou $C.F :: CD.CH$. Mais la force C , dont le point D est tiré vers C , est égale à la force D , dont le point C est tiré vers D ; puisque ces deux forces C, D , sont en équilibre & directement opposées entr'elles. Donc $E.D :: DG.CD$. & $D.F :: CD.CH$. Donc aussi (en raison ordonnée) $E.F :: DG.CH$. Ce qu'il falloit démontrer.

M. Newton a aussi démontré cette proposition à sa manière dans son Arithmétique universelle.

PROBLEME VIII.

Fig. 337.

Deux poids donnez P, Q , étant attachez à une corde $ABCP$, qui retenue par une de ses extrêmités au clou ou crochet A , passe librement par-dessus une poulie C mobile entre ces poids autour de son centre fixe G : on demande en quel point B , ou en quelle situation ABC de la corde ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux.

SOLUTION.

Après avoir mené la verticale AE, & d'un de ses points quelconque E pris au-dessus de A, mené en angle aussi quelconque la droite ET. $AE :: P. Q.$ soit par les points A, T, la droite ATO rencontrée en une infinité d'autres points t , par une infinité de *et* parallèles à ET, & qui rencontrent aussi la verticale AE en une infinité de points e , E, desquels soient menées autant de droites ec , EC, qui touchent la poulie en c , C. Si l'on prend par tout sur ces touchantes, depuis AE, les portions $eb = et$, $EB = ET$; la courbe $AbB\beta$, qui passera par tous les points b , B, ainsi trouvée, déterminera par sa rencontre avec l'arc de cercle LBD décrit du centre A & du rayon donné AB, le point B où le poids Q demeurera suspendu en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallélogramme HK, dont la diagonale BF soit sur la verticale QB prolongée vers F; & les côtes BH, BK, sur les portions AB, BC, de la corde ABCP. La ressemblance des triangles rectilignes FKB, ABE, donnera $BK. BF :: EB. EA$ (*constr.*) $:: ET. EA$ (*Hyp.*) $:: P. Q.$ c'est-à-dire, $BK. BF :: P. Q.$ Donc (*Th. 1. Corol. 6. art. 1.*) le poids Q demeurera ici suspendu en B en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Le rayon AB étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il soit, le point B de suspension du poids Q en équilibre avec le poids P, se trouvera toujours sur la courbe $AB\beta$. Ainsi si ce poids Q, au lieu d'être attaché en B à la corde ABCP, eût été proposé coulant le long de cette corde entre le crochet A & la poulie CC, & qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arrêter en équilibre avec le poids P: cette question auroit été résolue par le moyen de la courbe $AB\beta$, faite comme ci-dessus, en ré-

pondant que ce poids Q auroit pû demeurer ainsi en équilibre avec le poids P dans tout ce que la longueur de la corde lui peut permettre de points B , qui puissent atteindre à cette courbe $AB\beta$, & qu'il y seroit effectivement demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette courbe ; puisque par la construction de cette même courbe $AB\beta$, ce poids Q y auroit été par tout au poids P : BF . BK . Et conséquemment aussi (*Th. 1. Corol. 6. art. 1.*) en équilibre par tout là avec le poids P . D'où l'on voit que ce même poids Q peut ainsi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde $ABCP$ ainsi repliée jusqu'à la courbe $AB\beta$; de sorte que cette courbe est le lieu de tous les points B d'équilibre.

PROBLEME IX.

Fig. 338.
339.

Un Levier droit, sans pesanteur, étant de longueur donnée EF dans la Fig. 338. & EG dans la Fig. 339. chargé d'un poids donné Q en un point donné G quelconque ; lui appliquer en deux autres points aussi donnés E , F , deux puissances données P , R , de maniere qu'avec des cordes seulement ce Levier chargé de ce poids Q , demeure en équilibre avec elles.

SOLUTION.

I. Il est démontré (*Th. 21. part. 3.*) que pour cela il faut que des trois puissances P , R , Q , (en appellant aussi de ce nom le poids Q) la somme de deux quelconques soit plus grande que la troisième de ces puissances ; ou du moins que $P+R$ soit $=Q$, lorsque son point G de suspension est entre E & F , comme dans la Fig. 338. ou enfin que $R-P$ soit $=Q$, lorsque F est entre E & G , comme dans la Fig. 339.

Cas de G entre E & F , comme dans la Fig. 338.

Fig. 338.

II. Dans ce cas de la Fig. 338. outre $P+R=Q$, la possibilité du Problème exige encore (*Th. 21. Corol. 13.*) $P.R. : EG. EG$. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux

puissances P, R , des directions EP, ER , parallèles & contraires à celle du poids Q , pour le mettre (*Th. 21. Corol. 13.*) en équilibre avec ces deux puissances. *Ce qu'il falloit 1°. faire & démontrer.*

III. Dans le même cas de la Fig. 338. lorsque des trois puissances P, R, Q , la somme de deux quelconques est plus grande que la troisième, soit dans les Fig. 340. 341. une verticale MA , c'est-à-dire, parallèle à la direction GQ du poids Q ; sur une partie quelconque AD de cette verticale soit fait un triangle ABD , dont les côtes AB, BD , soient à AD , comme les puissances données P, R , sont au poids donné Q . Ensuite après avoir achevé le parallélogramme $ABDC$, & prolongé les côtes AB, AC , vers P, R , soit prise BH vers P sur AP , telle qu'on ait $AB.BH::FG.GE$. Du point H par D soit menée la droite HDK , laquelle rencontre AR en K , & rende ainsi (à cause des parallèles BD, AR ,) $KD.DH::AB.BH$ (*constr.*) $::FG.GE$. Cela fait,

Fig. 338.
340. 341.

1°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. est égale à la longueur EF du Levier de la Fig. 338. placé en HK , il aura en D son point G , d'où pendra le poids Q suivant DA ; & ses points E, F , en H, K , où les puissances P, R , lui seront appliquées suivant AP, AR . Donc puisque (*constr.*) ces puissances P, R , & ce poids Q , sont entre-eux comme AB, BD, AD , c'est-à-dire (à cause du parallélogramme $ABDC$) comme AB, AC, AD ; les deux puissances P, R , appliquées suivant HP, KR , aux extrêmités du Levier EE de la Fig. 338. placé ici en HK , y demeureront (*Th. 21. part. 6.*) en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q en son point G . *Ce qu'il falloit 2°. faire & démontrer.*

2°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. est plus longue ou plus courte que le Levier FE de la Fig. 338. soit prise $KL=FE$, sur cette même KH prolongée, s'il est nécessaire, du côté de H ; de son point L soit faite Le parallèle à AR , & qui rencontre AP en e ; duquel point soit ef parallèle à HK , & qui rencontre $AM; AR$, en G, f .

je dis que cette droite $fe=KL$ (*constr.*) = au Levier FE de la Fig. 338. sera la position requise de ce Levier dans les Figures 340. 341. lequel y étant ainsi placé, aura ses points F, E, G , en f, e, G , & son poids Q dirigé suivant DA . Donc puisque (*constr.*) les puissances P, R , & ce poids Q , sont entr'eux comme AB, BD, AD , c'est-à-dire (à cause du parallélogramme $ABDC$) comme AB, AC, AD ; les puissances P, R , appliquées suivant eP, fR , aux extrêmités e, f , ou E, F , du Levier EF placé en ef , le soutiendront alors en équilibre avec son poids Q . *Ce qu'il falloit 3°. faire & démontrer.*

Cas de F entre E & G, comme dans la Fig. 339.

Fig. 339.

IV. Dans ce cas de la Fig. 339. lorsque $R=F=Q$, la possibilité du Problème exige de plus (*Th. 21. Corol. 13.*) $P.R.::GF.GE$. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux puissances P, R , des directions parallèles à celle GQ du poids Q , desquelles directions celle de R soit contraire aux deux autres: alors ce poids donné Q se trouvera (*Th. 21. Cor. 13.*) en équilibre avec les deux puissances P, R . *Ce qu'il falloit 4°. faire & démontrer.*

Fig. 339.

342. 343.

V. Dans le même cas de la Fig. 339. lorsque des trois puissances P, R, Q , la somme de deux quelconques est plus grande que la troisième, soit aussi dans les Fig. 342. 343. comme dans les Fig. 340. 341. de l'art. 3. une verticale ou parallèle MA à la direction GQ du poids Q ; sur une partie quelconque AD de cette verticale, soit aussi fait un triangle ACD , dont les côtes CD, CA , soient à cette partie arbitraire AD , comme les puissances données P, R , sont au poids donné Q . Ensuite après avoir achevé le parallélogramme $ABCD$, & prolongé ses côtes AD, AB , vers Q, P , avec sa diagonale CA vers R , soit prise AH sur AP , telle qu'on ait $AB.AH::GF.GE$. Du point H par C soit la droite HCK , laquelle rencontre AQ en K , & rend ainsi (à cause des parallèles BC, AQ) $KC.KH::AB.AH$ (*constr.*) $::GF.GE$. Cela fait,

1°. Si la droite HK des Fig. 342. 343. est égale à la longueur EG du Levier de la Fig. 339. ce Levier GE placé en KH, aura en C son point F, où la puissance R lui sera appliquée suivant CR; & les deux autres points E, G, en H, K, où la puissance P, & le poids Q, lui seront appliquez suivant AP, AQ. Donc puisque les puissances P, R, & ce poids Q, sont entr'eux comme CD, CA, AD, c'est-à-dire (à cause du parallélogramme ABCD) comme AB, AC, AD: les deux puissances P, R, ainsi appliquez suivant HP, CR, aux points E, F, du Levier GE de la Fig. 339. qui placé ici en KH, les aura en H, C, y demeureront en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q suivant la verticale MA prolongée vers K, dans laquelle sera son point G de suspension. *Ce qu'il falloit 5°. faire & démontrer.*

2°. Si la droite KH des Fig. 342. 343. est plus longue ou plus courte que ce Levier GE de la Fig. 339. soit prise KL=GE, sur cette même KH prolongée, s'il est nécessaire; de son point L soit faite Le parallèle à AQ, & qui rencontre AP en e, duquel point soit eG parallèle à HK, & qui rencontre MA, RC, prolongées en G, f. Je dis que cette droite eG=LK (*constr.*) = au Levier EG de la Fig. 339. fera la position requise de ce Levier dans les Fig. 342. 343. lequel y étant ainsi placé, aura ses points G, F, E, en G, f, e, des Fig. 342. 343. son poids Q appliqué en G suivant AD, & les puissances R, P, appliquées suivant CA, AB, en f, e, où seront les points F, E, de ce Levier GE placé en Ge. Donc puisque ces puissances P, R, & ce poids Q, sont entr'eux (*constr.*) comme DC, CA, AD, c'est-à-dire (à cause du parallélogramme ABCD) comme AB, AC, AD, ces deux puissances P, R, & ce poids Q, ainsi appliquez au Levier GE de la Fig. 339. placé en Ge dans les Fig. 342. 343. y demeureront (*Th. 21. part. 6.*) en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit 6°. faire & démontrer.*

PROBLEME X.

FIG. 344.

Quatre puissances P, Q, R, K , étant données en raison des lignes AB, AC, AE, AD , les appliquer à autant de cordons réunis ensemble par un même nœud, & les diriger de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles.

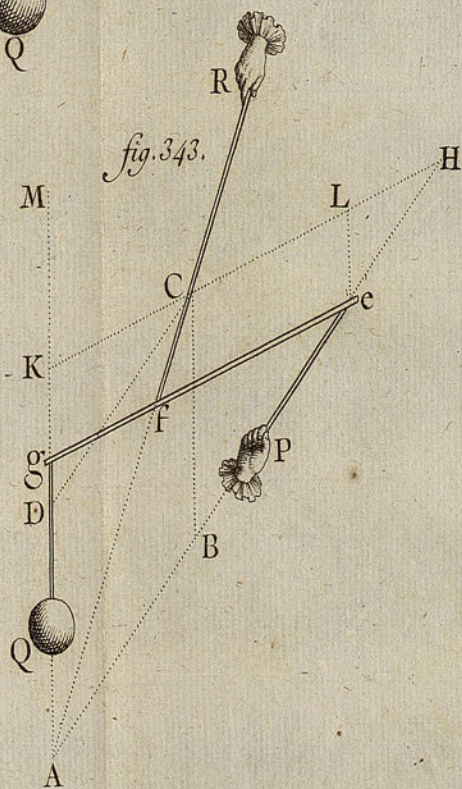
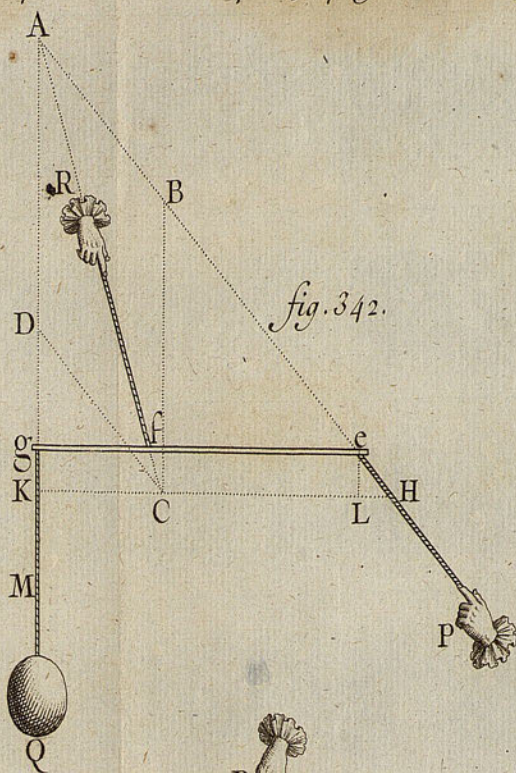
SOLUTION.

De deux quelconques AB, AC , des quatre lignes proportionnelles aux quatre puissances données, soit fait le parallélogramme $ABFC$, dont la diagonale AF soit moindre que la somme des deux autres proportionnelles AE, AD . Soient ensuite des centres A, F , & des rayons AD, AE , deux arcs de cercles qui se coupent en D dans le plan du parallélogramme $ABFC$, ou hors de ce plan, il n'importe. Après cela menez AD, FD , avec AR parallèle à FD , & prolongez DA vers K .

Cela fait, je dis que si l'on met en A le nœud commun des quatre cordons, & qu'on les dirige suivant AB, AC, AR, AK , les quatre puissances données P, Q, R, K , appliquées à ces quatre cordons AP, AQ, AR, AK , ainsi dirigez, demeureront en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Soit menée DE parallèle à AF , & qui rencontre en E la droite AR déjà (*Hyp.*) parallèle à FD ; ce qui forme le parallélogramme $AEDF$. La construction précédente rendant les lignes AB, AC, AE, AD , en raison des puissances données P, Q, R, K , & appliquées suivant ces lignes; le parallélogramme $AEDF$ fait de la proportionnelle AE , & de la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$ fait des deux proportionnelles AB, AC , fera ici le dernier des parallélogrammes faits comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la démonstration de la partie 2. du Theoreme 4. & la puissance K sera ici aux trois autres
 $P,$



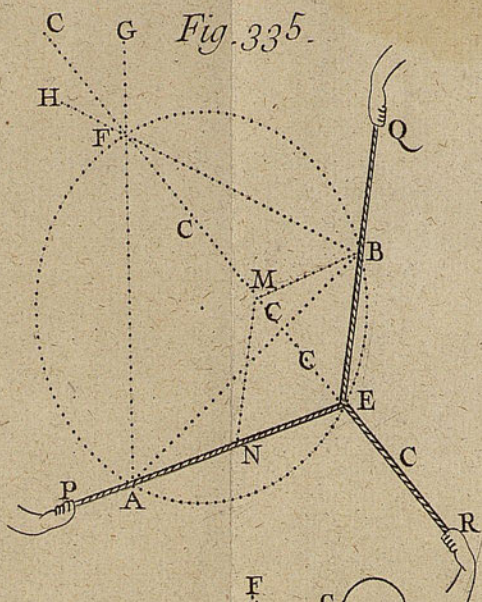


Fig. 335.

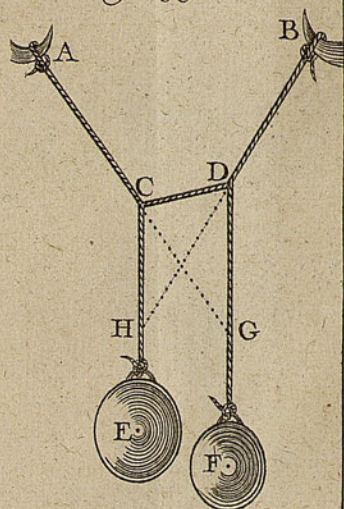


Fig. 336.

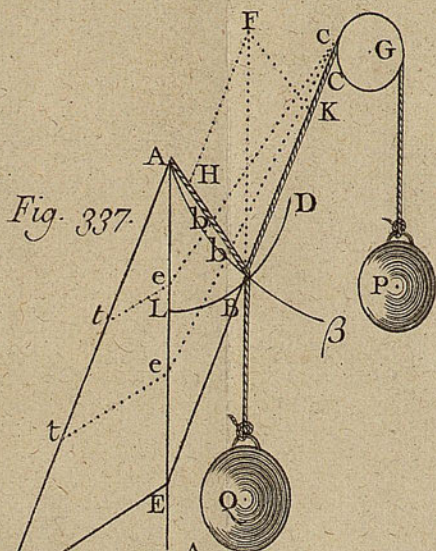


Fig. 337.

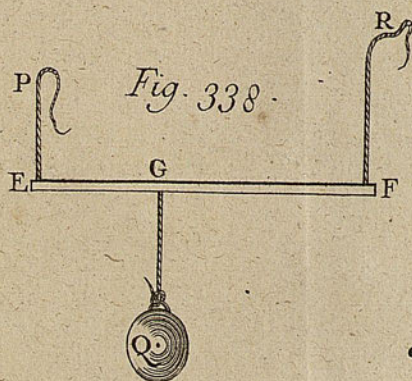


Fig. 338.

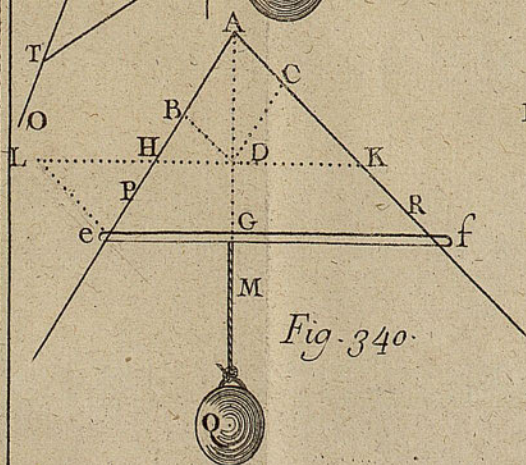


Fig. 340.

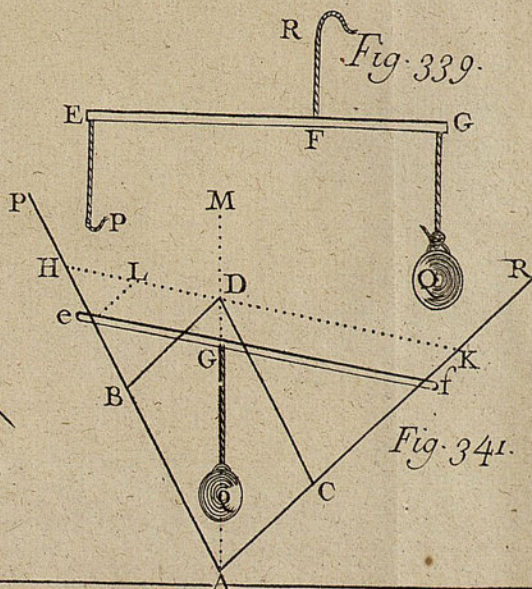


Fig. 339.

Fig. 341.

P, Q, R, comme la diagonale AD de ce dernier parallélogramme, est à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th. 4. part. 2.*) il y aura ici équilibre entre toutes ces quatre puissances. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

Il est visible que si l'on prend le point D au dehors du plan BAC, alors AE parallèle (*constr.*) à DF, sera aussi hors de ce plan; & conséquemment AD proportionnelle à la puissance K, sera pour lors la diagonale d'un parallélepède BACFDGEH, qui aura pour côtes les proportionnelles des trois autres puissances P, Q, R: ainsi cette puissance K sera pour lors à chacune de celles-ci, comme la diagonale AD de ce parallélepède est à chacun de ses côtes AB, AC, AE, qui leur répondent. Par conséquent ces quatre puissances données K, P, Q, R, étant ici (*constr.*) dirigées suivant ces quatre lignes AD, AB, AC, AE; ce leur sera encore (*Th. 4. Corol. 2. nomb. 3.*) une nouvelle raison d'être ici toutes en équilibre entr'elles, ainsi qu'il étoit requis.

P R O B L E M E X I.

Des quatre puissances à appliquer à quatre cordons retenus ensemble par un même nœud, une quelconque K étant donnée avec sa direction AK, trouver les trois autres avec leurs directions telles que ces quatre puissances fassent équilibre entr'elles, & que les trois demandées aient leurs trois directions perpendiculaire chacune à chacune des deux autres. FIG. 345.

S O L U T I O N.

Sur la direction donnée AK prolongée vers D, soit prise depuis le nœud A des cordes, vers ce point D, une partie quelconque AD, autour de laquelle, comme diagonale, soit fait un parallélogramme rectangle quelconque AEDF, dont le côté AF soit de même la diagonale d'un autre parallélogramme aussi rectangle quelconque

ACFB fait sur un plan perpendiculaire à celui du précédent parallélogramme AEDF.

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant AB, AC, AE, les cordons des trois puissances demandées, & que suivant ces directions AP, AQ, AR, on leur applique trois puissances P, Q, R, qui soient à la donnée K, comme les côtes correspondans AB, AC, AE, des parallélogrammes CB, EF, sont à la diagonale AD du second EF; ces trois puissances P, Q, R, seront les trois demandées, & leurs directions AP, AQ, AR, seront aussi les trois requises, c'est-à-dire (ainsi qu'on le demande) que,

I. Ces trois puissances P, Q, R, ainsi dirigées, seront équilibre avec la donnée K de direction donnée AK; &

II. Chacune des trois directions AP, AQ, AR, de ces trois puissances P, Q, R, sera perpendiculaire à chacune des deux autres.

DEMONSTRATION.

PART. I. Cette part. I. se démontrera de même que la solution du précédent Problème 10. car puisque (*solut.*) les puissances P, Q, R, K, sont entr'elles en raison des lignes AB, AC, AE, AD, suivant lesquelles elles sont appliquées au nœud commun A de leurs cordons ainsi dirigez; le parallélogramme AEDF fait de la proportionnelle AE, & de la diagonale AF du parallélogramme ABFC fait des deux proportionnelles AB, AC, fera ici le dernier des parallélogrammes fait comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la démonstration de la part. 2. du Th. 4. & la puissance donnée K suivant AK, fera ici aux trois autres P, Q, R, comme la diagonale AD (en ligne droite avec AK) de ce dernier parallélogramme AEDF, est à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th. 4. part. 2.*) il y aura ici équilibre entre ces quatre puissances. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Il s'agit présentement de faire voir que chacune des trois directions AP, AQ, AR, est perpendiculaire à chacune des deux autres: ce qui est aisé; car il est

déjà évident que les deux AP, AQ, sont perpendiculaires entr'elles; puisque (*solut.*) le parallélogramme CB est rectangle. Il ne reste donc plus qu'à faire voir que la direction AR est aussi perpendiculaire à chacune de ces deux AP, AQ: ce qui est encore évident, car puisque les parallélogrammes CB, EF, sont (*solut.*) en plans perpendiculaires entr'eux, & que le second EF est rectangle, son côté AE perpendiculaire à leur section commune AF, le sera aussi à chacun des côtes AB, AC, de l'autre parallélogramme CB. Donc chacun de ces trois côtes AB, AC, AE, de ces deux parallélogrammes CB, EF, est perpendiculaire à chacun des deux autres; & conséquemment chacune des trois directions AP, AQ, AR, des trois puissances P, Q, R, dirigées (*solut.*) suivant ces trois côtes AB, AC, AE, est aussi perpendiculaire à chacune des deux autres. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PROBLEME XII.

Toutes choses étant ici les mêmes que dans le précédent Problème I I. excepté qu'on veut ici que les trois puissances qui y sont demandées, soient égales entr'elles: on demande ici ces trois puissances égales avec leurs trois directions, telles que ces trois puissances y fassent équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & que chacune de ces trois directions y soit encore perpendiculaire à chacune des deux autres.

FIG. 346.

SOLUTION.

D'un diamètre AD pris à volonté depuis le nœud A des quatre cordons sur le prolongement vers D de la direction donnée AK de la puissance donnée K, soit fait un demi-cercle AFD rencontré en F par une perpendiculaire GF à ce diamètre, menée de l'extrémité G de sa partie $AG = \frac{2}{3} AD$; menez-y les cordes AF, DF: & après avoir achevé le parallélogramme rectangle AFDE, soit son côté AF la diagonale d'un quarré CB fait dans un plan perpendiculaire à celui de ce parallélogramme EF.

Sfij

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant AB, AC, AE, les cordons AP, AQ, AR, des trois puissances demandées, & que suivant ces directions on leur applique trois puissances égales P, Q, R, dont chacune soit à la donnée K, comme AB à AD; ces trois puissances P, Q, R, feront les demandées, qui ainsi dirigées, feront ensemble équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & auront aussi chacune de leurs trois directions AP, AQ, AR, perpendiculaire aux deux autres: le tout ainsi qu'on le demande.

D E M O N S T R A T I O N.

Pour voir tout cela, il faut d'abord démontrer que les trois côtes AB, AC, AE, des parallelogrammes CB, EF, sont ici égaux entr'eux. Pour cela il faut considérer que puisque (*solut.*) $AG = \frac{2}{3} AD$, l'on aura $\overline{AF}^2 = \frac{2}{3} \overline{AD}^2$, & $\overline{DF}^2 = \frac{1}{3} \overline{AD}^2$: ainsi le quarré CB rendant $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, & $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2$, l'on aura pareillement ici $\overline{AB}^2 = \frac{1}{3} \overline{AD}^2$, & $\overline{BF}^2 = \frac{1}{3} \overline{AD}^2$. Donc $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{DF}^2$; & conséquemment $AB = BF = DF$. Or les parallelogrammes (*solut.*) CB, EF, rendent $BF = AC$, & $DF = AE$. Donc aussi $AB = AC = AE$. Or (*solut.*) chacune des trois puissances égales P, Q, R, est à la donnée K, comme AB à AD. Donc ces trois puissances P, Q, R, sont à cette donnée K, comme les trois côtes correspondans des parallelogrammes CB, EF, sont à la diagonale AD du dernier EF. Par conséquent les plans de ces deux parallelogrammes CB, EF, se coupant ici (*solut.*) perpendiculairement en EF comme dans la solution du precedent Probl. 11. Fig. 345. l'on démontrera ici comme là que ces trois puissances égales P, Q, R, feront ensemble équilibre ici avec la donnée K, & suivant des directions AP, AQ, AR, dont chacune sera perpendiculaire aux autres. *Ce qu'il falloit ici démontrer.*

PROBLEME XIII.

En general tant de puissances qu'on voudra P, Q, R, S, T, K , &c. étant données en raison des lignes quelconques AB, AC, AE, AF, AG, AD , &c. les appliquer à autant de cordons, & les diriger de maniere qu'elles fassent toutes équilibre entr'elles. Fig. 347.

SOLUTION.

D'un point quelconque A soient menées à volonté, c'est-à-dire, suivant tels angles, & suivant tels plans qu'on voudra, autant de lignes (moins deux) qu'il y a de puissances données; sçavoir, AP, AQ, AR, AS , &c. sur deux quelconques AP, AQ , de ces lignes soient prises deux quelconques AB, AC , des proportionnelles données aux puissances proposées: après en avoir fait le parallelogramme $BACM$ de sa diagonale AM , & d'une troisième proportionnelle quelconque AE , prise sur une troisième quelconque AR des lignes menées du point A , soit aussi fait le parallelogramme $MAEH$; de la diagonale AH de ce parallelogramme, & d'une quatrième proportionnelle AF donnée, prise sur une quatrième quelconque AS des lignes menées du point A , soit pareillement fait le parallelogramme $HAFL$; & ainsi de suite jusqu'à la dernière inclusivement des lignes d'abord menées du point A , c'est-à-dire (*constr.*) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux des proportionnelles aux puissances données, sçavoir, AG, AD . Après sur la diagonale par A du dernier des parallelogrammes ainsi faits, c'est-à-dire, ici sur AL , soit fait le triangle ADL , dont les côtez LD, AD , soient égaux aux deux proportionnelles restantes AG, AD , sçavoir, en faisant des centres L, A , & de rayons égaux à ces deux proportionnelles restantes AG, AD , deux arcs de cercles qui se coupent en D dans un plan quelconque; soit ensuite menée AT parallele à LD , & AK sur DA prolongée vers K .

Cela fait, je dis que si l'on met le nœud commun des

cordes en A, & qu'après les avoir dirigées suivant AP, AQ, AR, AS, AT, AK, &c. on leur applique les puissances données P, Q, R, S, T, K, &c. Toutes ces puissances ainsi dirigées demeureront en équilibre entr'elles sur le nœud commun de leurs cordons. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Suivant la construction précédente (en achevant le parallelogramme ALDG) les lignes AB, AC, AE, AF, AG, AD, &c. dans les parallelogrammes précédens sont entr'elles comme les puissances données P, Q, R, S, T, K, &c. Et ALDG est ici le dernier de ces parallelogrammes, en qui la puissance K est ainsi à chacune des autres P, Q, R, S, T, comme la diagonale AD de ce dernier ALDG de tous ces parallelogrammes est à chacun de leurs côtez AB, AC, AE, AF, AG, correspondans sur les directions de ces puissances. Donc (*Th. 4. part. 4.*) ces puissances ainsi dirigées, seront ici toutes en équilibre entr'elles; & ainsi de tel autre nombre qu'on pût ainsi proposer. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

I. On voit que s'il n'y avoit ici que trois puissances données L, T, K, il n'y auroit qu'à faire le triangle ALD, dont les trois côtez AL, LD, AD, fussent entr'eux comme ces trois puissances; à mener ensuite AT parallele à LD, & à prolonger DA vers K: les trois puissances données L, T, K, appliquées à trois cordons attachez ensemble par un nœud commun, & dirigées suivant AL, AT, AK, demeureroient en équilibre entr'elles suivant ces directions, conformément à la solution du Probl. 2.

II. S'il n'y avoit que quatre puissances données H, S, T, K, il n'y auroit qu'à faire d'un angle quelconque HAF le parallelogramme AHLF, dont les côtez AH, AF, fussent entr'eux comme deux quelconques H, S, des puissances données: ensuite sur la diagonale AL de ce pa-

rallelogramme, faire le triangle ALD , dont les côtes LD, DA , fussent à AF comme les deux autres puissances données T, K , sont à la puissance F : après cela mener AT parallèle à LD , & prolonger DA vers K . Cela fait, il suit de la solution précédente que les quatre puissances données H, S, T, K , étant appliquées à autant de cordons d'une même corde, dirigez suivant AH, AS, AT, AK , y demeureront en équilibre entr'elles comme les quatre du précédent Probl. 10. & ainsi de tel autre plus grand nombre qu'on voudra de puissances données quelconques.

COROLLAIRE II.

De ce que les directions, moins deux, des puissances données en plus grand nombre que trois, ont été prises arbitrairement dans la solution précédente; & de ce que ces directions arbitraires (moyennant les proportionnelles prises sur elles) déterminent les deux restantes dans cette solution: il suit de cette même solution que les mêmes puissances données en raisons quelconques, peuvent faire équilibre entr'elles suivant une infinité de directions différentes pour chacune. Puisque quelles qu'on les prenne, moins deux, elles détermineront toujours ces deux-là, & différentes en autant de manières qu'elles le feront elles-mêmes, sans cependant empêcher les puissances données en plus grand nombre que trois, de faire équilibre dans toutes ces directions, ainsi que le prouve l'assomption arbitraire de celles-là dans la solution précédente. Mais dès qu'il ne s'agit que de trois puissances données, le Corol. du Th. 1. le Probl. 2. & l'art. 1. du précédent Corol. prouvent qu'elles ne peuvent ainsi faire équilibre entr'elles, que suivant une seule direction chacune.

SCHOLIE.

Il est à remarquer que quelques arbitraires que soient (*solut. & Corol. 2.*) les directions de plus de trois puissances données qu'on veut mettre en équilibre entr'elles en

les appliquant seulement à autant de cordons attachez ensemble par un nœud commun ; cette liberté de varier ces directions a cependant des limites que voici dans les articles suivans.

1°. Si les cordons de directions données sont en même plan, ils doivent être répandus en plus d'un demi-cercle, dont le centre soit le nœud commun des cordons, autrement l'équilibre seroit impossible. (*Corol. 2. Lem. 4.*)

2°. Si les cordons de directions données ne sont pas en même plan, ils doivent être répandus en plus d'une demi-sphère, dont le centre soit le nœud commun des cordons. (*Corol. 2. Lem. 4.*)

PROBLEME XIV.

Fig. 348.
349.

Les directions AB, AC, AD, AE, de quatre cordons attachez ensemble par un seul nœud A, étant données ; trouver quatre puissances B, C, D, E, qui appliquées à ces quatre cordons, feroient équilibre entr'elles suivant ces directions données.

SOLUTION.

Je dis que ce Problème peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impossible. Car ou les quatre cordons de directions données sont en plans différens, ou tous en même plan. Or je vas faire voir que dans le premier de ces deux cas le Problème est toujours déterminé ou impossible, & que dans le second il est toujours indéterminé ou impossible. Donc, &c. Voici la démonstration de ces deux dernières propositions avec la solution du Problème lorsqu'il est possible.

CAS I.

Lorsque les quatre cordons de directions données , sont en plans differens , le Probleme est toujours déterminé ou impossible.

Voici la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les quatre cordons de directions données en plans differens , sont répandus en plus d'une demi-sphere, dont leur nœud commun soit le centre; le Probleme est toujours possible.

II. Qu'alors il est toujours déterminé.

III. Que lorsque ces quatre cordons de directions données en differens plans, ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere; le Probleme est toujours impossible.

PART. I. Puisque (*Hyp.*) les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, sont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, dont leur nœud commun A est le centre; & que si deux ou trois de ces cordons étoient dans un plan, & les deux autres ou le quatrième hors de ce plan d'un seul côté de lui, ils ne seroient tous répandus que dans une demi-sphere terminée par ce plan de deux ou trois cordons: il est manifeste que les quatre ne peuvent être ici que deux à deux dans chaque plan, & de maniere (*Lem. 5. part. 3.*) que le plan de deux de ces cordons, prolongé par de-là leur nœud commun A, passera toujours ici à travers l'angle que les deux autres cordons y font entr'eux. Donc le plan BAE des deux cordons AB, AE, doit passer ici par de-là le nœud A, à travers l'angle CAD que les deux autres cordons AC, AD, font entr'eux; & reciproquement le plan CAD de ces deux-ci doit passer de même à travers l'angle BAE des deux autres: de sorte que la section commune RAP de ces deux plans BAE, CAD, divisera toujours ici chacun des deux angles de ces noms en quelque rapport déterminé que ce soit. Cela posé,

SOLUTION. I.

Fig. 348.

D'un point quelconque F pris à volonté depuis A vers P sur la droite RAP, dans l'angle CAD : soient menées trois autres droites FK, FL, FG, parallèles à AD, AC, AE, déterminées (*Hyp.*) de position. Les deux premières FK, FL, formeront sur le plan CAD un parallélogramme ALFK, dont la diagonale AF prise (*Hyp.*) à volonté, & déterminée aussi (*Hyp.*) de position, déterminera de grandeur les côtes AK, AL, sur AC, AD; & la troisième FG dans le plan BAE, déterminera aussi de grandeur AG sur BA prolongée vers Q : de sorte que GH parallèle à AE, déterminera pareillement AH de grandeur sur AE. Donc on aura ainsi AK, AL, AG, AH, déterminées non seulement (*Hyp.*) de position, mais aussi de grandeur; & par conséquent les rapports de ce quatre lignes entr'elles, seront ainsi déterminez & connus.

Cela étant, je dis que si l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, autant de puissances B, C, D, E, qui soient entr'elles dans les rapports connus des lignes correspondantes AG, AK, AL, AH; ces quatre puissances ainsi dirigées feront équilibre entr'elles, & retiendront ainsi en repos (les unes contre les autres) le nœud libre A, qui tient tous leurs cordons attachez ensemble.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) les deux puissances C, D, sont entr'elles comme les côtes correspondans AK, AL, du parallélogramme KL, il resultera (*Lem. 2.*) de leur concours d'action sur le nœud A une force ou impression de A vers P suivant AP ou AF, laquelle sera à chacune de ces deux puissances C, D, comme cette diagonale AF du parallélogramme KL, est à chacun de ses côtes correspondans AK, AL : de sorte que si l'on appelle P cette nouvelle force suivant AF ou AP, l'on aura ici $P : C :: AF : AK$. Or (*Hyp.*) $C : E :: AK : AH$. Donc $P : E :: AF : AH$. c'est-à-

dire, les deux forces P, E , entr'elles comme les côtez correspondans AF, AH , du parallelogramme $AFGH$. Donc (*Lem. 2.*) du concours d'action de ces deux forces P, E , sur le nœud A , il lui en resultera aussi une de A vers G suivant la diagonale AG du parallelogramme FH , laquelle sera à chacune de ces deux-là P, E , comme cette diagonale AG à chacun des côtez correspondans AF, AH : de sorte qu'en appellant aussi Q cette nouvelle force suivant AG ou AQ , l'on aura ici $Q. E :: AG. AH$. Donc ayant aussi (*Hyp.*) $B. E :: AG. AH$. l'on aura ici les deux forces Q, B , égales entr'elles: ainsi ces deux forces étant (*Hyp.*) directement opposées, elles feront équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force Q suivant AG , est l'effort que les deux puissances E, P , font ensemble sur le nœud A contre la puissance B . Donc ces trois puissances E, P, B , feront pareillement ici en équilibre entre-elles. Or on vient de voir aussi que la force P suivant AF , est l'effort que les deux puissances C, D , font ensemble sur le nœud A contre les deux puissances E, B . Donc les quatre puissances B, C, D, E , feront ici en équilibre entr'elles suivant les directions données AB, AC, AD, AE .
Ce qu'il falloit trouver & démontrer.

S O L U T I O N II.

Les directions des quatre cordons AB, AC, AD, AE , Fig. 349.
 étant données ici les mêmes que dans la précédente solution. 1. la section commune RAP des deux plans BAE, CAD , donnez (*Hyp.*) de position, sera aussi de position déterminée ici comme là dans l'un & dans l'autre de ces deux plans, aussi-bien que (*Hyp.*) les directions AB, AE , dans le premier BAE ; & AC, AD , dans le second CAD : de sorte que cette section commune RAP divisera ici comme là chacun des angles BAE, CAD , en quelque rapport déterminé que ce soit. Donc en prenant de part & d'autre depuis A vers P, R , deux parties égales quelconques AF, AM , sur cette section commune RAP , autour desquelles (comme diagonales) soient faits deux pa-

rallelogrammes KL sur le plan CAD, & GH sur le plan BAE; leurs côtez AK, AL, AH, AG, qui sont autant de parties des directions AC, AD, AE, AB, de positions (*Hyp.*) déterminées, seront aussi déterminez de grandeur; & conséquemment entr'eux en des rapports déterminez & connus.

Je dis presentement que si l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, donnez (*Hyp.*) de position, autant de puissances B, C, D, E, qui soient entr'elles comme les quatre côtez connus AG, AK, AL, AH, des deux parallelogrammes GH, KL; ces quatre puissances seront encore ici en équilibre entr'elles suivant ces directions données.

D E M O N S T R A T I O N .

Le Lemme 1. fait encore voir que du concours d'action des deux puissances C, D, sur le nœud A, il resultera à ce nœud une force ou impression de A vers F suivant AF, équivalente à ce concours d'action de ces deux puissances sur ce nœud A, laquelle force suivant AF sera à chacune de ces deux puissances C, D, comme cette diagonale AF du parallelogramme KL, sera à chacun de ses côtez correspondans AK, AL: & que du concours d'action des deux autres puissances B, E, sur le même nœud A, il resultera pareillement à ce nœud une force ou impression de A vers M suivant AM, équivalente aussi à ce concours d'action de ces deux autres puissances sur ce nœud A, laquelle force suivant AM sera de même à chacune de ces deux puissances B, E, comme cette diagonale AM du parallelogramme GH, sera à chacun de ses côtez correspondans AG, AH. Donc si ces deux forces ou impressions directement contraires suivant AF ou AP, & suivant AM ou AR, l'on appelle la premiere P, & la seconde R; l'on aura ici $P. C :: AF. AK$. Et $B. R :: AG. AM$. avec (*Hyp.*) $C. B :: AK. AG$. Ce qui (en multipliant par ordre) donnera $P. R :: AF. AM$. De sorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AF égale à AM, & en ligne droite avec elle, l'on

aura aussi les forces P, R , égales entr'elles, & directement opposées l'une à l'autre. Donc elles seront ici en équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force P suivant AF est l'effort que les deux puissances C, D , font ensemble sur le nœud A ; & que la force R suivant AM , est pareillement l'effort que les deux autres puissances B, E , font aussi ensemble sur le même nœud A . Donc l'effort que les deux puissances C, D , font ensemble sur le nœud A , est ici égal & directement opposé à l'effort que les deux autres puissances B, E , font aussi ensemble sur ce nœud. Par conséquent ces quatre puissances B, C, D, E , seront encore ici en équilibre entr'elles suivant les directions données AB, AC, AD, AE . *Ce qu'il falloit encore trouver & démontrer.*

PART. II. Telle est (*part. I.*) la possibilité & la solution du Problème proposé, lorsque les quatre cordons de directions données en différens plans, sont répandus en plus d'une demi-sphère. Je dis présentement que ce Problème est alors déterminé aux rapports des puissances que l'on y vient d'assigner.

D E M O N S T R A T I O N.

On vient de voir au commencement de la *part. I.* que les quatre cordons AB, AC, AD, AE , de directions ici données, sont en deux plans différens BAE, CAD , dont la section commune RAP divise toujours chacun des angles BAE, CAD ; & que ces deux plans étant ainsi donnez de position l'un par rapport à l'autre, cette section commune RAP , qu'ils font entr'eux, est aussi déterminée de position par rapport aux côtes AB, AE, AC, AD , de ces deux angles, lesquels sont ainsi divisez par elle en parties déterminées, qui conséquemment déterminent les rapports des diagonales AF, AG , aux côtes de leurs parallélogrammes KL, FH , dans la *part. I. solut. 1.* Fig. 348. ou des diagonales AF, AM , aux côtes de leurs parallélogrammes KL, GH dans la même *part. I. solut. 2.* Fig. 349. Donc ces directions AB, AC, AD, AE , don-

Fig. 348.
349.

nées (*Hyp.*) les mêmes dans l'une & dans l'autre de ces deux solutions, y déterminent ainsi les rapports de leurs parties (employées à ces parallelogrammes) AG , AK , AL , AH , à être toujours les mêmes pour les mêmes directions. Par conséquent ces rapports étant (*part. 1. solut. 1. 2.*) les requis des quatre puissances B , C , D , E , qu'on vient de démontrer (*part. 1.*) devoir faire équilibre entr'elles suivant ces quatre directions données AB , AC , AD , AE ; les quatre puissances propres à faire équilibre entr'elles suivant ces directions, seront toujours déterminées à ces mêmes rapports, tant que ces directions seront les mêmes. Donc ce cas 1. de la question proposée, est un Problème déterminé aux rapports des puissances qu'on vient d'assigner (*part. 1. solut. 1. 2.*) pour faire équilibre entr'elles suivant les directions données, sans qu'aucun autre rapport de puissances ainsi dirigées y puisse satisfaire: ces rapports des quatre grandeurs AG , AK , AL , AH , proportionnelles aux quatre puissances B , C , D , E , requises pour cela, étant les mêmes dans les solut. 1. 2. de la part. 1. dans lesquelles, si l'on prend AF la même de part & d'autre, ces quatre grandeurs seront aussi les mêmes. Donc en ce cas-ci de quatre cordons de directions données, & répandus en plus d'une demi-sphere, dont leur nœud commun est le centre, le Problème est toujours déterminé. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

PART. III. Cette part. 3. est que lorsque les quatre cordons de directions données en differens plans, ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere; le Problème est impossible. Cela se trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CAS II.

Lorsque les quatre cordons de directions données sont tous en même plan, le Probleme est toujours indéterminé ou impossible.

Voici aussi la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les quatre cordons de directions données en même plan, sont répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème est toujours possible.

II. Qu'alors il est toujours indéterminé.

III. Et que lorsque les quatre cordons de directions données en même plan, ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème est toujours impossible.

PART. I. Pour ne pas multiplier inutilement les Figures, supposons présentement que les quatre cordons AB, AC, AD, AE, des Fig. 348. 349. regardées ci-dessus (*cas I.*) comme en plans différens, sont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Suivant cette hypothèse, la ligne RAP, qui étoit-là une section commune de deux plans, ne sera plus ici qu'une simple ligne droite, laquelle y soit menée au hazard sur le plan des cordons par leur nœud commun A, à travers quelque'un BAE de leurs angles, sans passer le long d'aucun de ces cordons. la part. 2. du Lem. 5. fait voir que cette droite RAP divisera encore quelque'autre angle CAD de ces mêmes cordons; & la part. 1. du même Lem. 5. fait pareillement voir que chacun de ces cordons prolongé par de-là leur nœud commun A, par exemple, BA prolongé vers Q dans la Fig. 348. divisera aussi quelque'un DAE de leurs angles.

SOLUTION.

1°. Cela posé, si dans la présente hypothèse des Fig. 348. 349. l'on fait en même plan les parallélogrammes

KL, FH, dans la Fig. 348. & KL, GH, dans la Fig. 349. de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans les solut. 1. 2. de la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données, autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, qui soient encore ici entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, AH, de leurs directions: on démontrera ici que ces quatre puissances y demeureront en équilibre entr'elles suivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle: comme on a démontré là que les quatre puissances qu'on y a assignées, y devoient demeurer en équilibre suivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-sphere. Donc le Problème est toujours possible ici comme là. *Ce qu'il falloit 1°. trouver & démontrer.*

Fig. 350.

2°. Si l'on veut que deux des quatre cordons de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, par exemple, les deux AC, AE, soient ici en ligne droite CE, qui divise (Lem. 5. part. 1.) l'angle BAD, que les deux autres AB, AD, font entr'eux: il n'y a qu'à faire sur une partie quelconque AK de AC, comme diagonale, un parallelogramme GL de côtez AG, AL, pris sur AB, AD; & après avoir ajouté à cette diagonale AK une partie quelconque KH du même cordon AC, appliquer aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, qui soient entr'elles comme AG, KH, AL, AH. Cela fait, je dis que ces quatre puissances ainsi dirigées, seront encore ici en équilibre entr'elles.

D E M O N S T R A T I O N.

De ce que (Hyp.) $B. D. :: AG. AL.$ il suit du Lem. 1. que du concours de ces deux puissances B, D, il resultera au nœud A une force ou impression de A vers C suivant AC, laquelle sera à chacune de ces deux puissances B, D, comme la diagonale AK du parallelogramme

me GL à chacun de ses côtez correspondans AG, AL ; & conséquemment que si l'on appelle K cet effort commun des puissances B, D, suivant AK, l'on aura ici K. B :: AK. AG. Or (Hyp.) B. C :: AG. KH. Donc K. C :: AK. KH. Et $K + C. C :: AK + KH (AH) : KH$. Or (Hyp.) C. E :: KH. AH. Donc $K + C. E :: AH$. AH. c'est-à-dire, $K + C = E$. Or on vient de voir que K est l'effort que les deux puissances B, D, font ensemble de A vers C suivant AC sur le nœud A, dans le sens que la puissance C le tire ; d'où il résulte que $K + C$ est tout ce que ces trois puissances B, D, C, font ensemble d'effort sur le nœud A contre la puissance E qui le tire directement (Hyp.) à contre-sens de cet effort commun $K + C$. Donc ayant déjà $K + C = E$, cette puissance E fera ici directement contraire & égale à tout ce que les trois autres B, C, D, font ensemble d'effort sur le nœud A. Par conséquent ces quatre puissances B, C, D, E, doivent encore ici demeurer en équilibre entr'elles suivant les directions AB, AC, AD, AE, qui y sont données. *Ce qu'il falloit aussi démontrer.*

3°. Si les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, étoient deux à deux en lignes droites, qui fussent, par exemple, BD, CE : il est visible qu'en appliquant deux puissances égales quelconques B, D, aux deux cordons AB, AD ; & deux autres aussi quelconques égales C, E, aux deux autres cordons AC, AE : ces quatre puissances demeureroient ici en équilibre entr'elles, quelque fût le rapport de chacune des deux premières B, D, à chacune des deux dernières C, E. *Ce qui est tout ce qui restoit ici à faire voir.*

Donc (art. 1. 2. 3.) quelques soient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, d'un centre qui seroit le nœud commun A de ces quatre cordons ; le Problème proposé sera toujours possible & résolu, comme dans ces art. 1. 2. 3. *Ce qui est*

FIG. 351.

FIG 348;
349. 350.
351.

tout ce qu'il falloit faire & démontrer dans cette part. 1. de cas 2.

PART. II. Il s'agit presentement de faire voir que ce Problème de quatre cordons de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, de leur nœud commun comme centre, est toujours indéterminé. Pour cela il est à considérer que,

FIG. 348.
349.

1°. La liberté qu'on a eue dans l'art. 1. de la part. 1. Fig. 348. 349. de mener à volonté par le nœud A, sur le plan de ces quatre cordons AB, AC, AD, AE, la ligne droite RAP à travers de leurs angles BAE, CAD, pouvant diversifier à l'infini les rapports entr'elles des quatre droites AG, AK, AL, AH; & conséquemment aussi ceux des quatre puissances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part. 1. art. 1.*) devoir toujours demeurer en équilibre entr'elles suivant ces directions, tant que ces quatre puissances sont entr'elles en raison de ces quatre lignes correspondantes: il suit de-là qu'une infinité de puissances quatre à quatre, dans des rapports tout differens & varieés à l'infini, pourront ici faire équilibre entr'elles suivant les mêmes directions données: & conséquemment que le cas 2. de la question proposée, est ici un Problème indéterminé. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

FIG. 350.

2°. Quoique dans l'art. 2. de la part. 1. Fig. 350. le rapport de AG à AL soit déterminé par les positions données de AB, AD, & de la droite CAE en même plan; cependant la liberté qu'on a eue d'y prendre KH, & conséquemment aussi AH à volonté, pouvant diversifier à l'infini non seulement le rapport de AH à KH, mais encore les rapports de ces deux parties du cordon AC aux deux AG, AL, des cordons AB, AD; il suit de-là que les rapports entr'elles des quatre parties AG, KH, AL, AH, de ces cordons sont variables à l'infini: & conséquemment aussi les rapports des quatre puissances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part. 1. art. 2.*) devoir toujours ici demeurer en équilibre entr'elles, tant qu'elles y seront entr'elles comme ces quatre parties correspondantes des

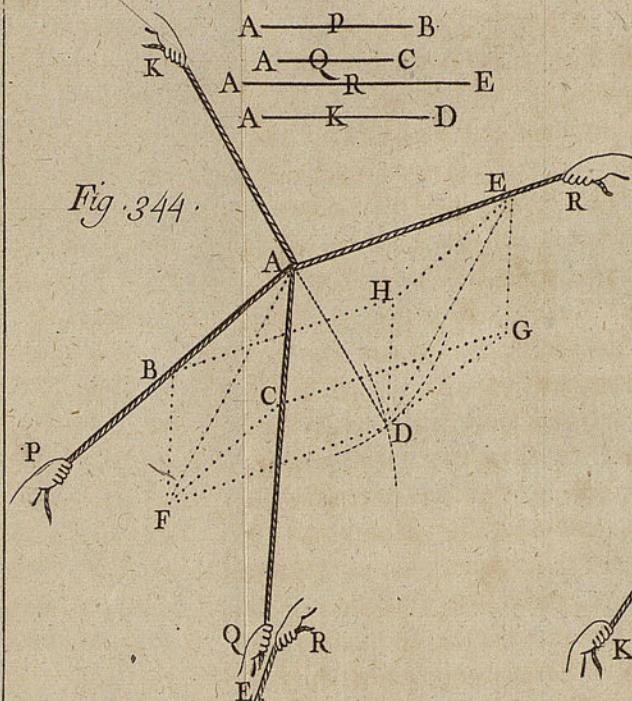


Fig. 344.

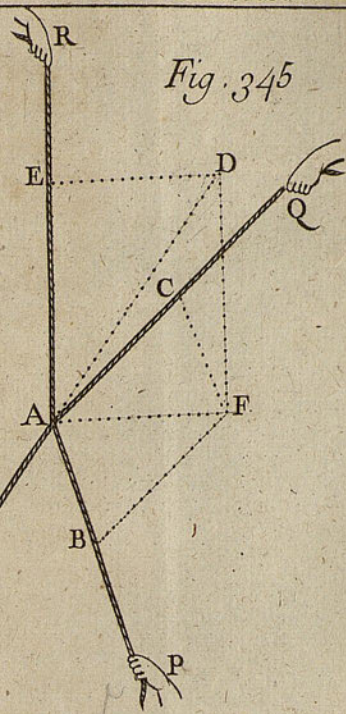


Fig. 345.

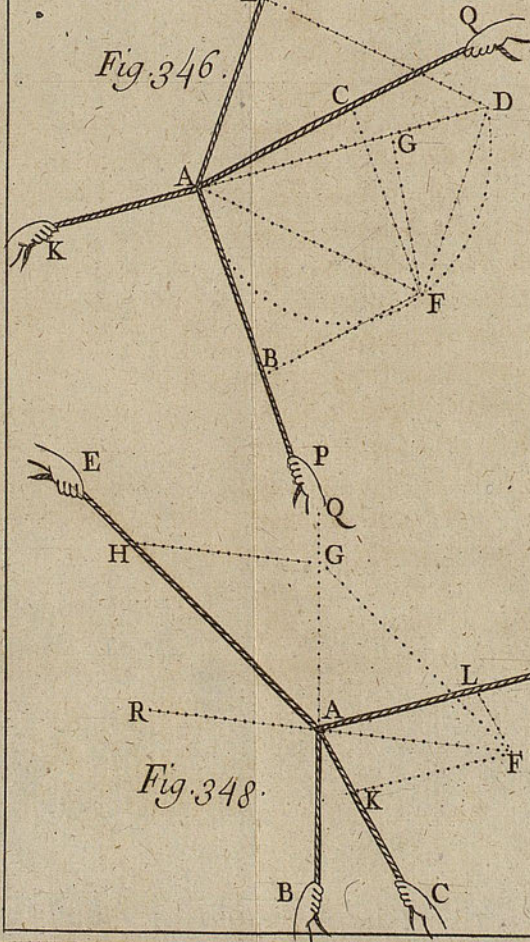


Fig. 346.

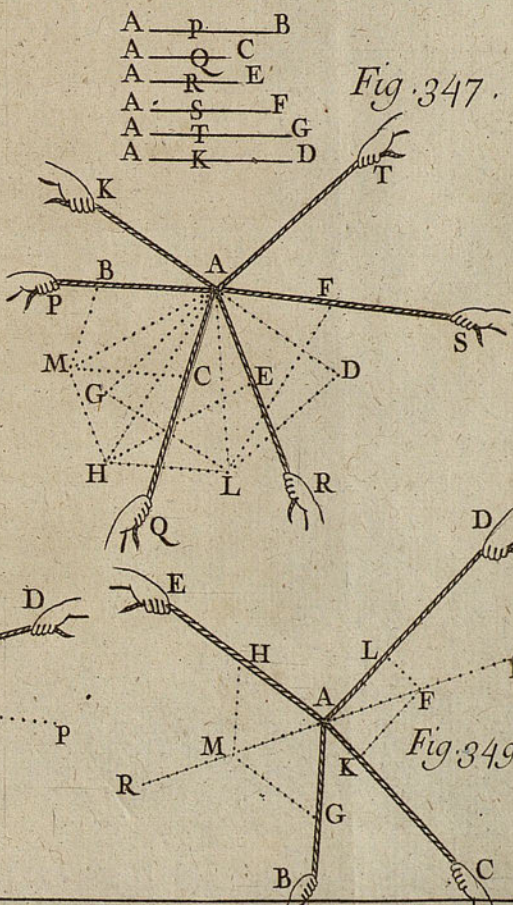


Fig. 347.

Fig. 348.

Fig. 349.

cordons AB, AC, AD. Donc une infinité de puissances quatre à quatre, pourront encore ici faire équilibre entr'elles suivant les mêmes directions AB, AC, AD, AE, qui y sont données en même plan, & de quatre cordons répandus en plus d'un demi-cercle. Par conséquent le cas 2. de la question proposée, est encore ici un Problème indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

3°. Dans l'art. 3. de la part. 1. Fig. 351. quoiqu'il y soit requis pour l'équilibre entr'elles des quatre puissances B, C, D, E, suivant les directions qui y sont données (*Hyp.*) en lignes droites deux à deux, que les deux directement opposées de ces puissances, telles qui y sont (*Hyp.*) B à D, & C à E, soient ainsi deux à deux égales entr'elles : sçavoir, $B=D$, & $C=E$; cependant chacun de ces deux couples de puissances égales y étant à volonté, le rapport de chacune du premier couple à chacune du second, y est encore variable à l'infini. Par conséquent une infinité de puissances quatre à quatre, en des rapports differens à l'infini, pourront encore ici faire équilibre entr'elles suivant les quatre directions qui y sont données. Donc le cas 2. de la question proposée, est encore ici un Problème indéterminé. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

Fig. 351

Donc (*art. 1. 2. 3.*) quelques soient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, d'un centre qui seroit le nœud commun A de ces quatre cordons; le Problème proposé sera toujours indéterminé. *Ce qui est tout ce qu'il falloit démontrer dans cette part. 2. du cas 2.*

PART. III. Cette partie 3. est que lorsque les quatre cordons de directions données toutes en même plan, ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème est impossible. Cela se trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques soient les directions données de quatre

cordons attachez ensemble par un seul & même nœud, auxquels il s'agit d'appliquer quatre puissances (une à chacun) qui fassent équilibre entr'elles suivant les directions données; le Problème peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impossible: savoir,

1°. Déterminé (*part. 1. 2. du cas 1.*) lorsque les quatre cordons de directions données sont en des plans différens, & répandus en plus d'une demi-sphère.

2°. Indéterminé (*part. 1. 2. du cas 2.*) lorsque ces quatre cordons sont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

3°. Enfin impossible (*part. 3. des cas 1. 2.*) lorsque ces quatre cordons de directions données, sont en des plans différens sans être répandus en plus d'une demi-sphère, ou tous en même plan, sans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'est-là tout ce qu'il s'agissoit de trouver & de démontrer dans le Problème proposé.

PROBLEME XV.

Fig. 352

353: 354

Soient à volonté les directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF , attachez tous ensemble par un seul & même nœud A : on demande cinq puissances, qui appliquées à ces cinq cordons, une à chacun, fassent toutes ensemble équilibre entr'elles.

SOLUTION.

Je dis que ce Problème est toujours indéterminé ou impossible, soit que les directions données soient en plans différens, ou toutes en même plan.

C A S I.

Lorsque les cinq directions données sont en plans différens, le Probleme est toujours indéterminé ou impossible.

Voici la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les cinq cordons de directions données en plans differens, sont répandus en plus d'une demi-sphere, dont leur nœud commun soit le centre; le problème est toujours possible.

II. Qu'alors il est toujours indéterminé.

III. Que lorsque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere; le Problème est toujours impossible.

PART. I. Puisque (*Hyp.*) les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, sont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, il n'y en peut avoir en même plan, d'un seul côté duquel tous les autres se trouvent: autrement ils ne feroient tous répandus que dans une demi-sphere terminée par ce plan; ce qui est contre l'hypothese. Donc de ces cinq cordons il y en aura toujours deux seuls en même plan, & les trois autres de part & d'autre de ce plan, qui prolongé passera entr'eux. Soient AB, AE, les deux se trouvent seuls dans un plan BAE: la part. 3. du Lem. 5. fait voir que quelque soit ici la disposition des trois autres cordons AC, AD, AF, ce plan BAE prolongé par de-là le nœud commun A de tous, passera toujours à travers ces trois-ci, par exemple, suivant AO; & que ce plan BEAO aura toujours d'un côté de lui (que j'appelle le *dessus*) deux AD, AF, de ces trois autres cordons, & de l'autre côté (que j'appelle le *dessous*) le troisième AC: & soit que ce cordon AC soit, ou non, en ligne droite avec un des deux autres AD, AF; ils feront toujours entr'eux pour le moins deux angles DAF, CAF, ou DAF, CAD. Cela posé,

Sur le plan DAF dans l'angle de ce nom, soit la droite AS de grandeur & de position arbitraires, laquelle fasse un angle quelconque SAC avec le cordon AC; ce qui ne pourra être autrement, si les trois AC, AD, AF, sont en plans differens; & ce qui sera toujours possible, s'ils sont tous trois en même plan, puisque (*Hyp.*) AD ou AF fait un angle avec AC. Autour de cette diagonale AS soit le parallelogramme LM, de côtez AL, AM, pris sur les cordons AD, AF, supposez au-dessus du plan BEAO, au dessus duquel cette diagonale AS sera consequemment aussi. Ayant ainsi AS au-dessus de ce plan, & (*Hyp.*) AC au-dessous; il est visible que le plan SAC coupera celui-là en quelque section AP qui sera ainsi dans ces deux plans BEAO, SAC. Donc ST parallele à AC, rencontrera cette section commune AP en quelque point T, duquel si l'on mene TK parallele à AS, elle rencontrera aussi le cordon AC en quelque point K, & achevera ainsi sur le plan SACP le parallelogramme SK, dont la diagonale AT fera aussi dans le plan BEAOP des deux cordons AB, AE: desquels le cordon BA prolongé vers Q, fera consequemment rencontré en quelque point G par TG parallele à AE: de sorte que AE devant aussi être rencontrée en quelque point H par GH parallele à AP; l'on aura enfin dans ce plan BEAOP le parallelogramme HT, dont la diagonale AG fera (*Hyp.*) en ligne droite avec AB.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données en plans differens, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions: ces cinq puissances demeureront ici toutes en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) $F.D :: AL.AM$. le Lem. I. fait voir

que du concours d'action de ces deux puissances F, D , il resultera au nœud A une impression ou force (que j'appelle S) suivant AS , équivalente à l'effort commun de ces deux puissances F, D , sur ce nœud A : laquelle force S sera à chacune d'elles comme cette diagonale AS du parallélogramme ML sera à chacun de ses côtes correspondans AM, AL ; de sorte que l'on aura ici $S. C :: AS. AK$. Par conséquent (*Lem. 2.*) du concours d'action de ces deux forces S, C , sur ce nœud A , il lui en resultera une (que j'appelle T) suivant AT , équivalente à l'effort commun des trois F, D, C , sur ce nœud A : laquelle force T sera à la puissance C , comme cette diagonale AT du parallélogramme SK sera à son côté correspondant AK ; c'est-à-dire, $T. C :: AT. AK$. Or (*Hyp.*) $C. E :: AK. AH$. Donc $T. E :: AT. AH$. Par conséquent (*Lem. 2.*) du concours d'action de ces deux forces T, E , sur le nœud A , il lui en resultera une (que j'appelle G , suivant AG , équivalente à l'effort commun des quatre puissances F, D, C, E , sur ce nœud A ; laquelle force G sera à la puissance E , comme cette diagonale AG du parallélogramme TH sera à son côté correspondant AH ; c'est-à-dire, $G. E :: AG. AH$. Or on a aussi (*Hyp.*) $B. E :: AG. AH$. Donc $G=B$. Par conséquent ces deux forces égales G, B , étant (*Hyp.*) directement opposées, il y aura ici équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la première G est équivalente à tout l'effort que les quatre puissances C, D, E, F , font ensemble de A vers G suivant AG ou AQ sur le nœud A . Donc ces quatre puissances feront ici équilibre avec la cinquième B . *Ce qu'il falloit 1°. trouver & démontrer.*

PART. II. Si l'on considère que dans la précédente solution. part. I. la diagonale AS du parallélogramme LM , a été prise de grandeur & de position indéterminées, on verra que les côtes AL, AM , de ce parallélogramme sont aussi indéterminés de grandeur & de rapport non seulement entr'eux, mais encore avec AK, AH, AG . Donc les rapports entr'elles de ces cinq lignes $AG, AK,$

AL, AH, AM, sont variables à l'infini. Cependant on vient de démontrer (*part. 1.*) que cinq puissances B, C, D, E, F, en raison de ces cinq lignes, & appliquées chacune à chacun des cinq cordons correspondans AB, AC, AD, AE, AF, ainsi dirigez, feroient toujours équilibre entr'elles suivant ces directions données. Donc une infinité de puissances, cinq à cinq, en des rapports differens à l'infini, feroient ainsi équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions. Par conséquent le Problème est ici indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Si un des deux cordons AF, AD, supposez au-dessus du plan BAE, est dans ce plan, on se servira encore d'eux comme l'on vient de faire dans la part. 1. pour prouver comme là que le Problème est ici possible; & un raisonnement semblable à celui de la part. 2. prouvera aussi comme là qu'il est encore ici indéterminé.

PART. III. C'est ainsi (*part. 1. 2.*) que le Problème de cinq cordons de directions données en plans differens, est toujours indéterminé tant que ces cinq cordons se trouvent répandus en plus d'une demi-sphere dont leur nœud commun soit le centre. Il s'agit presentement de faire voir que ce Problème est toujours impossible, lorsque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere. C'est ce qui se trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & *ce qu'il falloit ici 3°. faire voir.*

C A S I I.

Lorsque les cinq directions données sont toutes en mesme plan, le Probleme est encore toujours indéterminé ou impossible.

Voici aussi la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les cinq cordons de directions données toutes en même plan, sont répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème est toujours possible.

II. Qu'alors il est toujours indéterminé.

III. Que lorsque les cinq cordons de directions données en même plan, ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème est toujours impossible.

PART. I. Supposons presentement que les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, des Fig. 352. 353. 354. regardez ci-dessus (*cas 1.*) comme en plans differens, sont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun A soit le centre; soit que ces cinq cordons ayent autant de directions différentes sur le plan commun, ou qu'ils'y en trouvent en lignes droites les uns avec les autres. Dans cette hypothese, où il n'y a plus de sections AO, AP, de plans differens, comme dans la part. 1. du cas 1. soient seulement les simples droites AS, AP, qui en faisant entr'elles un angle quelconque SAP sur le plan de ces cordons, en divisent les angles FAD, DAC, dans les Fig. 352. 353. ou FAD, FAC, dans la Fig. 354. en tels rapports qu'on voudra, & dont AS soit aussi prise de grandeur arbitraire.

SOLUTION I.

Si dans la presente hypothese l'on fait en même plan les parallelogrammes LM, SK, TH, de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions encore ici données, autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions: on démontrera ici que ces cinq puissances y demeureront en équilibre entr'elles suivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle; comme on a démontré là que les cinq puissances qu'on y a assignées, y devoient demeurer en équilibre suivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-sphere. Donc le Problème est toujours possible ici comme là. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

SOLUTION II.

FIG. 355.

Quelques soient les cinq directions ici données en même plan, des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, répandus en plus d'un demi-cercle, soit qu'il s'en trouve en lignes droites entr'eux, ou non; il est visible que des cinq il y en aura toujours quelqu'un qui ne fera en ligne droite avec aucun autre, & qui prolongé par de-là leur nœud comme A, en aura toujours deux de chaque côté de lui comme dans la Fig. 355. ou trois d'un côté, & un de l'autre comme dans la Fig. 356. Soit dans la Fig. 355. BA ce cordon qui prolongé vers Q ait ainsi AC avec AD d'un côté, & AE avec AF de l'autre, soit que ceux d'un côté soient en lignes droites, ou non, avec ceux de l'autre. Sur cette droite BAQ soient prises depuis A de part & d'autre, deux parties égales quelconques AG. AV: sur AV, & sur une partie quelconque AN de AG, comme diagonales, soient les parallélogrammes HL, MK, dont les côtes soient sur les cordons qui forment les angles que la droite BAQ divise en quelques rapports que ce soient.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties correspondantes NG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions; ces cinq puissances demeureront ici en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) $D.E::AL.AH.$ Et $C.F::AK.AM.$ Le Lem. 2. fait voir que du concours d'action des deux premières puissances D, E, sur le nœud A, il lui resultera une force ou impression (que j'appelle V) de A vers Q suivant AV ou AQ, laquelle force V fera à chacune de ces deux puissances D, E, comme cette diagonale AV du parallélogramme HL fera à chacun de ses côtes correspondans AL, AH; & que du concours d'action des deux

autres puissances C, F, sur le même nœud A, il lui resul-
tera pareillement une autre force ou impression directe-
ment contraire (que j'appelle N) de A vers B suivant
AB ou AN, laquelle force N fera aussi à chacune de ces
deux autres puissances C, F, comme cette diagonale AN
du parallélogramme MK fera à chacun de ses côtes cor-
respondans AK, AM: de sorte que l'on aura ici V. D
:: AV. AL. Et C. N :: AK. AN. Donc ayant (*Hyp.*) D.
C :: AL. AK. l'on aura aussi V. N :: AV. AN. Or venant
de trouver N. C :: AN. AK. Et ayant (*Hyp.*) C. B :: AK.
NG. l'on aura de même N. B :: AN. NG. Et conséquem-
ment N. N + B :: AN. AN + NG. (AG) Donc V. N + B
:: AV. AG. De sorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AV = AG, l'on
y aura aussi V = N + B. Donc N + B étant (ci-dessus)
l'effort total de A vers B suivant AB, résultant du con-
cours d'action des trois puissances C, F, B, sur le nœud A;
& V un effort directement contraire de A vers Q suivant
AQ sur le même nœud A, résultant du concours d'action
des deux autres puissances D, E, contre ces trois-là; ces
cinq puissances demeureront ici en équilibre entr'elles
suivant les directions qu'on y suppose données. *Ce qu'il fal-*
loit aussi démontrer.

S O L U T I O N I I I.

Ce Problème de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, Fig. 356.
de directions données toutes en même plan, & répandues
en plus d'un demi-cercle, se peut encore résoudre autre-
ment, en menant au hasard sur le plan de ces cordons,
& par leur nœud commun A, les droites RAP, AS,
dont la première RP divise deux DAE, BAC, de leurs
angles en quelques rapports que ce soient, & la seconde
AS divise un EAF de leurs autres angles en quelque rap-
port que ce soit aussi. Autour de AS (comme diagonale)
prise de grandeur aussi arbitraire que sa position l'est dans
l'angle EAF, soit le parallélogramme HM des côtes AH,
AM, pris sur ceux AE, AF, de cet angle. Du point S pa-
ralèlement à AD, soit menée SQ qui rencontre AR en Q;

duquel point Q soit aussi menée parallèlement à AS, la droite QL, qui rencontre AD en L, & acheve ainsi le parallélogramme SL, dont AQ est la diagonale. Ensuite de l'autre côté de A sur la droite RAP, soit prise AN=AQ, & sur cette diagonale AN soit fait le parallélogramme GK de côtéz AG, AK, pris sur AB, AC.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, de leur nœud commun A comme centre, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties AG, AK, AL, AH, AM, de leurs cordons ainsi dirigez; ces cinq puissances feront encore ici équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données.

D E M O N S T R A T I O N .

Puisque (*Hyp.*) $E. F. :: AH. AM.$ le Lem. 2. fait encore voir ici qu'en appellant S la force résultante du concours d'action de ces deux puissances E, F, au nœud A suivant AS; l'on aura ici $S. E :: AS. AH.$ Ainsi ayant (*Hyp.*) $E. D :: AH. AL.$ l'on aura pareillement ici $S. D :: AS. AL.$ Par conséquent (*Lem. 2.*) du concours de ces deux forces S, D, c'est-à-dire, des trois puissances F, E, D, il resultera au nœud A une impression ou force de A vers R suivant AR, laquelle étant appelée Q, l'on aura ici $Q. D :: AQ. AL.$ Il resultera de même (*Lem. 2.*) du concours des deux autres puissances B, C, à ce nœud A une force de A vers P suivant AP en sens directement contraire, laquelle force étant appelée N, l'on aura aussi $C. N :: AK. AN.$ Donc ayant (*Hyp.*) $D. C :: AL. AK.$ l'on aura enfin $Q. N :: AQ. AN.$ De sorte qu'ayant (*Hyp.*) $AQ=AN,$ l'on aura pareillement ici $Q=N.$ Ainsi ces deux forces égales Q, N, suivant AQ, AN, étant (comme l'on voit) directement contraires, feront ici équilibre entr'elles; & par conséquent aussi les cinq puissances B, C, D, E, F, du concours desquelles on voit que

ces deux forces Q, N , resultent. *Ce qu'il falloit encore ici démontrer.*

PART. II. 1°. Si l'on considere que dans la solut. 1. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. La diagonale AS du parallelogramme LM a été prise de grandeur & de position indéterminées, comme dans la part. 1. du cas 1. Cette raison, qui dans ce cas 1. a fait voir (*part. 2.*) que le Problème de cinq cordons de directions données en plans différens, & répandus en plus d'une demi-sphere, y étoit indéterminé, fera voir de même que celui-ci de cinq cordons de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, y est aussi indéterminé, & ce d'autant plus que la position de AP y est de plus indéterminée.

2°. Quant à la solut. 2. de la part. 1. Fig. 355. la liberté qu'on y a eue aussi de diviser AG en N , en tel rapport qu'on a voulu, rendant arbitraires non seulement les rapports de NG à AK, AL, AH, AM , mais aussi ceux de AK, AM à AH, AL , rend les rapports entr'elles de ces cinq lignes variables à l'infini, quoique ceux de AK à AM , & de AH à AL , soient constans, & qu'ils puissent quelquefois être les mêmes, comme lorsque CAE & DAF sont deux lignes droites. Donc aussi les rapports entr'elles de cinq puissances B, C, D, E, F , proportionnelles (*part. 1. solut. 2.*) à ces cinq lignes NG, AK, AL, AH, AM , feroient ici variables à l'infini. Cependant on vient de voir (*part. 1. solut. 2.*) que cinq telles puissances feroient toujours équilibre entr'elles suivant les directions ici données, desquelles ces cinq lignes sont autant de parties. Donc une infinité de puissances, cinq à cinq, en des rapports différens à l'infini, feroient ici équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF , tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Par conséquent ce Problème est encore ici indéterminé.

3°. De ce que dans la solut. 3. part. 1. Fig. 356. les deux droites RAP, AS , sont encore indéterminées de position,

& AS de grandeur, le tout comme dans la solut. 1. Fig. 352. 353. 354. de la même part. 1. Cette raison, qui dans l'art. 1. de la présente part. 2. vient de faire voir que le Problème dont il s'agit ici, y étoit indéterminé, fait voir de même qu'il l'est pareillement ici.

FIG. 352.

353. 354.

355. 356.

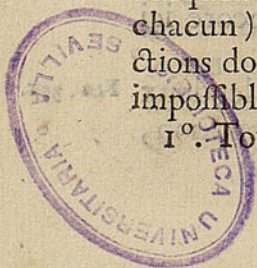
4°. Mais ce qui prouve cela tout d'un coup & à la fois pour toutes les solut. 1. 2. 3. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. 355. 356. c'est que les deux puissances D, F, qui se réduisent à une S dirigée suivant AS dans les Fig. 352. 353. 354. part. 1. solut. 1. comme font les deux puissances E, F, dans la Fig. 356. de cette part. 1. solut. 3. & que les deux puissances D, E, qui se réduisent aussi à une V dirigée suivant AV dans la Fig. 355. de la même part. 1. solut. 2. réduisant ainsi à quatre en même plan, & en plus d'un demi-cercle, les cinq cordons de cette part. 1. Le cas 2. du Problème 1. fait voir par cela seul que le Problème dont il s'agit ici, y est toujours indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. C'est ainsi (part. 1. 2.) que le Problème de cinq cordons de directions données toutes en même plan, est toujours indéterminé tant que ces cinq cordons se trouvent répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun soit le centre. Il s'agit présentement de faire voir que ce Problème est toujours impossible, lorsque ces cinq cordons de directions données en même plan, ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle: c'est ce qui se trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & ce qu'il falloit ici 3°. faire voir.

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques soient les directions données de cinq cordons attachez ensemble par un seul & même nœud, auxquels il s'agit d'appliquer autant de puissances (une à chacun) qui fassent équilibre entr'elles suivant les directions données; le Problème est toujours indéterminé ou impossible: sçavoir,

1°. Toujours indéterminé (part. 1. 2. des cas 1. 2.) tant



que les cinq cordons de directions données, sont en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, ou lorsqu'ils sont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

2°. Et toujours impossible (*part. 3. des cas 1. 2.*) tant que ces cinq cordons de directions données, sont en plans differens, sans être répandus en plus d'une demi-sphere, ou tous en même plan, sans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'est-là tout ce qu'il s'agissoit de trouver & de démontrer dans le present Probl. 15.

REMARQUE GENERALE.

I. La solution du present Probl. 15. de cinq cordons Fig. 352.
 attachez ensemble par un seul nœud, & de directions 353. 354.
 données à volonté, fait assez voir comment on pourroit refoudre de même tout autre Problème de tant de cordons qu'on voudra, attachez ainsi ensemble, & de directions données à volonté. Mais il n'est pas besoin d'entrer sur cela dans un plus grand détail pour voir ce que j'ai dit d'abord, que lorsque le nombre des cordons de directions ainsi données, est au-dessus de quatre, le Problème est toujours indéterminé ou impossible; puisque tel est (*cas 1. 2. du Probl. 15.*) celui de cinq cordons, & que par la méthode précédente qui le fait voir, on reduira toujours à ce nombre de cinq tel autre plus grand nombre de cordons qu'on voudra, précisément de la même maniere que dans la *part. 1. des cas 1. 2. de la solut. du Probl. 15.* les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, ont été reduits à quatre AB, AC, AD, AS, dans les Fig. 352. 353. 354. desquels AS pris ainsi pour un cordon tiré par une puissance S, qui feroit à chacune des deux D, F, comme cette diagonale AS à chacun des côtez correspondans AL, AM, du parallelogramme LM, équivaudroit (*Lem. 2.*) aux deux cordons AD, AF, tirez par ces deux puissances D, F. Et comme ç'a été l'indétermination de position de ce nouveau cordon AS substitué au lieu des deux AD,

AF, avec une telle puissance S, au lieu des deux D, F, qui a causé l'indétermination de ce Probl. 15. dans les part. 1. 2. de son cas 1. & l'a augmentée dans les part. 1. 2. de son cas 2. On voit que plus il y aura de cordons de directions données au-dessus de cinq, plus il y aura aussi de nouvelles raisons d'indétermination dans tous les autres Problèmes; lesquels, comme les deux précédens, seront toujours possibles tant que les cordons y seront répandus en plus d'une demi-sphere, ou en plus d'un demi-cercle, & toujours impossibles (*Lem. 2. Corol. 2.*) dans tous les autres cas.

FIG. 355.
356.

Ce qu'on vient de dire des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, réduits à quatre AB, AC, AE, AS, dans les Fig. 352. 353. 554. part. 1. des cas 1. 2. de la solut. du Probl. 15. se dira pareillement des cinq cordons qui y ont été réduits de même à quatre AB, AC, AD, AS, dans la Fig. 356. & aussi à quatre AB, AC, AF, AV, dans la Fig. 355. pour faire encore voir que tel nombre de cordons qu'on voudra au-dessus de cinq, pourra toujours se réduire de même à cinq; & de cette manière réduire au Probl. 15. chacun de tous ces autres Problèmes, qui par-là seront (comme lui) toujours indéterminez ou impossibles.

II. Quant aux Problèmes de deux ou de trois cordons ainsi attachez ensemble par un seul nœud, & de directions aussi données à volonté, on voit assez,

1°. Que lorsqu'il n'y a que deux cordons de directions données, le Problème est toujours déterminé à deux puissances égales entr'elles, lorsque ces cordons sont en ligne droite; & toujours impossible, lorsqu'ils sont quelque angle entr'eux: ce cas est celui d'une simple corde, aux extrémités de laquelle il faudroit appliquer deux puissances propres à faire équilibre entr'elles, lesquelles la rendroient toujours en ligne droite.

2°. Que lorsqu'il n'y a que trois cordons de directions données, le Problème est toujours aussi déterminé ou impossible.

Il est toujours déterminé, lorsque les trois cordons AB, AC, AD, en sont donnez en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Car alors le prolongement de chacun d'eux; par exemple, le prolongement AQ du cordon AB divisant toujours l'angle CAD des deux autres AC, AD, en raison déterminée, le parallélogramme KL d'une diagonale quelconque AG, prise à volonté sur AQ, & de côtéz AK, AL, ainsi déterminez sur AC, AD, aura toujours cette diagonale en raison déterminée à chacun de ces côtéz; & conséquemment les trois puissances B, C, D, requises aux trois cordons AB, AC, AD, pour faire équilibre entr'elles suivant ces directions ici données, devant être entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, de ces directions, chacune de ces trois puissances sera toujours ici en raison déterminée à chacune des deux autres; & conséquemment aussi le Problème y sera toujours déterminé.

Au contraire il sera impossible (*Lem. 4. Corol. 2.*) en tout autre cas; sçavoir, lorsque les trois cordons en même plan, n'y seront pas répandus en plus d'un demi-cercle; & aussi lorsqu'ils seront en plans differens, n'y pouvant être répandus en plus d'une demi-sphere.

III. Joignons presentement ces deux articles avec les solutions des deux Problèmes précédens; & l'on verra pour tous les Problèmes imaginables où il s'agira d'assigner des puissances, qui appliquées chacune à chacun de tant de cordons qu'on voudra, attachez ensemble par un seul nœud, & de directions données à volonté, feroient équilibre entr'elles suivant ces directions: on verra, dis-je,

1°. Que (*art. 2.*) le Problème de deux ou de trois cordons, sera toujours déterminé ou impossible.

2°. Que (*solut. du Probl. 14.*) le Problème de quatre cordons sera tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impossible.

3°. Qu'enfin (*solut. du Probl. 15. & art. 1. d'ici*) tous les autres Problèmes de plus de quatre cordons à l'infini, seront toujours indéterminez ou impossibles.

IV. Cela étant de tous les Problèmes de direction, données de tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez tous ensemble par un seul & même nœud, & ausquels on demanderoit d'appliquer autant de puissances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles suivant ces directions données : Cela, dis-je, étant ainsi (art. 3.) de tous ces Problèmes, il est aisé de voir que ceux de directions données de différentes branches de corde, issues de différents nœuds, se rapportant à quelqu'un de ceux-là en chaque nœud, sont aussi tous déterminez, ou indéterminez, ou impossibles, selon le nombre des branches ou cordons de chaque nœud ; sçavoir,

1°. Déterminez ou impossibles (art. 3. nomb. 1.) s'il ne part que trois cordons de chaque nœud ; ce qui est le moins qu'il en puisse partir : deux cordons seuls ne faisant qu'une simple corde ; outre qu'ils ne rendroient encore (art. 3. nomb. 1.) le Problème que déterminé ou impossible.

2°. Il sera (art. 3. nomb. 2.) déterminé, ou indéterminé, ou impossible, s'il y a des nœuds de quatre cordons, & aucun de davantage.

3°. Enfin le Problème sera (art. 3. nomb. 3.) indéterminé, ou impossible, s'il y a des nœuds de plus de quatre cordons.

C'est-là tout ce que j'avois avancé sur ce sujet, & ce qui comprend tous les Problèmes qu'on peut faire à l'infini par rapport à tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez ensemble par un seul ou plusieurs nœuds, & ausquels il faudroit appliquer autant de puissances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles suivant les directions données de ces cordons : les solutions de tous ces Problèmes se trouveront précisément comme les précédentes des Probl. 14. 15. & du nomb. 2. de l'art. 2. de la Remarque qui les suit ; il n'y aura de difficulté nouvelle que pour l'imagination à se démêler de l'embarras des lignes & des plans que la multiplicité des cordons & de leurs directions données à volonté, y exigera pour tous les parallelogrammes qui y seront nécessaires, sur

Fig. 350.

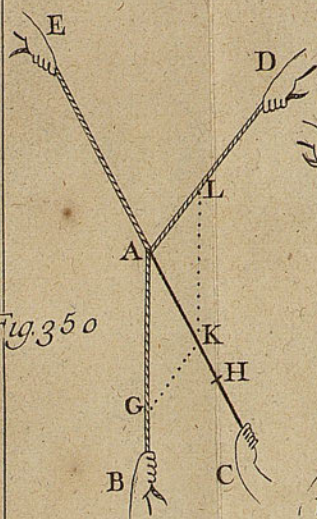


Fig. 351.

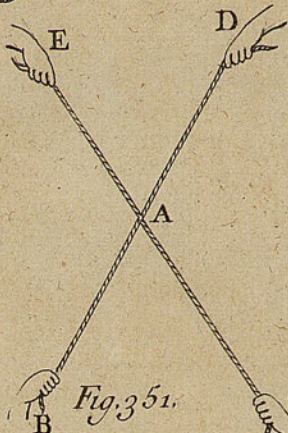


Fig. 352.

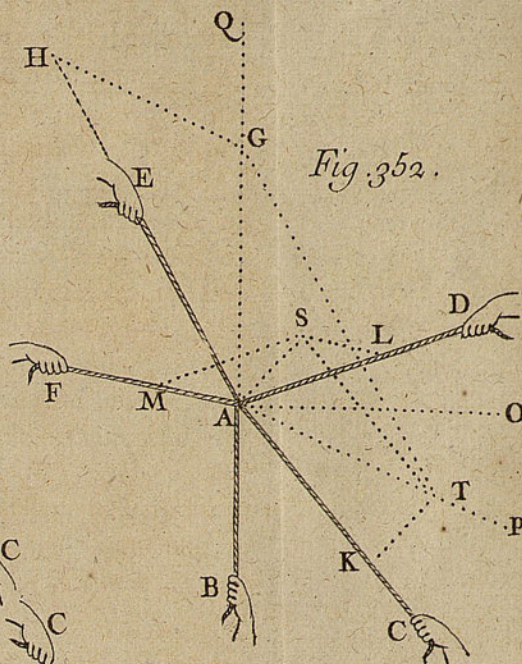


Fig. 353.

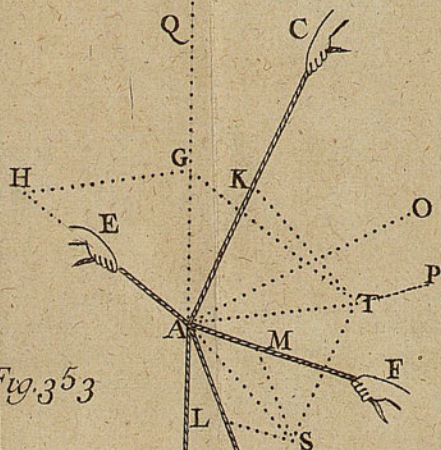


Fig. 354.

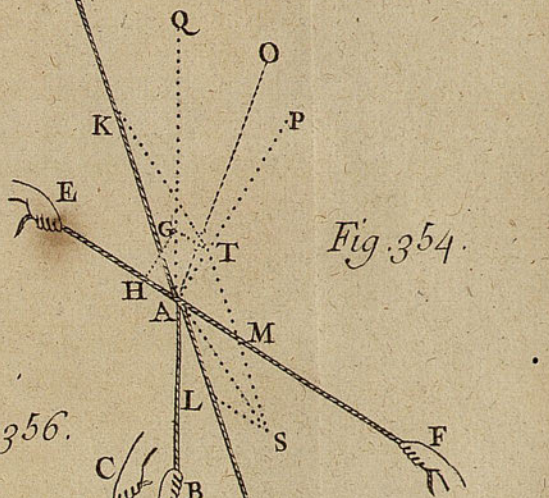


Fig. 356.

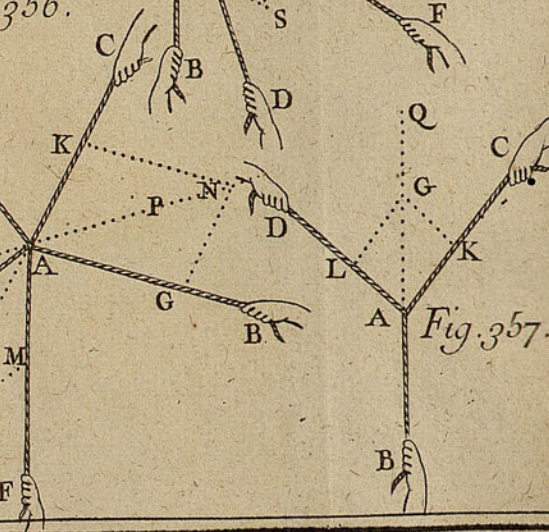


Fig. 355.

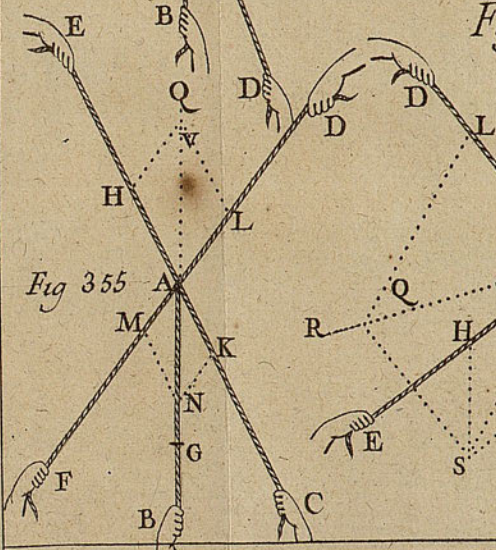
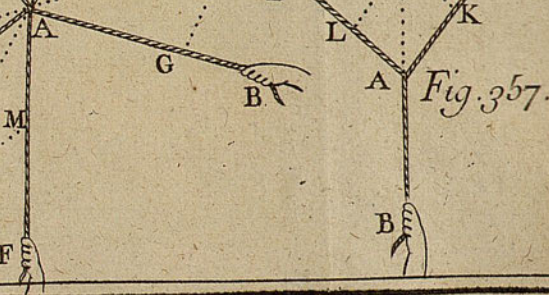


Fig. 357.



tout lorsque les cordons y seront donnez de position en differens plans. C'est ce qui m'a empêché d'entrer ici dans un plus grand détail de ces Problèmes, vû la facilité de la méthode qu'on y a suivie, laquelle fait assez voir que si au lieu de directions données, c'étoient seulement autant de points donnez par où ces directions dûssent passer, ces sortes de Problèmes seroient susceptibles d'un nombre infiniment plus grand de solutions que lorsque ces directions sont données; puisqu'alors ces puissances cherchées auroient leurs directions arbitraires, qui prises à volonté par les points donnez, détermineroient ces puissances comme elles le viennent d'être par leurs directions données: ces Problèmes, dis-je, seroient tous alors indéterminez, excepté le seul de deux cordons seulement, ou d'une simple corde, qui pour l'équilibre entre deux puissances appliquées à ces extrémités, les exige toujours égales entr'elles; au lieu que dans les Problèmes de trois cordons toujours en même plan, ou de quatre en plans differens, les rapports des puissances seroient aussi variables que leurs directions, & encore plus qu'elles dans le Problème de quatre cordons en même plan, & dans les autres d'un plus grand nombre de cordons attachez ensemble par un seul & même nœud: variabilité des rapports des puissances requises pour l'équilibre, laquelle augmenteroit avec le nombre de ces cordons.

PROBLEME XVI.

Dix puissances $\Phi, A, E, D, B, F, G, H, I, K$, appliquées à plusieurs nœuds de cordes, étant données avec les angles que toutes ces cordes font entr'elles; trouver la valeur du poids T , que toutes ces puissances ainsi appliquées soutiennent ensemble.

FIG. 353.

SOLUTION.

Soit la valeur de chaque puissance, & de chaque angle donné dans la Table suivante.

Puissance.	Livres.	Angle.	Deg.	M.
Φ	5.	θCT	45.	30.
A	4. $\frac{1}{4}$	MCT	150.	20.
E	7. $\frac{1}{4}$	LZC	58.	30.
D	12. $\frac{1}{2}$	RZC	112.	15.
B	14.	VOZ	151.	
F	11. $\frac{1}{2}$	SOZ	110.	
G	17.	QZC	143.	
H	7. $\frac{1}{2}$	NCT	145.	
I	16.	βXC	131.	30.
K	13. $\frac{1}{2}$	$h XC$	123.	30.
		PCT	64.	40.
		δYC	62.	
		$z YC$	107.	20.
		$e YC$	151.	40.

Cela supposé, sur les branches des cordes auxquelles les puissances $\Phi, A, E, D, B, F, G, H, I, K$, sont immédiatement appliquées, soient prises depuis leurs nœuds des parties $\theta C, LZ, VO, SO, QZ, \beta X, hX, \delta Y, zY, eY$, qui soient entr'elles comme les forces de ces mêmes puissances, c'est-à-dire, comme les chiffres qui leur répondent dans la Table précédente.

Présentement si l'on regarde chacune de ces proportionnelles comme un sinus total, le sinus de la différence d'un angle droit à l'angle d'application de la puissance qui répond à cette proportionnelle, sera la sublimité ou la profondeur de cette même puissance: par exemple, si l'on prend la proportionnelle $C\theta$ de la puissance Φ pour un sinus total, sa profondeur $C\lambda$ sera le sinus de l'angle $C\theta\lambda$, qui est la différence de $\theta C\lambda$, angle d'application de cette puissance à un angle droit. De même en prenant la proportionnelle VO de la puissance E , pour un sinus total, sa sublimité $O\mu$ sera le sinus de l'angle $OV\mu$, qui est la différence d'un angle droit à son angle d'application VOZ : de cette façon nous aurons les sublimités & les profondeurs de toutes ces puissances par les analogies suivantes.

Comme	au				Ainsi		à	
Le sinus total	Sinus	de l'angle	de Deg. M. différence de 90 deg. à l'angle d'aplica- tion.	de la puif- fance	La propor- tionnelle de cette même puissance	de	Sa fu- blimité, ou sa profon- deur	de
10000000.	7009093.	Cθλ	44.30.	Φ	Cθ	5.	Cλ	3. $\frac{1013093}{2000000}$
	5224986.	ZLl	31.30.	A	ZL	4. $\frac{1}{4}$	Zl	2. $\frac{441311}{2000000}$
	8746197.	OVu	61.	E	OV	7. $\frac{1}{4}$	Ou	6. $\frac{13639713}{4000000}$
	3420202.	OSf	20.	D	OS	12. $\frac{1}{2}$	Of	4. $\frac{110101}{400000}$
	7986355.	ZQq	53.	B	ZQ	14.	Zq	11. $\frac{180897}{1000000}$
	6626201.	Xβf	41.30.	F	Xβ	11. $\frac{1}{2}$	Xf	7. $\frac{6439041}{2000000}$
	5519370.	Xbb	33.30.	G	Xb	17.	Xb	9. $\frac{382929}{1000000}$
	4694716.	Yδd	28.	H	Yδ	7. $\frac{1}{2}$	Yd	3. $\frac{521037}{1000000}$
	2979303.	Yζx	17.20.	I	Yz	16.	Yx	4. $\frac{479303}{625000}$
	8802014.	Yeg	61.40.	K	Ye	13. $\frac{1}{2}$	Yg	11. $\frac{8829189}{1000000}$

Après avoir ainsi trouvé la valeur de chacune des subtilitez & des profondeurs de toutes les puissances qui soutiennent le poids T ; soit prise ZR égale à Ou plus Of ; c'est-à-dire, suivant les analogies précédentes, égale à $6. \frac{13639713}{4000000}$ plus $4. \frac{110101}{400000}$; ou bien en reduisant ces deux

fractions à une même dénomination égale à 10. $\frac{24649813}{400000000}$.

Après cela OV étant à ZR, comme la puissance E à la force dont le point Z est tiré suivant ZO par le concours d'action des puissances D & E; ZR sera la proportionnelle de cette force, & l'angle RZC étant (*Hyp.*) de 112. degrez 15. minutes, sa différence à un angle droit; c'est-à-dire, l'angle ZRr sera de 22. degrez 15. minutes. Ce qui donnera par une analogie semblable aux précédentes, 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. pour la valeur de Zr, sublimité de cette force; puisque ZR de 10. $\frac{24649813}{400000000}$. est à 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. comme le sinus total 100000000. à 3786486. sinus de l'angle ZRr de 22. deg. 15. min.

Soit ensuite 1°. CM égale à Zq plus Zr moins Zl, c'est-à-dire, suivant les analogies que nous venons de trouver, égale à 11. $\frac{189827}{1000000}$. plus 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. moins 2. $\frac{4412381}{200000000}$. ou bien en réduisant ces trois fractions à une même dénomination, égale à 12. $\frac{166320875916559}{2000000000000000}$. Ce qui donnera par une analogie semblable aux précédentes, 11. $\frac{74566272432665199141}{5000000000000000000000000}$. pour la valeur de la sublimité Cm; puisque 12. $\frac{166320875916559}{2000000000000000}$. est à 11. $\frac{74566272432665199141}{5000000000000000000000000}$. comme le sinus total 100000000. à 8689196. sinus de l'angle CMm de 60. deg. 20. min. qui est la différence d'un angle droit à l'angle MCT de (*Hyp.*) 150. deg. 20. min.

2°. Faites de même CN égale à Xb plus Xf; c'est-à-dire, suivant les analogies de la Table précédente, égale à 9. $\frac{381929}{1000000}$ plus 7. $\frac{5439043}{200000000}$; ou bien en réduisant ces deux fractions à une même dénomination égale à 16. $\frac{14097623}{200000000}$. Ce qui donnera par une analogie semblable aux précédentes, 13. $\frac{536769+854583}{10000000000000000}$ pour la valeur de la sublimité Cn; puisque 16. $\frac{14097623}{200000000}$ est à 13. $\frac{136767694854583}{20000000000000000}$.

comme le sinus total 100000000. à 8191521. sinus de l'angle CN de 55. deg. qui est la différence d'un angle droit à l'angle NCT de (Hyp.) 145. deg.

3°. Enfin soit encore CP égale à Yg plus Yx moins Yd; c'est-à-dire, suivant les analogies de la Table précédente, égale à 11. $\frac{8827189}{100000000}$ plus 4. $\frac{479303}{625000}$ moins 3. $\frac{521037}{100000000}$; ou bien en reduisant ces trois fractions à une même dénomination égale à 12. $\frac{232141683}{2820000000}$. Ce qui donnera par une analogie encore semblable aux précédentes, 5. $\frac{686442223302177}{141000000000000000}$ pour la valeur de la profondeur Cp; puisque 12. $\frac{232141683}{2820000000}$ est à 5. $\frac{686442223302177}{141000000000000000}$, comme le sinus total 100000000. à 4278838. sinus de l'angle Cpp de 25. deg. 20. min. qui est la différence d'un angle droit à l'angle PCT de (Hyp.) 64. deg. 40. min.

De tout cela on voit présentement que

$$\text{la } \left\{ \begin{array}{l} \text{Subl. } Cm \\ \text{Subl. } Cn \\ \text{Prof. } C\lambda \\ \text{Prof. } Cp \end{array} \right\} \text{ est égale à } \left\{ \begin{array}{l} 11. \frac{74566272432665199141}{500000000000000000000000} \\ 13. \frac{136767694854582}{200000000000000000000000} \\ 3. \frac{1013093}{200000000} \\ 5. \frac{686442223302177}{141000000000000000} \end{array} \right.$$

De forte qu'en reduisant toutes ces fractions à une même dénomination, on aura $Cm + Cn - C\lambda - Cp = 15. \frac{59190816934137450578881}{705000000000000000000000000000}$. Or ayant pris, comme nous venons de faire, 1°. CR = Of + Ou. 2°. CM = Zg + Zr - Zl. 3°. CN = Xf + Xb. 4°. CP = Yg + Yx - Yd, chacune des puissances qui soutiennent ainsi le poids T; par exemple, la puissance E est (prop. 4. Cor. 1.) à ce poids comme la proportionnelle OV de (Hyp.) $7\frac{1}{4}$ à $Cm + Cn - C\lambda - Cp$. Donc cette même puissance E est à ce poids comme $7\frac{1}{4}$ à 15. $\frac{59190816934137450578881}{705000000000000000000000000000}$; par conséquent

quent la valeur de cette puissance étant (*Hyp.*) de $7\frac{1}{4}$ liv. ce même poids est aussi justement de 15. $\frac{5212281693413745017888}{7010000000000000000000}$ liv. c'est-à-dire, de 15. livres, & un peu plus de cinq septièmes de livres. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME XVII.

Deux puissances F, H , étant données avec leurs points Q, V , d'application à un Levier quelconque QV , & avec leurs directions QF, VH ; trouver l'appui de ce Levier, avec la charge & la direction de cet appui, sur lequel ces deux puissances doivent faire équilibre entr'elles.

FIG. 359.
& suivantes
jusqu'à 365.

CAS I.

Dans lequel les directions données QF, VH , des puissances aussi données F, H , sont parallèles entr'elles.

FIG. 359.
360. 361.

SOLUTION.

Du point donné V soit menée VS perpendiculaire en S sur la direction donnée QF de la puissance F . Sur cette perpendiculaire VS prolongée soient prises $VT, TS::F, H$. Après quoi soit menée TB parallèle à QF , & qui rencontre en quelque point B le Levier VQ prolongé en ligne droite ou courbe à volonté.

Je dis que ce point B de ce Levier de figure quelconque, & d'espece aussi quelconque, sera celui de son appui sur lequel les deux puissances données F, H , feront équilibre entr'elles suivant leurs directions données QF, VH ; & que la charge qui en resultera à cet appui B sera suivant une direction parallèle à celles des puissances F, H , & égale à la somme de ces mêmes puissances, lorsqu'elles agissent en même sens, comme dans la Fig. 359. ou égale à leur différence, lorsqu'elles agissent en sens contraires, comme dans les Fig. 360. 361. *Ce qui est tout ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Par ce point B soit la droite BR parallèle à VT ; & conséquemment perpendiculaire comme elle (*solut.*) à BT, QF, VH, parallèles aussi (*solution*) entr'elles, dont cette droite BR prolongée rencontre en P, R, les deux dernières QF, VH, de qui BP, BR, sont conséquemment les distances au point B. Or les parallelogrammes rectangles TP, TR, qui résultent des parallèles BR, VT, ainsi perpendiculaires aux trois autres BT, QF, VH, rendent $BR.BP :: VT.TS$ (*solut.*) :: F.H. Donc ces deux puissances F, H, sont ici entr'elles en raison reciproque des distances BP, BR, de leurs directions QF, VH, au point B du Levier QV, auquel elles sont appliquées suivant ces directions. Par conséquent ces deux puissances données F, H, feront ici (*Th. 21. Corol. 13.*) équilibre entr'elles suivant ces directions sur un appui placé en ce point B de ce Levier de figure & d'espece quelconques ; & que la charge qui en resultera à cet appui, sera (*Th. 21. part. 1.*) telle, & de direction telle qu'on les vient d'énoncer dans la solution précédente. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

CAS II.

FIG 362. Dans lequel les directions données QF, VH, des
363. 364. puissances aussi données F, H, se rencontrent (étant
365. prolongées) en quelque point C.

SOLUTION.

De ce point C de rencontre entr'elles de ces deux directions données QF, VH, prolongées, soient prises sur elles vers les puissances F, H, ainsi dirigées, des parties CD. CE : : F. H. Desquelles parties soit fait le parallelogramme CDAE, dont elles soient les côtes, & dont la diagonale CA prolongée rencontre en B le Levier QV aussi prolongé. La partie 6. du Th. 21. fait voir que ce point B

fera celui ou ce Levier de figure & d'espece quelconques, étant appuyé, les deux puissances données F , H , qui lui sont appliquées suivant les directions aussi données QF , VH , feront équilibre entr'elles; & que la charge qui en resultera a cet appui B , fera (*Th. 21. part. 2.*) de C vers A suivant CA , & à chacune de ces puissances F , H , comme cette diagonale CA est à chacun des côtez correspondans CD , CE , du parallelogramme $CDAE$. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici 2°. trouver & démontrer.*

P R O B L E M E X V I I I.

Deux puissances quelconques F , H , étant données avec la direction QF de la premiere F , & son point d'application Q à un Levier QB d'appui donné B : on demande le point d'application de la seconde puissance H à ce Levier prolongé (s'il est nécessaire) en ligne quelconque, & la direction que cette puissance H doit avoir pour faire équilibre avec l'autre puissance F sur l'appui donné B de ce même Levier de figure & d'espece quelconques.

FIG. 359.
& suivantes
jusqu'à 372

C A S I.

Dans lequel on veut que la direction cherchée de la puissance H , soit parallele à la direction donnée QF de l'autre puissance F pareillement donnée.

FIG. 359.
360 361.

S O L U T I O N.

Du point d'appui donné B soit menée BP perpendiculaire en quelque point P à la direction QF prolongée de la puissance F . Sur cette droite BP aussi prolongée, s'il est nécessaire, soit prise BR . $BP :: F. H$. Après quoi par le point R soit menée RV parallele à QF , & qui rencontre en V le Levier BQ prolongé de figure & d'espece quelconques.

Cela fait, je dis que la puissance donnée H , appliquée à ce Levier en ce point V suivant VR , fera équilibre sur l'appui donné B de ce même Levier avec l'autre puissance

Z z ij

donnée F , qu'on lui suppose appliquée en Q suivant QF .
Ce qu'il falloit 1°. trouver.

DEMONSTRATION.

Puisque (*solut.*) VH est parallèle à QF , & qu'elle est rencontrée en R par BR perpendiculaire en P sur QF ; cette droite BR , où PBR est aussi perpendiculaire en R sur VH : & conséquemment BP , BR , sont les distances de l'appui B à ces directions QF , VH , des puissances F , H . Donc ayant (*solut.*) BR . $BP :: F$. H . Ces deux puissances données F , H , seront ici (*Th. 21. Corol. 13.*) en équilibre entr'elles sur cet appui donné B . *Ce qu'il falloit démontrer.*

C A S I I.

FIG. 362.
 & suivantes
 jusqu'à 372.

Dans lequel on veut que la direction demandée de la puissance donnée H , rencontre quelque part la direction donnée QF de la puissance F pareillement donnée.

SOLUTION I.

FIG. 362.
 363. 364.
 365.

Sur la direction donnée QF de la puissance donnée F , soit prise QG à volonté; & de son point G soit menée en angle quelconque QGL avec elle, la droite GL qui soit à GQ comme la puissance donnée H est à la donnée F , c'est-à-dire, GL telle qu'on ait ici GL . $QG :: H$. F . Après cela du point d'appui donné B soit menée BC parallèle à QL , & qui rencontre en C la direction QF prolongée de la puissance F . Enfin de ce point C soit menée CH parallèle à GL , & qui prolongée rencontre en V ce Levier aussi prolongé (s'il est nécessaire) en ligne quelconque.

Je dis que ce point V sera le point requis d'application de la puissance donnée H à ce Levier, & VH la direction qu'elle doit avoir pour faire équilibre sur l'appui donné B avec l'autre puissance donnée F de direction CF ou QF pareillement donné. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

fig 358

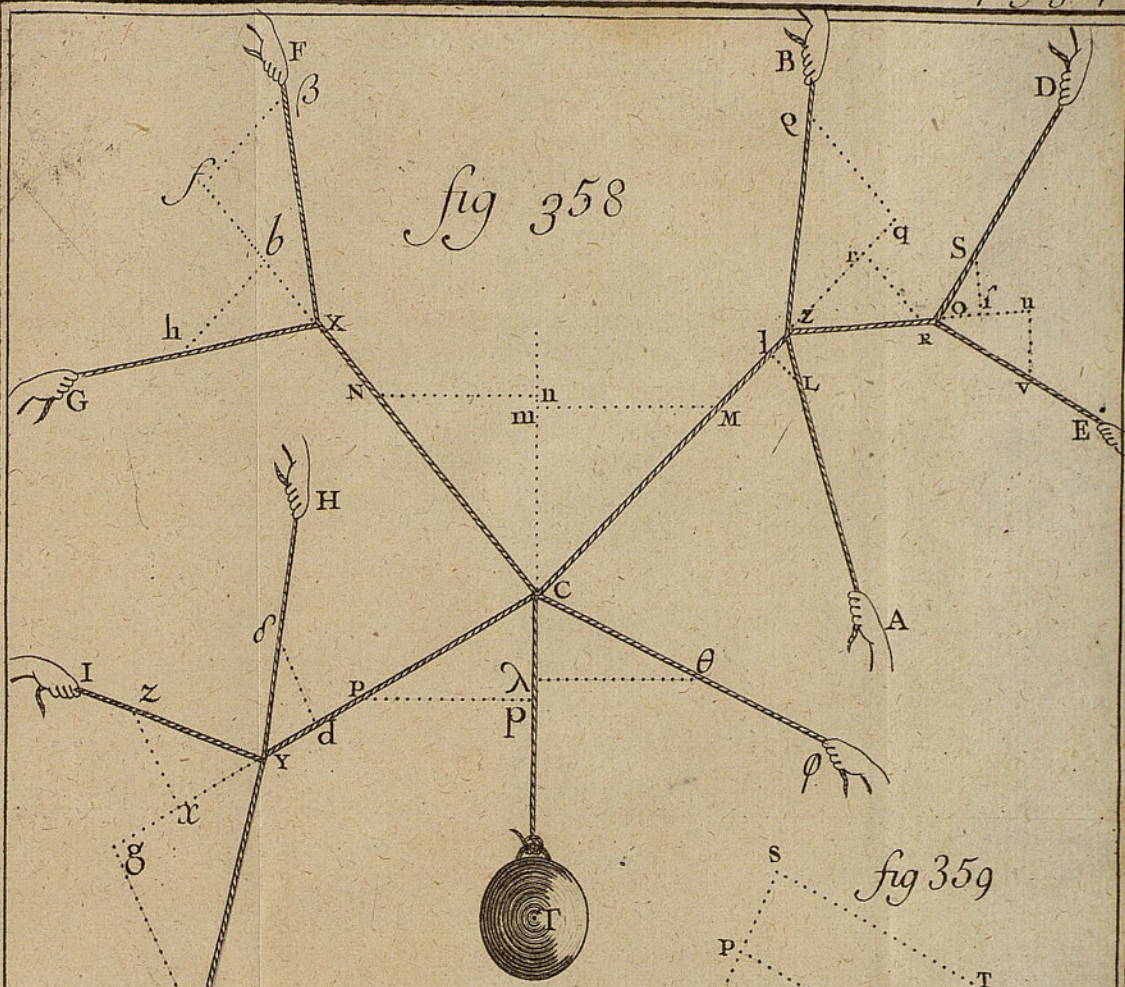


fig 359

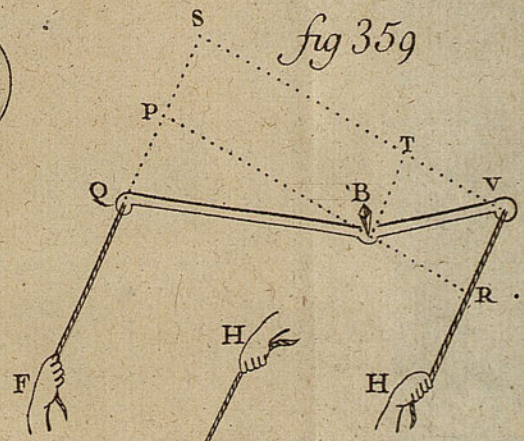


fig 360

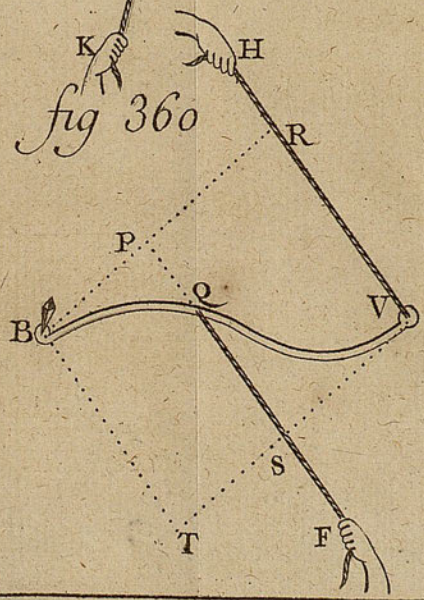
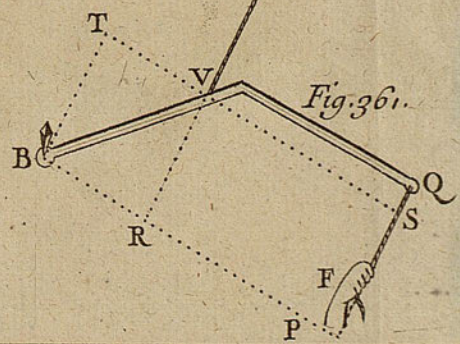


Fig. 361.



DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, soit menée DA parallèle à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme la parallèle QL (*solut.*) est rencontrée en L par GL. Ce parallélisme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG sont sur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, semblables entr'eux; & en conséquence DA. CD :: GL. QG (*solut.*) :: H. F. Soit presentement menée AE parallèle à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallèle (*solut.*) à GL, à laquelle DA vient aussi d'être faite parallèle. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA sera sur BC prolongée (s'il est necessaire) & les côtez CD, CE, sur les directions CF, VH, des puissances F, H; & ce parallelogramme rendant CE = DA, l'on aura ici CE. CD :: DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD :: H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD :: H. F. Par consequent (*Th. 21. part. 6.*) ces deux puissances données H, F, dirigées suivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, feront ici en équilibre entre elles sur l'appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SOLUTION II.

Du point d'appui donné B soit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QF de la puissance F. Sur cette perpendiculaire BP aussi prolongée, soit prise BD. BP :: F. H. Du point B soit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raison quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il est necessaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, soit décrit le cercle BRVR, qui rencontre en R, R, l'arc circulaire RDR ou RRD décrit du centre B & du rayon BD.

Cela fait, je dis que la puissance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

FIG. 366.
& suivantes
jusqu'à 372.

rigée de V vers H suivant celle qu'on voudra des deux droites VR, VR, fera équilibre sur l'appui donné de ce Levier, avec l'autre puissance donnée H, qu'on lui suppose appliquée en F suivant QF. *Ce qu'il falloit encore 2^o. trouver.*

DEMONSTRATION.

Chaque demi-cercle BRV rendant la droite BR perpendiculaire en R sur RV ou VH, comme la droite BP l'est (*solut.*) en P sur PF ou QF; ces deux droites BR, BP, sont les distances de l'appui B à ces deux directions VH, QF, des puissances H, F. Mais l'arc de cercle RDR ou RRD décrit du centre B par D, R, rendant $BR = BD$, rend aussi $BR. BP :: BD. BP$ (*solut.*) :: F. H. Donc ces deux puissances F, H, sont ici entr'elles en raison reciproque des distances BP, BR, de leurs directions QF, VH, à l'appui B du Levier auquel elles sont appliquées suivant ces directions. Par conséquent (*Th. 21. Corol. 3.*) ces deux puissances données F, H, seront ici en équilibre entr'elles sur l'appui donné B de ce Levier quelconque. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 362.
363. 364.
365.

Suivant la *solut. 1.* & la démonstr. du cas 2. l'angle CDA des Fig. 362. 363. 364. 365. étant égal à l'arbitraire QGL, & pouvant ainsi varier à l'infini, sans détruire l'équilibre démontré en conséquence de cette *solut. 1.* peut conséquemment changer en une infinité d'autres la direction demandée CE ou VH de la puissance donnée H, pendant que la direction donnée CF de l'autre puissance donnée F, demeure toujours la même, sans que (*démonstr. de la solut. 1.*) ces deux puissances données cessent de faire équilibre entr'elles sur l'appui donné B. D'où l'on voit que le Problème ici proposé, y est susceptible d'une infinité de solutions, à la maniere de la *solut. 1.*

COROLLAIRE II.

La solut. 2. & la dém. du cas 2. convenant également à chacune des deux directions $R VH$, VRH , de la puissance donnée H , déterminées par le point V , & par chacune des deux coupes R , R , résultantes de BV plus grande que BD en quelque rapport que ce soit, c'est-à-dire, (*solut.*) de BV en plus grande raison quelconque à BP que la puissance donnée F n'est à la puissance H ; cette solution & cette démonstration du cas 2. font voir ensemble que cette puissance H fera également ici équilibre suivant chacune de ces deux directions VH , VH , sur l'appui donné B , avec la puissance F de direction donnée, & toujours la même. Ce qui pour chaque rapport de majorité de BV à BD , ou à son égale BG , donne deux solutions du Problème: de sorte que ce rapport pouvant varier à l'infini, ce Problème pourra ainsi avoir une infinité de solutions, double de l'infinité de ces rapports, à la manière de la solut. 2. comme il en peut avoir aussi une infinité (*Corol. 1.*) à la manière de la solut. 1.

Fig. 366.
& suivantes
jusqu'à 372.

COROLLAIRE III.

Si présentement, dans la même solut. 2. du cas 2. l'on suppose que le point V est au point E , où le Levier est rencontré par DE tangente en D de l'arc RDR ou DRR , & qu'ainsi BV soit en BE ; le cercle $BRVR$, qui se trouve alors de ce diamètre BE , rencontre (l'angle BDE étant droit) l'arc RDR ou DRR en D , & en un autre point également distant de E de l'autre côté de ce diamètre BE : ce qui fait alors passer les points R , R , en ces deux-là, & les deux droites égales VR en deux touchantes ED en ces points de l'arc RDR ou DRR , égales aussi entr'elles, lesquelles se trouvent ainsi pour lors les directions de la puissance donnée H , non seulement propres l'une & l'autre à la mettre en équilibre sur l'appui donné B avec l'autre puissance donnée F de direction donnée, & toujours la même QF ; mais encore dont celle qui est suivant la tou-

chaute ici marquée ED ou DE de l'arc RDR ou DRR du centre B, se trouve comme (*solut. 2.*) QF ou PF, perpendiculaire à la droite DBP, & conséquemment parallèle à QF, de même que dans le premier cas, lequel se trouve encore ainsi résolu en conséquence de la solution du second.

COROLLAIRE I V.

Si enfin dans la même *solut. 2.* du cas 2. le Levier passoit par le point D, en qui soit ainsi le point V, & le diamètre BV sur le rayon BD auquel il se trouveroit ainsi réduit. Le cercle BRVR n'ayant alors pour diamètre que ce rayon BD de l'arc RDR ou DRR, ne rencontreroit cet arc qu'au seul point D, où il le toucheroit, & où leurs deux sections R, R, se réuniroient en un seul attouchement en ce point D, où les deux droites VR, VR, se confondroient en une seule ED ou DE touchante commune de ces deux cercles en ce point D. Ce qui ne donneroit alors que cette seule direction de la puissance donnée H, propre à la mettre en équilibre sur l'appui donné B, avec l'autre puissance donnée F de direction donnée QF; & ne fourniroit ainsi qu'une seule solution du Problème, dont BV plus grande que BD en quelque rapport que ce soit, en fournit deux (*Corol. 2. 3.*) pour chacun de ces rapports. Mais cette direction ED ou DE touchante commune en D des deux cercles qui s'y toucheroient aussi, BD étant ici le rayon de l'un & le diamètre de l'autre; perpendiculaire qu'elle seroit en ce point D à la droite DBP ou DPB comme QF lui est (*solut. 2. du cas 2.*) perpendiculaire en P, seroit encore ici parallèle à QF comme dans le Corol. 2. Donc les puissances données H, F, ici dirigées suivant ces parallèles ED ou DE, & QF y étant entr'elles (*solut. du cas 2.*) en raison reciproque des distances BD, BP, de ces directions à l'appui donné B, feroient ici (*Th. 21. Cor. 13.*) équilibre entr'elles sur cet appui B, comme dans la *solut.* du cas 1. qui se trouve encore ici résolu, ainsi que dans le Corol. 2. en conséquence de la solution du cas 2.

SCHOLIE.

Fig 362.

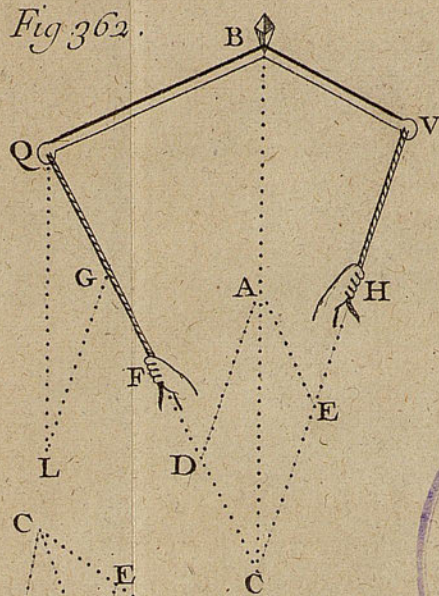


Fig 365.

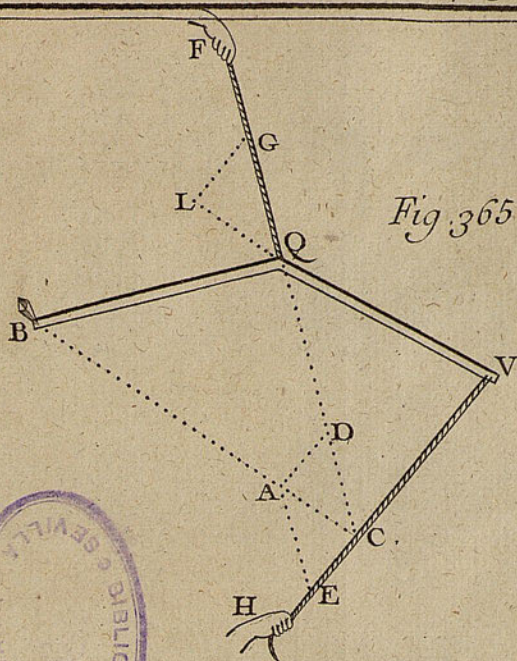


Fig 366.

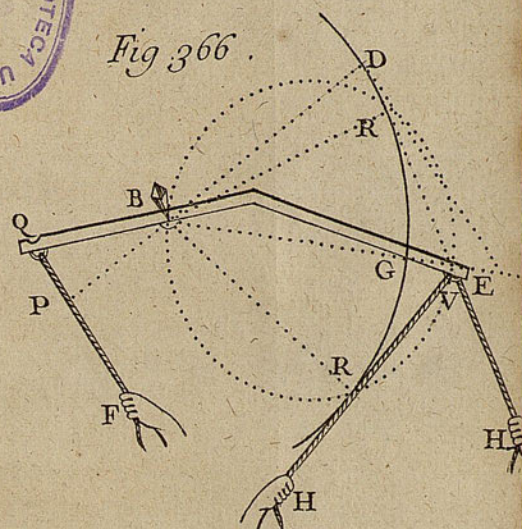


Fig 363.

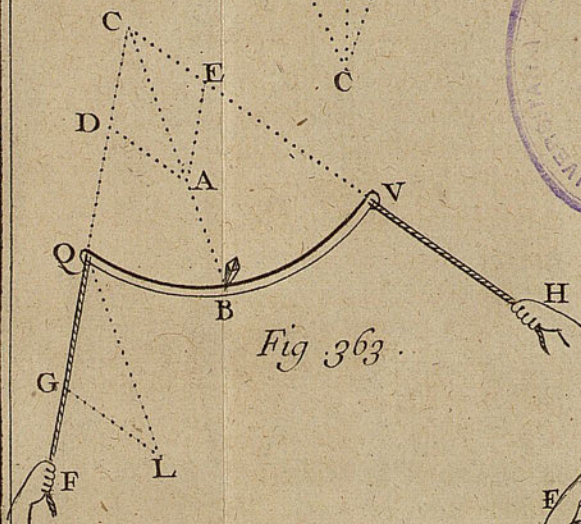


Fig 364.

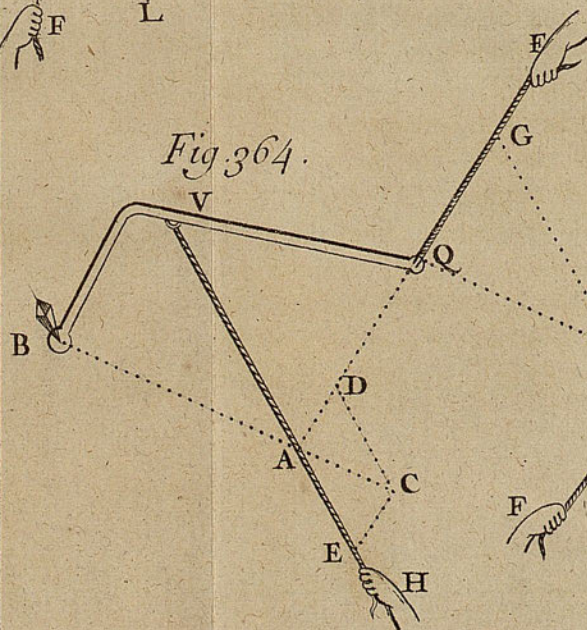
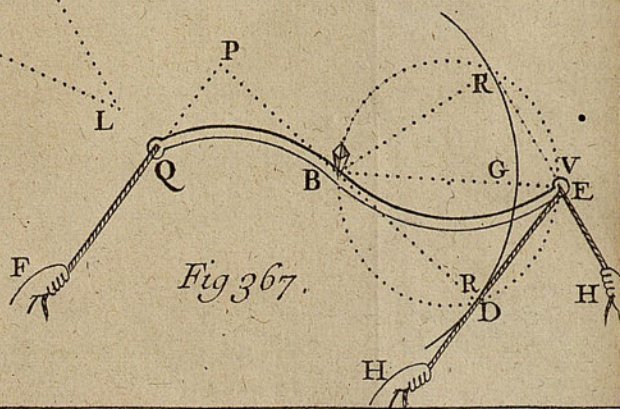


Fig 367.



SCHOLIE.

La raison pour laquelle j'ai dit dans la solut. 2. du cas 2. que BV doit être égale à BD, ou plus grande qu'elle en quelque rapport que ce soit ; c'est que si BV étoit moindre que BD, le cercle BR, VR décrit de ce diamètre BV, ne rencontreroit nulle part l'autre RDR ou DRR décrit du rayon BD & du centre B ; & que faute de cela il ne determineroit aucune direction de la puissance H, bien loin de lui en determiner une suivant laquelle elle fût équilibre sur l'appui donné B avec l'autre puissance donnée F, & de direction donnée QF, ainsi que l'exige le Problème.

PROBLEME XIX.

Deux puissances F, H, étant données avec leurs points Q, V, d'application à un Levier quelconque QV d'appui donné B, trouver les directions requises à ces deux puissances, pour faire équilibre entr'elles sur cet appui B. Fig. 373.
374. 375.
376.

SOLUTION.

De ce point donné B, aux deux points aussi donnez Q, V, d'application des puissances données F, H, au Levier quelconque QV, soient menées les droites BQ, BV, desquelles, comme diamètres, soient décrits les cercles BPQP, BRVR, dans lesquels de leur point commun B soient inscrites des droites ou cordes BP, BR, en raison reciproque des puissances données F, H, en sorte qu'on ait ici $BP \cdot BR :: H \cdot F$. Après cela du centre B, & de ces rayons BP, BR, soient décrits les arcs de cercles PP, RR, dont le premier rencontre le cercle BPQP en P, P ; & le second, le cercle BRVR en R, R.

Cela fait, je dis que si du point Q par les points P, P, l'on mene les deux droites QP, QP ; & que du point V par les points R, R, l'on mene de même les deux droites VR, VR ; la puissance F dirigée suivant celle qu'on voudra des deux premières QF, QF, de ces quatre droites, fera

équilibre sur l'appui donné B, avec l'autre puissance H, dirigée suivant celle qu'on voudra aussi des deux autres droites VH, VH. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Les demi-cercles BPQ, BRV, rendant droits les angles de ces noms qu'ils contiennent, les droites BP, BR, seront les distances de l'appui donné B aux directions QF, VH, des puissances données F, H. Ainsi ayant (*solut.*) BP. BR :: H. F. Ces deux puissances H, F, sont ici entr'elles en raison reciproque des distances de leurs directions à cet appui B. Donc (*Th. 1. Corol. 3.*) elles demeureront ici en équilibre entr'elles sur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

La solution & la demonstration convenant également à chacune des deux directions PF, PF, de la puissance F, & à chacune des deux VH, VH, de l'autre puissance H, tant que les cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, seront entr'elles en raison reciproque de ces puissances F, H; l'on voit que chaque cas des grandeurs que ces cordes auroient en ce rapport, fournira deux solutions du Problème dont il s'agit ici. Donc ces grandeurs des cordes BP, BR, pouvant varier à l'infini, sans cesser d'être entr'elles en ce rapport, excepté dans le cas du Scholie suivant; ce Problème pourra ainsi avoir une infinité de solutions, double de l'infinité des cas où ces grandeurs des cordes BP, BR, peuvent ainsi varier sans cesser d'être entr'elles en raison reciproque des puissances données F, H, qui, à cause des angles (*solut.*) toujours droits BPQ, BRV, auront toujours ces cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, pour distances de l'appui B à leurs directions PF, VH.

SCHOLIE.

Il est à remarquer que si la position de la direction QF de la puissance F étoit donnée telle que BR prise à BP en

Fig 368

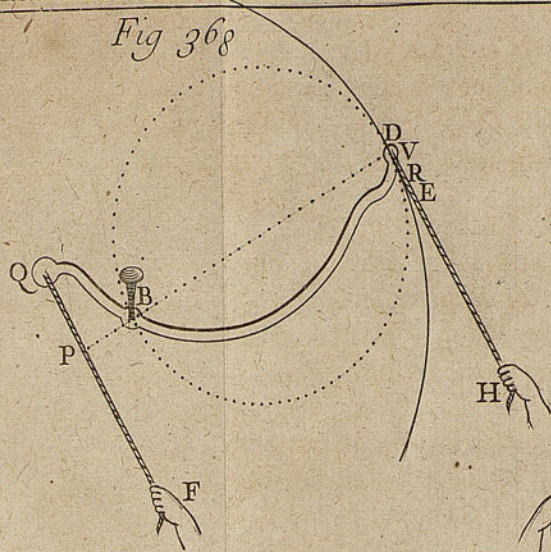


Fig 369

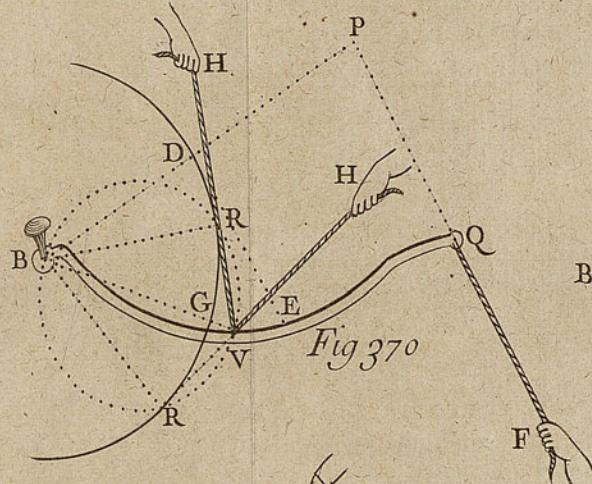
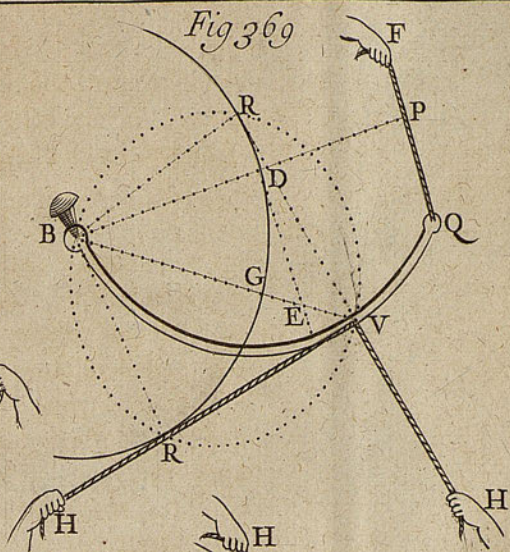


Fig 370

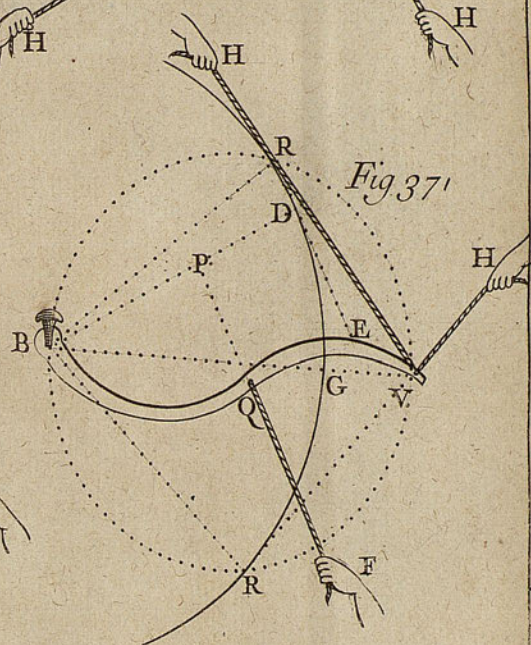


Fig 371

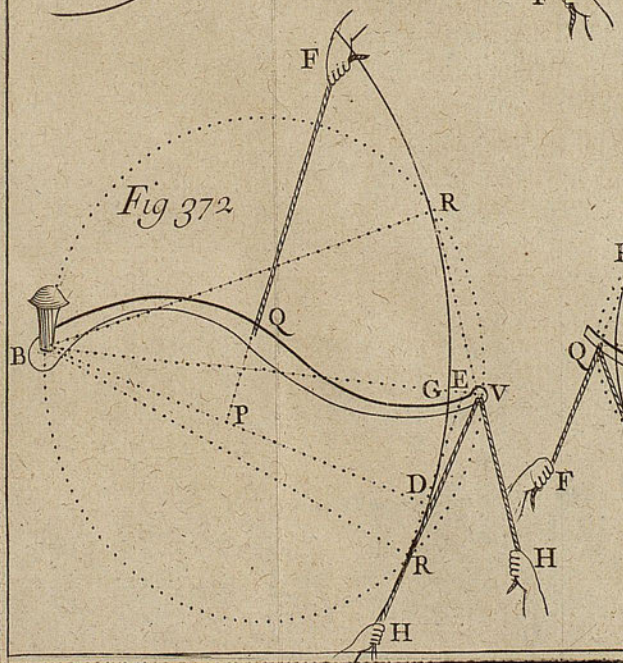


Fig 372

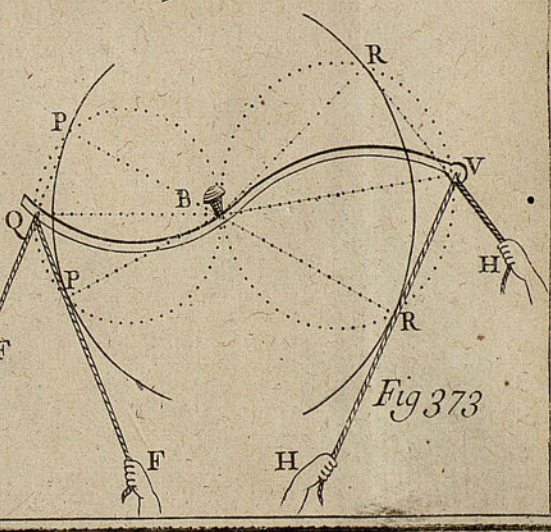


Fig 373

raison de F à H , se trouvât plus grande que BV diamètre du cercle $BRVR$; le Problème dont il s'agit ici seroit impossible : puisque cette droite BR ne pourroit plus être inscrite dans ce cercle, ni conséquemment être la distance de l'appui B à la direction requise par V à la puissance H .

PROBLEME XX.

Deux puissances F, H , étant données à volonté avec les points Q, V , de leurs applications à un Levier quelconque QBV ou BQV d'appui B donné aussi à volonté; diriger ces deux puissances de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles sur cet appui B ; & que la charge (que j'appelle P) qui lui resultera de leur concours d'action sur lui, soit à chacune de ces deux puissances F, H , en raison d'une grandeur donnée quelconque A à chacune des deux autres D, E , pareillement données, c'est-à-dire, en sorte qu'on ait ici $P. F. H :: A. D. E$.

FIG. 377.
378 379.
380.

REMARQUE.

On sçait (*Th. 21. part. 3. joint au Th. 1. Cor. 6. art. 1.*) que pour rendre ce Problème possible, cette charge P de l'appui B , doit être telle par rapport aux puissances F, H , du concours desquelles elle doit resulter, que de ces trois grandeurs P, F, H , & en consequence (*Hyp.*) des trois A, D, E , la somme de deux quelconques soit plus grande que la troisième. Cela posé, voici la solution du Problème dans les deux cas, dans le premier desquels l'appui donné B se trouve entre les puissances F, H , comme dans les Fig. 377. 378. & dans le second ces puissances sont toutes deux d'un même côté de cet appui B , comme dans les Fig. 379. 380. Ces deux cas pourroient se refoudre à la fois par la methode qu'on va voir leur convenir à tous deux: mais le different arrangement des trois points donnez Q, B, V , & B, Q, V ; y causeroit de doubles repetitions en lettres differentes, & par consequent quelque confusion dans la solution & dans la démonstration generales qu'on pourroit donner de ces deux cas à la fois:

A a ij

c'est pour plus de netteté que nous les allons refondre & démontrer l'un après l'autre, quoique par la même méthode.

C A S I.

FIG. 377,
378.

Dans lequel l'appui B est donné entre les points donnez Q, V, d'application des puissances F, H, au Levier QBV des Fig. 377. 378.

SOLUTION.

Par les extrémités Q, V, du Levier donné QBV dans les Fig. 377. 378. soit menée la droite QV, sur laquelle soit fait un triangle QKV, dont les côtes KV, KQ, soient à cette base QV, comme les grandeurs données D, E, sont à la donnée A; c'est-à-dire, un triangle QKV, tel qu'il ait ses côtes QV. KV. KQ::A. D. E. lequel triangle sera toujours possible; puisque de ces trois dernières grandeurs données A, D, E, la somme de deux quelconques est (*Hyp.*) plus grande que la troisième. Autour de ce triangle QKV soit circonscrit un cercle QKVC rencontré aussi en C par la droite KBC, menée de son point K par l'appui donné du Levier donné QBV, droit ou courbe, il n'importe. Enfin de ce point C par les extrémités Q, V de ce Levier soient menées les droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378.

Cela fait, je dis que ces droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378. sont les directions requises aux puissances F, H, pour demeurer en équilibre entr'elles sur l'appui donné B, ainsi qu'on l'exige; & pour causer à cet appui par leur concours la charge qu'on lui exige aussi; c'est-à-dire, que ces deux puissances F, H, appliquées suivant ces directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier de figure quelconque QBV, & d'appui donné entr'eux, non seulement demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui B; mais encore qu'elles lui causeront alors par leur

concours d'action sur lui, une charge qui sera à chacune de ces puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres données D, E. *Ce qu'il falloit*
1°. *trouver.*

D E M O N S T R A T I O N.

Soit fait le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA soit sur KC prolongée, s'il est necessaire, & dont les côtez CD, CE, soient de même sur les directions QF, VH, (aussi prolongées s'il est necessaire) des puissances F, H: l'on aura (*solut.*) les angles $QVK = KCQ = ACD$, & $VQK = KCV = ACE = CAD$. Donc le triangle QKV a deux angles QVK, VQK, égaux chacun à chacun des deux angles ACD, CAD, du triangle ADC; & consequemment ces deux triangles QKV, ADC, sont semblables entr'eux. Donc $QV : KV. KQ :: CA. CD. DA :: CA. CD. CE$. Mais (*solut.*) $QV. KV. KQ :: A. D. E$ (*Hyp.*) $:: P. F. H$. Donc $CA. CD. CE :: P. F. H$.

Or en consequence de $CD. CE :: F. H$. (*Th. 21. part. 6.*) on voit qu'il y aura ici équilibre entre ces deux puissances F, H, sur l'appui donné B, par où passe (*solut.*) la diagonale CA du parallelogramme CDAE, dont les côtez CD, CE, sont sur les directions de ces puissances F, H.

De plus en ce cas d'équilibre (*Th. 21. part. 3.*) on voit aussi que la charge de cet appui (que j'appelle aussi B comme lui) resultante du concours de ces deux puissances F, H, est à ces mêmes puissances, comme cette diagonale CA est à ces deux côtez CD, CE, de ce parallelogramme CDAE: c'est-à-dire, $B. F. H :: CA. CD. CE$. De sorte que venant de trouver aussi $P. F. H :: CA. CD. CE$. L'on aura ici $B = P$. Ainsi ayant (*Hyp.*) $P. F. H :: A. D. E$. L'on aura pareillement ici $B. F. H :: A. D. E$.

Donc les deux puissances données F, H, étant appliquées suivant les directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier QBV d'appui B. donné entr'eux dans les Fig. 377. 378. non seulement demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui B, mais

encore qu'elles lui causeront par leur concours d'action sur lui, une charge $B=P$, laquelle sera à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E , pareillement données. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici 1^o. démontrer.*

C A S I I.

FIG. 379.
380.

Dans lequel les deux puissances données F, H , sont d'un mesme côté de l'appui donné B , comme dans les Fig. 379. 380.

S O L U T I O N.

Ce second cas se resoudra de même que le premier, à la difference des lettres près. Pour le voir, par les extrêmités B, V du Levier BQV donné de figure quelconque dans les Fig. 379. 380. soit menée la droite BV , sur laquelle soit fait un triangle BKV , dont les côtes KV, KB , soient à cette base BV , comme les grandeurs données A, E , sont à la donnée D : c'est-à-dire, un triangle tel qu'il ait ses côtes $KV. KB. BV :: A. E. D$. Et en consequence $KV. BV. KB :: A. D. E$. Lequel triangle fera toujours possible, à cause que de ces trois grandeurs A, D, E , la somme de deux quelconques est (*Hyp.*) plus grande que la troisième. Autour de ce triangle BKV soit circonscrit un cercle $BKVC$ rencontré aussi en C par la droite KQC menée de son point K par celui du milieu des trois points donnez B, Q, K , lequel est ici celui Q d'application de la puissance F au Levier donné BQV ; laquelle droite KQC soit prolongée vers F dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. Enfin de son point C par les extrêmités B, V , de ce Levier, soient menées les droites BAC, VCH .

Cela fait, je dis que les droites CQF, VCH , sont les directions requises aux deux puissances données F, H , pour demeurer en équilibre entr'elles sur l'appui donné B , ainsi qu'on l'exige; & pour causer a cet appui par leur

concours d'action sur lui, la charge qu'on lui exige aussi : c'est-à-dire, que ces deux puissances F, H , appliquées suivant ces directions QF, VH , aux points donnez Q, V , de leurs applications au Levier donné de figure quelconque BQV , & d'appui B donné, d'un seul côté duquel sont ces deux points Q, V , non seulement demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui B , mais encore qu'elles lui causeront par leur concours d'action sur lui, une charge qui sera à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E , pareillement données. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit fait le parallelogramme $CDAE$, dont la diagonale CA soit sur BC prolongée, s'il est nécessaire; & dont les côtes CD, CE , soient sur les directions QF, VH aussi prolongées des puissances F, H ; l'on aura (*solut.*) les angles $BVK = KCB = DCA$, & $VBK = KCV = AEC = CDA$. Donc le triangle BKV a deux angles BVK, VBK , égaux chacun à chacun des deux angles DCA, CDA , du triangle DAC ; & conséquemment ces deux triangles BKV, DAC , sont semblables entr'eux. Donc $KV.BV.KB::CA.CD.DA::CA.CD.CE$. Mais (*solut.*) $KV.BV.KB::A.D.E$ (*Hyp.*) $::P.F.H$. Donc $CA.CD.DE::P.F.H$. ainsi que dans la démonstration de la *solut.* du cas 1. de sorte qu'en continuant cette démonstration-ci comme celle-là, l'on trouvera ici comme là, que les deux puissances données F, H , étant appliquées suivant les directions QF, VH , aux points donnez Q, V , de leurs applications au Levier donné QBV d'appui donné B d'un même côté de ces deux points dans les Fig. 379. 380. non seulement demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui B , mais encore qu'elles lui causeront par leur concours d'action sur lui, une charge qui sera à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E , pareillement données. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici 2°. démontrer.*

Si dans les Fig. 379. 380. on transpose les points donnez Q, V , en sorte que le Levier BQV y devienne BVQ encore du cas 2. de pareille transposition, des puissances F, H , & des lettres D, E , rendront ces deux Figures propres à ce nouveau Levier BVQ , aussi-bien que la solution & la démonstration du cas 2. en y changeant Q, F, D , en V, H, E ; & reciproquement. Tout cela est si visible, qu'il auroit été fort inutile d'y repeter ces deux Fig. 379. 380. aussi peu changées avec la solution & la démonstration du cas 2. qui ne differe point ici de ce qu'elles sont là, qu'en ces six lettres ainsi transposées.

COROLLAIRE I.

FIG. 377.
378.

I. Dans le cas 1. de la Fig. 377. 378. le Levier QBV déterminant la longueur de la droite QV , & le triangle QKV ayant (*solut.*) ses côtez $QV. KV. KQ$:: $A. D. E.$ qui sont (*Hyp.*) trois grandeurs données; son point K est déterminé, aussi-bien que ses deux autres points Q, V , & que l'appui donné B du Levier donné QBV . Donc tant que ces deux points K, B , sont differens, la position de la droite KBC , qui passe (*solut.*) par ces deux points déterminez K, B , est aussi déterminé avec le point C , où elle rencontre la circonference du cercle $QKVC$ déterminé de position & de grandeur par la détermination de ses trois points Q, K, V . Ainsi les directions QF, VH , des puissances F, H , devant (*solut.*) des points donnez Q, V , passer par ce point déterminé C , en les prolongeant vers lui, elles sont aussi de positions déterminées; & conséquemment les seules qui puissent satisfaire ici (*Fig. 377. 378.*) au premier cas du Problème, tant que les points K, B , y sont differens. Donc ce cas 1. de ce Problème n'est alors susceptible que d'une seule solution.

FIG. 379.
380.

II. De même dans le cas 2. (*Fig. 379. 380.*) le Levier donné BQV déterminant la longueur de la droite BV , & le triangle BKV ayant (*solution*) ses côtez $KV. KB. BV$:: $A. E. D.$ qui (*Hyp.*) sont trois grandeurs données; son point K est déterminé, aussi-bien que ses points donnez B, V , & que son point d'appui donné Q du

du Levier BQV. Donc tant que ces deux points K, Q, sont differens comme ici, la position de la droite KQC, qui (*solut.*) passe par ces deux points determinez K, Q, est aussi determinée avec le point C, où elle rencontre la circonference du cercle BKVC déterminé de position & de grandeur par la determination de ses trois points B, K, V. Ainsi les directions QF, VH, des puissances F, H, devant (*solut.*) des points donnez Q, V, passer par ce point déterminé C, en les prolongeant vers lui; elles sont aussi de positions déterminées, & consequemment les seules qui puissent satisfaire ici (*Fig. 379. 380.*) au second cas du Problème, tant que les points K, Q, y sont differens. Donc ce cas 2. de ce Problème ici proposé, n'est alors susceptible que d'une seule solution.

III. Donc en general (*art. 1. 2.*) tant que le point K est different de celui du milieu des trois points donnez Q, B, V, du Levier donné quelconque QBV, ou BQV, ou BVQ; le Problème dont il s'agit ici, n'est susceptible que d'une seule solution dans celui qu'on voudra des deux cas auxquels on le vient de reduire.

FIG. 377.

378. 379.

380.

IV. Mais si le Levier est de telle figure que le point K se confonde avec celui quelconque de ses trois points donnez Q, B, V, qui s'y trouve entre les deux autres; alors la position de la droite, qui suivant les solutions des cas 1. 2. doit passer par ce point moyen & par le point K, se trouvant indeterminé, le point C, dans lequel elle doit rencontrer le cercle qui passe par les deux extrêmes des trois points donnez, & par le point K, pourra se trouver en une infinité de la circonference de ce cercle: ce qui variant à l'infini les directions CF, CH, CB, des puissances F, H, de l'appui B, rendra pour lors le Problème dont il s'agit ici susceptible d'une infinité de solutions differentes par les seules differences de ces directions.

COROLLAIRE II.

Si la droite QV dans les Fig. 377. 378. du cas 1. & BV dans les Fig. 379. 380. du cas 2. y étoit le Levier donné,

dont l'appui donné fût en b dans les Fig. 377. 378. & que le point donné d'application de la puissance F au Levier BV des Fig. 379. 380. fût en q : la solution & la démonstration de chacun des deux cas precedens, feroient les mêmes ici que là, en substituant seulement b au lieu de B dans celles du cas 1. & q au lieu de Q dans celles du cas 2. Ce qui refoudroit ici le Problème pour des Leviers droits, comme là pour des Leviers courbes quelconques.

Mais chacun de ces deux nouveaux points donnez, un sur chacun de ces Leviers droits, fçavoir, b au lieu de B dans les Fig. 377. 378. & q au lieu de Q dans les Fig. 379. 380. s'y trouvant differens chacun du point K de la Figure; il suit de l'art. 3. du precedent Corol. 1. que le Problème dont il s'agit n'y feroit fufceptible que d'une seule solution pour chacun de ces Leviers droits.

PROBLEME XXI.

Fig 377.
378. 381.
381. 383.
384.

Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans le precedent Probl. 20. excepté que le point d'appui du Levier, n'est plus ici donné comme il l'étoit là; & qu'au lieu de lui, c'est l'angle (là indifferent) de la direction de sa charge avec la droite comprise entre les extrémités du Levier, qui est ici donnée, par exemple, égal au donné M de la Fig. 381. & de la Fig. 382. On demande presentement ici l'appui de ce Levier avec les directions requises aux deux puissances données F, H , pour faire équilibre entr'elles sur cet appui, de maniere que la charge qui lui doit resulter de leur concours d'action sur lui, soit suivant la direction qu'on lui exige ici, & encore à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune de deux autres pareillement données D, E , ainsi que dans le precedent Probl. 20.

CAS I.

Dans lequel l'appui du Levier QBV des Fig. 377. 378. est demandé entre les points donnez Q, V , d'application des puissances F, H , à ce Levier.

SOLUTION.

Soit encore ici (Fig. 377. 378. comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) la droite QV comprise entre les extrêmité donnees Q, V , du Levier proposé QBV ; sur laquelle soit le triangle rectiligne QKV fait de côtéz $QV. KV. KQ :: A. D. E.$ auquel soit circonscrit le cercle $QKVC$: le tout (dis-je) comme dans le cas 1. du precedent Probl. 20. Après cela (spécialement pour ici) soit menée la droite KC , de maniere qu'elle fasse avec la droite QV un angle CbV égal au donné M de la Fig. 381. ce qui est facile à faire: laquelle droite KC rencontre en B le Levier proposé QBV , & en C le cercle $QKVC$. De ce point C par les donnees Q, V , soient menées les droites CQF, CVH , dans la Fig. 377. & CFQ, CHV , dans la Fig. 378. soit aussi fait (comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) le parallelogramme $CDAE$, dont la diagonale CA soit sur la droite CBK prolongée par de-là C dans la Fig. 378. & les côtéz CD, CE , sur les droites CF, CH , aussi prolongées par de-là C dans la Fig. 378.

Cela fait, on trouvera, comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20. que les deux puissances donnees F, H , dirigées suivant les droites QF, QH , qui prolongées passent des points donnez Q, H , par le trouvé C , doivent ici (Fig. 377. 378.) faire équilibre entr'elles sur un appui placé au point trouvé B du Levier proposé QBV ; & que CB ou BC est la direction de la charge de cet appui B , résultante alors du concours d'action de ces deux puissances sur lui; & que cette charge est à chacune de ces deux mêmes puissances donnees F, H , comme

B b b ij

la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E, données avec elle. Donc l'angle CbV dans les Figures 377. 378. dont il s'agit ici, étant (*constr.*) égal au donné M de la Fig. 381. le point B fera ici celui de l'appui qu'on y demandoit; & CB ou BC la direction demandée de la charge résultante du concours d'action des deux puissances F, H, sur cet appui; desquelles puissances données F, H, les droites QF, VH, sont aussi les directions demandées: & enfin cette charge de l'appui trouvé B, fera ici (comme dans la solut. du cas 1. du précédent Probl. 20.) à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E, données avec elle. *C'est tout ce qu'il falloit ici 1°. trouver & démontrer.*

CAS II.

FIG. 382.
383. 384.

Dans lequel l'appui demandé doit avoir d'un seul côté de lui les deux puissances F, H, comme dans les Fig. 379. 380. & dans les Fig. 383. 384.

SOLUTION.

Soit dans chacune des Fig. 383. 384. une ligne VPQRS, droite ou courbe quelconque, indéfinie du côté de S, une partie de laquelle commencée en V vers S, doit être le Levier dont on demande l'appui du côté de S par rapport à deux points Q, V, qui en soient donnez tous deux de l'autre côté de cet appui, & auxquels on veut que les puissances F, H, soient appliquées à ce Levier d'appui demandé depuis Q vers S. Sur la droite VQ comprise entre les deux points donnez Q, V, soit un triangle rectiligne VQB, dont les côtez VQ, VB, BQ, soient entre eux comme les grandeurs A, D, E, telles que la somme de deux quelconques d'entrelles soit ici, comme dans le cas 1. plus grande que la troisième, pour rendre ici, comme là, le Problème possible; c'est-à-dire, un triangle rectiligne VQB, dont les côtez soient $VQ. VB. BQ :: A. D. E.$

Autour de ce triangle VBQ soit circonscrit un cercle $VTQXBCG$; & après avoir pris (de grandeur quelconque) $Mu = Md$ dans la Fig. 382. & y avoir mené la droite ud , soit fait sur la droite BV des Fig. 383. 384. un triangle isoscelle Vmb , semblable à l'isoscelle uMd , qui est sur du dans la Fig. 382. & qui conséquemment ait son angle m égal à l'angle M de celui-ci. Autour de cet autre triangle Vmb soit aussi circonscrit un cercle $VOmbBn$, lequel rencontre en b la ligne proposée quelconque $VPQRbS$, sur laquelle on veut que depuis Q vers S soit le Levier d'appui demandé du côté de S par rapport au point donné Q . De ce point b par B soit menée la droite bBZ , qui rencontre en C le cercle $VPQXBCG$. Enfin de ce point C par les donnez Q, V , d'application des puissances F, H , au Levier qu'on veut depuis V vers S sur la ligne quelconque $VPQRbS$, soient menées les droites CQ, CV .

Cela fait, je dis que si l'on dirige les puissances F, H , suivant QE, VH , en lignes droites avec CQ, CV ; ces deux puissances données F, H , feront équilibre entre-elles sur un appui placé au point b du Levier $VRQRb$, auquel elles seront ainsi appliquées; que la charge de cet appui b , résultante alors de leur concours d'action sur lui, sera pour lors à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux, D, E , données avec elle; que la direction de cette charge sera suivant Cb ou bC ; & qu'enfin cette direction fera avec la droite Vb (comprise entre les extrêmités V, b , du Levier trouvé $VPQRb$) un angle CbV égal au donné M . *C'est tout ce qu'il falloit ici 2°. trouver.*

D E M O N S T R A T I O N.

Si dans les Fig. 383. 384. l'on fait un parallélogramme $CDAE$, dont la diagonale CA soit en ligne droite avec CB , & ses côtes CD, CE , en lignes droites aussi CQ, CV ; & que dans ces deux Fig. 383. 384. l'on ajoute K au point Q ; la démonstration de la solution du cas 2. du

precedent Probl. 20. employée ici, y fera voir comme là, que les deux puissances F, H , dirigées suivant QE, VH , doivent faire équilibre entr'elles sur un appui placé au point b (c'étoit-là en B) du Levier trouvé $VPQRb$; que Cb ou bC (ayant sur elle la diagonale CA du parallélogramme $CDAE$) est la direction de la charge de cet appui b , résultante alors du concours d'action de ces deux puissances sur lui; & que cette charge est à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux D, E . données avec elle. Donc le cercle $VOmbBn$ rendant dans les mêmes Fig. 383. 384. l'angle BbV (compris entre les droites Bb, Vb) égal à l'angle BmV qu'on vient de faire (*solut.*) égal au donné M de la Fig. 382. le point b fera ici dans les Fig. 383. 384. celui de l'appui qu'on y demandoit; la droite CBb (Fig. 383.) & bBC (Fig. 384.) fera la direction demandée de la charge de cet appui b , résultante du concours d'action des puissances F, H , sur lui; les droites QE, VH , dirigées suivant CQ, CV , seront aussi les directions requises des puissances F, H , pour les mettre en équilibre entr'elles sur cet appui trouvé b : & enfin la charge de ce même appui b , fera ici (de même que dans la *solut.* du cas 2. du precedent Probl. 20.) à chacune de ces deux puissances F, H , comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E , données avec elle. *C'est tout ce qu'il falloit ici 3°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 377.
378. 381.

I. Dans les Fig. 377. 378. les rapports donnez (*solut. du cas 1.*) des côtes KQ, KV , du triangle rectiligne QKV , à la base Q, V , donnée de position & de grandeur par les points Q, V , déterminent la position du point K par rapport à cette droite QV de position donnée; & conséquemment la droite KC ne peut faire avec elle qu'un seul angle VbC égal au donné M dans la Fig. 381. tel qu'il est requis dans le Problème. Ainsi le point b de cet angle est aussi déterminé que le point K ; & conséquemment

la position de la droite KbC est déterminée par ces deux points déterminez K, b , de même que la position & la grandeur du cercle $QKVC$ le sont par les trois points déterminez Q, K, V , par lesquels il passe. Donc le point C , dans lequel la droite KbC rencontre ce cercle, est aussi déterminé que les points donnez Q, V , & que le point B où elle rencontre le Levier QBV de position donnée. Par conséquent les directions CQ, CV , des puissances F, H , sont ici déterminées de même que la direction CB ou BC de l'appui B , laquelle l'est encore d'ailleurs en conséquence de ces deux-là. Donc le cas 1. du Problème dont il s'agit ici, n'est susceptible que d'une seule solution.

II. Dans les Fig. 383. 384. les rapports donnez (*solut. du cas 2.*) des côtesz VB, QB , du triangle rectiligne VQB , à son côté QV donné de position & de grandeur en conséquence de ses points donnez Q, V , déterminent de position & de grandeur le premier BV de ces trois côtesz, lequel a ainsi son extrémité B aussi déterminée que l'autre donnée V . Donc non seulement le cercle $VTQXBG$, qui (*solut. du cas 2.*) passe par ces trois points déterminez B, Q, V , est déterminé de position & de grandeur, mais encore le triangle Vmb semblable (*solut. du cas 2.*) à l'isocelle uMd (Fig. 382.) d'angles donnez, ayant ainsi tous ses angles donnez avec son côté BV déterminé de grandeur & de position, aura en conséquence sa pointe m aussi déterminée qu'on vient de trouver ses deux autres points B, V : c'est-à-dire, que ces trois points m, B, V , sont ici déterminez de position, chacun par rapport aux deux autres. Donc le cercle $VOmBn$, qui passe (*solut. du cas 2.*) par ces trois points déterminez m, B, V , est déterminé de grandeur & de position; & conséquemment il ne peut rencontrer qu'en un seul b de ses points, autre que son point V , la ligne quelconque $VPQRS$ donnée de position sans retour sur elle-même. Ainsi ce point b est encore déterminé: par conséquent venant de trouver que l'autre B l'est de même, la position de la droite bBZ est pareillement

FIG. 382.
383. 384.

déterminée. Donc venant de trouver aussi que le cercle VTQXBG est déterminé de grandeur & de position, le point C où cette droite bBZ rencontre ce cercle ailleurs qu'en B, est aussi déterminé que ce point B. Par conséquent les directions CQ, CV, des puissances F, H, sont ici déterminées de même que la direction de l'appui b. Donc le cas 2. dont il s'agit ici, n'est susceptible que d'une seule solution.

C O R O L L A I R E II.

Fig. 377.
378.

Dans le cas 1. si le Levier droit, par exemple, si la droite QV étoit ce Levier, aux extrémités Q, V, duquel on voudroit que les puissances données F, H, fussent appliquées: le point b, dans lequel la droite KC rencontreroit ce Levier droit QbV, feroit le point où il faudroit placer l'appui de ce Levier, & les droites QF, VH, qui continuées passent ensemble par le point C trouvé comme dans la solut. du cas 1. feroient les directions requises aux puissances E, F, pour faire équilibre entr'elles sur cet appui b du Levier droit QbV, d'une manière qui satisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problème dont il s'agit dans le cas 1. Tout cela se démontrera comme la solution de ce cas 1.

C O R O L L A I R E III.

Fig. 383.
384.

Dans le cas 2. si la ligne sur laquelle on propose à trouver le Levier de ce cas, étoit aussi la droite menée (si l'on veut) de V par Q indéfiniment vers λ ; & que ses deux points V, Q fussent donnez pour ceux auxquels l'on voudroit que les puissances données F, H, fussent appliquées au Levier droit demandé: le point β où cette droite VQ λ rencontreroit le cercle Vomb β Bn, feroit le point où il faudroit placer l'appui qui doit terminer le Levier cherché, qui feroit le droit VQ β ; & si du point δ , dans lequel l'autre cercle VTQXBC δ G feroit rencontré par la droite β B δ prolongée au travers de lui, l'on menoit par les deux points

Fig 374

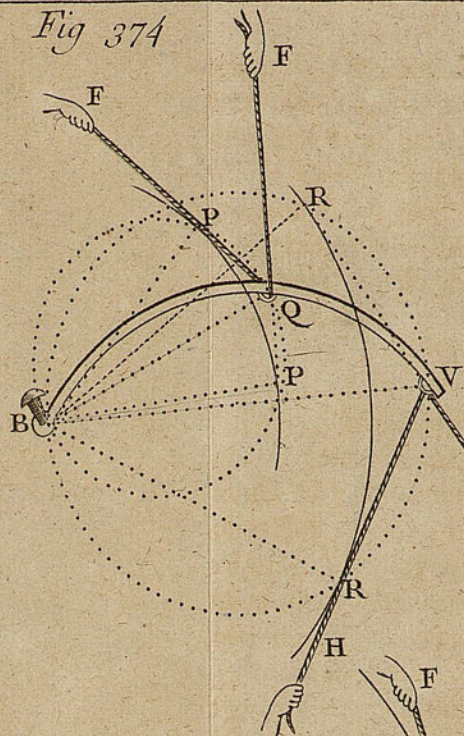


fig. 375.

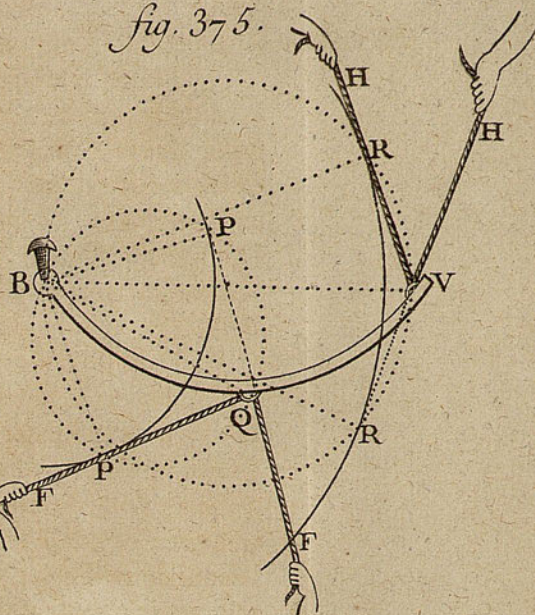


fig. 378.

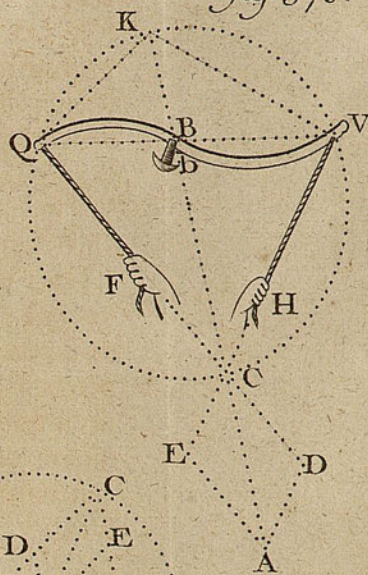


fig. 376.

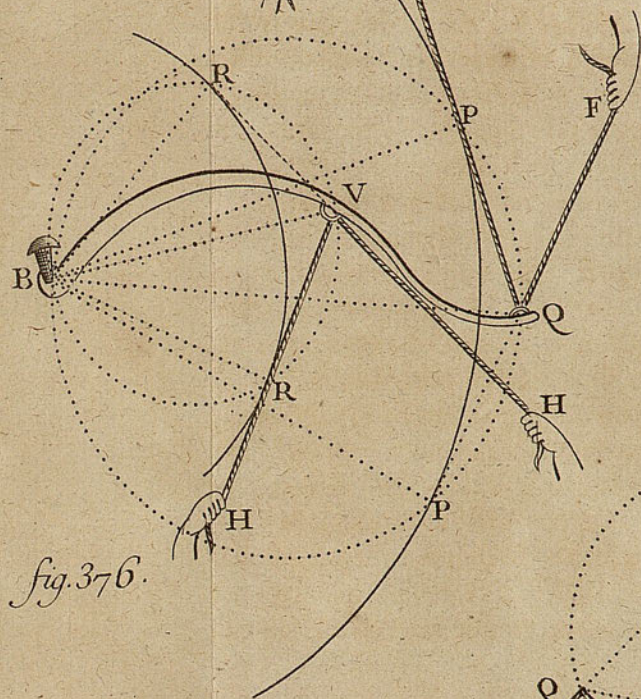


fig. 381.

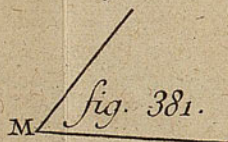
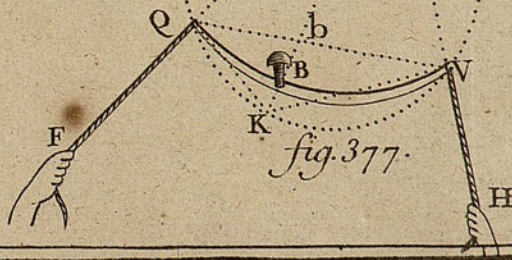


fig. 377.



points donnez Q, V , du Levier droit $VQ\beta$, deux droites qu'il est aisé d'imaginer : elles feroient les directions requises aux puissances F, H , pour les mettre en équilibre entr'elles sur cet appui β du Levier droit $VQ\beta$, d'une maniere qui fatisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problème dont il s'agit ici dans le cas 2. Tout cela se démontrera encore comme la solution de ce cas 2.

S C H O L I E.

Le precedent Corol. 3. fait voir qu'au lieu des figures FIG. 385. generales qu'on y vient d'employer, on pourroit en employer une beaucoup plus simple pour résoudre le Problème qu'on y résout par le moyen de ces figures generales pour un Levier droit à déterminer depuis V vers λ , sur une droite $V\lambda$ commencée en V , & indéfiniment prolongée vers λ ; sur laquelle droite $V\lambda$ soient donnez les deux points V, Q , où l'on voudra que deux puissances données quelconques H, F , soient appliquées au Levier droit qui du côté de λ doit se terminer au point d'appui qu'on en demande avec les directions requises aux puissances données F, H , pour faire équilibre entr'elles sur cet appui, d'une maniere qui fatisfasse à toutes les conditions du cas 2.

Pour résoudre cette question particuliere sur une figure qui lui soit aussi particuliere, & consequemment plus simple; soit sur la partie donnée VQ de la droite $V\lambda$, un triangle VQB , dont les deux autres côtes VB, QB , soient à ce donné VQ comme les puissances données F, H , sont à la charge qu'on veut qui en résulte à l'appui demandé, moindre que la somme, & plus grande que la difference de ces deux puissances, si l'on veut que le Problème soit possible. Autour de ce triangle VQB soit circonscrit le cercle $VQB\delta G$; & sur sa corde BV un triangle isoscèle BmV , dont l'angle m soit égal au donné M de la Fig. 382. qu'on veut que fasse le Levier droit avec la direction de la charge prescrite de son appui demandé. Autour de ce triangle BmV soit circonscrit aussi un autre cercle $VmBn$,

qui rencontre en β la droite $V\lambda$. De ce point β par B soit menée la droite $\beta B\delta$, qui rencontre en δ le cercle $VQ\beta\delta G$; duquel point δ par les points donnez Q, V , soient menées les droites CQF, CHV .

Cela fait, on trouvera, comme dans la solution & démonstration du cas 2. que le point β est celui où doit être placé l'appui du Levier qu'on demande, lequel en conséquence est le droit $V\beta$; & que les puissances F, H , appliquées à ce Levier suivant les directions QF, VH , demeureront en équilibre entr'elles sur son appui β , d'une manière qui satisfera à toutes les conditions du Problème dont il s'agit ici.

PROBLEME XXII.

FIG 386.
& suivantes
jusqu'à 390.

La longueur AC d'un Levier droit, ou d'une partie d'un Levier droit, étant donnée dans les Fig. 387. 388. 389. portant à ses extrémités A, C , deux bassins D, E , de balances, lesquels soient de pesanteurs ou de poids connus, que j'appelle de leurs noms D, E ; & étant aussi donnez trois autres poids F, G, H , dans la Fig. 386. on demande un point d'appui de ce Levier, sur lequel appui (dans l'hypothèse des directions des poids parallèles entr'elles, tant les naturelles, que les détournées Aa des poids F, G , aux points A des Fig. 389. 390.) un de ces trois poids F, G, H , par exemple, le poids G étant successivement mis dans chacun des bassins D, E , feroit équilibre avec chacun des deux autres F, H , mis chacun dans chacun des bassins que le poids G n'occupe point: sçavoir, F en D pendant que G sera en E dans les Fig. 387. 389. & H en E pendant que G sera en D dans les Fig. 388. 390.

SOLUTION.

I. Pour trouver l'appui qu'on demande ici, supposons pour un moment qu'il est en B , & que sur lui fixement placé là, il y auroit équilibre entre les poids F, G , dans les Fig. 387. 389. & entre les poids G, H , dans les Fig. 388. 390. le Levier AC étant le même dans les Fig. 387.

388. & le Levier BC étant aussi le même, & ses points A, C, les mêmes dans les Fig. 389. 390. En ce cas d'équilibre le Th. 21. Corol. 13. donneroit (Fig. 387. 389.) $F \rightarrow D. G \rightarrow E :: BC. AB$ (Fig. 388. 390.) $:: G \rightarrow D. H \rightarrow E$. Donc on auroit alors $F \rightarrow D. G \rightarrow E :: G \rightarrow D. H \rightarrow E$ (I).

II. Pour abreger nos expressions, soient presentement $M = F \rightarrow D$, $N = G \rightarrow E$, $P = G \rightarrow D$, $Q = H \rightarrow E$. Ces nouveaux noms étant ainsi supposez,

1°. Dans les Fig. 387. 389. nous aurons $M. N :: F \rightarrow D. G \rightarrow E$ (art. 1.) $:: BC. AB :: BC. \overline{+AC} + BC$. dont les superieurs des doubles signes sont pour la Fig. 387. & les inferieurs pour la Fig. 389. Ce qui donnera $\overline{+M \times AC} + M \times BC = N \times BC$; & en consequence (en multipliant le tout par $\overline{+1}$) $M \times AC = M \times BC + N \times BC = \overline{M + N} \times BC$, c'est-à-dire, $M \times AC = \overline{M + N} \times BC$ (K).

2°. Dans les Fig. 388. 390. nous aurons de même P. $Q :: G \rightarrow D. H \rightarrow E$ (art. 1.) $:: BC. AB :: BC. \overline{+AC} + BC$. dont les superieurs des doubles signes seront aussi pour la Fig. 388. & les inferieurs pour la Fig. 390. Ce qui donnera de même $\overline{+P \times AC} + P \times BC = Q \times BC$; & en consequence (en multipliant le tout par $\overline{+1}$) $P \times AC = \overline{P \times BC} + Q \times BC = \overline{P + Q} \times BC$, c'est-à-dire, $P \times AC = \overline{P + Q} \times BC$ (L).

III. Si l'on ajoute presentement ensemble les deux équations K, L, des nomb. 1. 2. du precedent art. 2. sçavoir, leurs premiers membres ensemble, & leurs seconds aussi ensemble, l'on aura $M \times AC + P \times AC = \overline{M + N} \times BC + \overline{P + Q} \times BC$, c'est-à-dire, $\overline{M + P} \times AC = \overline{M + N + P + Q} \times BC$, & en consequence $BC = \frac{\overline{M + P}}{\overline{M + N + P + Q}}$

$\times AC$ (R), dont (art. 2. nomb. 1. 2.) les superieurs des doubles signes sont pour les Fig. 387. 388. & les inferieurs pour les Figures 389. 390. Par consequent en

restituant ici les valeurs de M, N, P, Q, supposées dans le precedent article 2. l'on aura enfin ici $BC =$

$$\frac{F + D + G + D}{F + D + G + D + G + E + H + E} \times AC =$$

$$\frac{F + G + 2D}{F + G + 2D + G + H + 2E} \times AC \text{ (S), dont les superieurs}$$

des doubles signes sont encore ici pour les Fig. 387. 388. & les inferieurs pour les Figures 389. 390. Ce qui donne

$$BC = \frac{F + G + 2D}{F + H + 2D + 2E + 2G} \times AC \text{ (T) dans les Figures}$$

$$387. 388. \& BC = \frac{F + G + 2D}{F + H + 2D - 2E} \times AC \text{ (V) dans les Fig.}$$

389. 390. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans ces deux dernieres égalitez T, V, excepté BC; elles donneront aussi la valeur de BC en consequence des valeurs qu'on aura données de tout le reste qu'on suppose ici connu. Donc BC sera ainsi par tout ici comme avec AC, qui est (*Hyp.*) donnée; & en consequence le point d'appui B, d'abord (*art. 1.*) indéterminé, sera ici déterminé & connu pour l'effectif, sur lequel se doit faire l'équilibre demandé. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

EXEMPLE.

Fig. 387.
388.

I. Soient donnez en livres les poids $F=8$, $G=6$, $H=3$; & les bassins D, E, égaux en pesanteur $=1$. En ce cas,
1°. L'équation T du precedent art. 3. deviendra $BC =$

$$\frac{8 + 6 + 2}{8 + 3 + 2 + 2 + 12} AC = \frac{16}{27} \times AC \text{ dans les Fig. 387.}$$

388. Ce qui fait voir qu'en y divisant en 27 parties égales la longueur donnée du Levier droit AC, & qu'en y prenant depuis C vers A, une partie CB égale à 16. de celles-là; le point B ou cette partie CB se déterminera du côté de A, fera le point d'appui que les valeurs ici don-

nées, exigent dans les Fig. 387. 388. pour y produire l'équilibre demandé.

2°. L'équation V du même article 3. deviendra $BC =$

$$\frac{8+6+2}{8+2-3-2} \times AC = \frac{16}{5} \times AC \text{ dans les Fig. 389. 390. } \text{Fig. 389. 390.}$$

Ce qui fait voir qu'en y divisant en cinq parties égales la longueur donnée de la portion CA du Levier droit BC, & qu'en la prolongeant par de-là A jusqu'à ce qu'on ait CB égale à 16. de ces cinquièmes parties de AC, son terme B sera le point d'appui que les valeurs ici données exigent dans les Fig. 389. 390. pour y produire aussi l'équilibre demandé.

II. N'y ayant rien de negatif dans la formule T, qui est dans l'art. 3. de la solution pour les Fig. 387. 388: quelques autres valeurs qu'on donne des precedens poids F, G, H, D, E; cette formule T donnera toujours de cette maniere l'appui demandé dans ces Fig. 387. 388. Fig. 387. 388.

III. Mais il n'en est pas de même de la formule V qui est dans le même art. 3. de la solution pour les Fig. 389. 390. car la fraction de cette formule V, dont le numérateur est tout positif, ayant des grandeurs negatives avec des positives dans son denominateur; il y faut que les valeurs en soient données ou prises telles que la somme des positives soit plus grande en quelque raison que ce soit, que la somme des negatives: autrement la valeur de cette fraction, & en conséquence la valeur de BC dans la formule V, deviendrait infinie ou negative, selon que ces deux sommes seroient égales entr'elles, ou que la positive seroit moindre que la negative. Par conséquent si l'on donne, ou qu'on prenne (comme dans l'art. 1.) $D=E$ dans cette formule V, il y faudra le poids F plus grand que le poids H en quelque rapport que ce soit; ou si l'on y prend F plus petit que H, il faudra que D y surpassé E d'une difference plus grande en quelque rapport que ce soit, que celle dont H y surpassera F. Fig. 389. 390.

En observant cette condition, quelques valeurs qu'on

donne aux poids F, G, H, D, E, les formules T, V, de l'art. 3. de la solut. donneront toujours l'appui demandé, ainsi qu'elles viennent de le donner dans le preced. art. 1.

COROLLAIRE I.

FIG. 387.
388. 389.
390.

FIG. 391.
392.

Dans la même hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, un raisonnement semblable à celui qui vient de donner dans les Fig. 387. 388. 389. 390. le point d'appui B d'un Levier droit AC ou BC, sur lequel appui trois poids donnez F, H, G, feroient équilibre entr'eux deux à deux, placé un à un (comme ci-dessus) dans chacun des bassins D, E, de pesanteurs données, que ce Levier porte à ses points donnez A, C: un raisonnement (dis-je) semblable à celui-là, donnera de même le point d'appui (que j'appelle encore ici B) du même Levier droit quelconque, sur lequel tant de poids donnez qu'on voudra, F, G, H, K, L, &c. feroient équilibre entr'eux deux à deux, placez de suite (comme ci-dessus) un à un dans chacun des bassins de ce Levier AC ou BC, repeté dans chacune des Fig. 391. 392. sans ces bassins D, E, qu'on lui suppose cependant encore en ses points donnez quelconques A, C; sçavoir, F en D, en équilibre avec G en E; G en D, en équilibre avec H en E; H en D, en équilibre avec K en E; K en D, en équilibre avec L en E, &c. en sorte qu'en prenant encore ici D, E, pour les pesanteurs ou poids des bassins de ces noms, le poids total en A, sera fait de celui D de son bassin de ce nom, & de celui des autres F, G, H, K, L, &c. qui sera dans ce bassin; & ainsi du poids total en C: le tout comme on le voit exprimé dans la premiere Table que voici; lesquels

Poids totaux suspendus au Levier AC ou BC, en A, en C.

F + D.	G + E	} :: BC. AB :: BC. <u>+</u> AC + BC.	TABLE I.
G + D.	H + E		
H + D.	K + E		
K + D.	L + E		
&c.	&c.	}	

poids totaux, en cas d'équilibre deux à deux (marquez en même ligne) sur l'appui indéterminement supposé B de chaque Levier droit AC, BC, seront entr'eux (*Th. 21. Corol. 13.*) dans la raison commune qu'on leur voit ici marquée, le supérieur des doubles signes qu'on y voit, y étant pour la Fig. 391. & l'inférieur pour la Fig. 392. de sorte qu'en prenant ici, pour abréger, $M=F+D$, $N=G+E$, $P=G+D$, $Q=H+E$, $R=H+D$, $S=K+E$, $T=K+D$, $V=L+E$, &c. l'on y aura les mêmes analogies que voici dans la seconde Table, lesquelles donne-

M.	N	} : : BC. + AC + BC.
P.	Q	
R.	S	
T.	V	
&c.		

TABLE 2.

ront $M+P+R+T \times +AC+BC = N+Q+S+V \times BC$; ce qui (en multipliant le tout par ± 1) devient

$M+P+R+T \times AC-BC = +N+Q+S+V \times BC$: d'où

resulte $M+P+R+T \times AC = M+P+R+T \times BC$

$+N+Q+S+V \times BC = M+P+R+T+N+Q+S+V$

$\times BC$; ce qui donne $BC = \frac{M+P+R+T}{M+P+R+T+N+Q+S+V}$

$\times AC$; d'où resulte aussi (en restituant les valeurs précédentes de M, P, R, T, N, Q, S, V,) $BC =$

$$\frac{F+D+G+D+H+D+K+D}{F+D+G+D+H+D+K+D+G+E+H+E+K+E+L+E} \times AC = \frac{F+G+H+K+4D}{F+G+H+K+4D+G+H+K+L+4E} \times AC (\beta)$$

dont les supérieurs des doubles signes sont encore pour la Figure 391. & les inférieurs pour la Figure 392. Par

consequent l'on aura enfin ici premierement $BC =$

$$\frac{F+G+H+K+4D}{F+L+2G+2H+2K+4D+4E} \times AC (\delta) \text{ pour le cas de}$$

la Fig. 391. & secondement $BC = \frac{F+G+H+K+4D}{F+L+4D+4E}$

$\times AC (\lambda)$ pour le cas de la Fig. 392. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans les deux valeurs de BC comprises dans ces deux dernières équations δ , λ ; BC y est aussi connue que AC : & conséquemment le point B d'appui ici demandé de chacun des Leviers AB , BC , des Fig. 391. 392. y est connu de même. *Ce qu'il falloit ainsi trouver & démontrer par la methode de la solution precedente.*

COROLLAIRE II.

Ce qu'on voit dans le precedent Corol. 1. pour les cinq poids donnez F, G, H, K, L , se trouvera de même pour tel nombre n des poids donnez qu'on voudra: de sorte que quelque soit ce nombre n de poids donnez quelconques, pour trouver l'appui B du Levier donné AC dans la Fig. 391. ou BC de partie donnée AC dans la Fig. 392. sur lequel appui tous ces poids feroient équilibre deux à deux, placez de suite (comme ci-dessus) un à un dans chacun des bassins D, E , suspendus aux points donnez A, C , de chacun de ces Leviers;

1°. L'équation δ de ce Corol. 1. fait voir que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 391. doit être égale à une fraction d'un numerateur égal au produit du Levier donné AC , multiplié par la somme (que j'appelle Z) faite de tous les poids donnez, moins le dernier, & du poids du bassin D multiplié par $n-1$; & dont le dénominateur doit être la somme faite du premier & du dernier des poids donnez, du double de tous les autres, & de la somme des poids des deux bassins D, E , multipliée par $n-1$.

2°. L'équation λ du même Corol. 1. fait voir de même que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 392. doit être une fraction d'un numerateur égal au produit de la partie

tie donnée AC du Levier BC, multipliée par la précédente somme Z, & dont le dénominateur doit être égal à la somme faite du premier, moins le dernier des poids donnez, & du produit de $n-1$ par le poids de D—E.

S C H O L I E.

Si l'on supposoit les Leviers AC, BC; des Fig. 387. 388. 389. 390. 391. 392. sans bassins, & que les poids donnez F, G, H, &c. y fussent suspendus seuls aux points donnez A, C, dans l'ordre où ils étoient dans ces bassins; cette hypothese rendant par tout ici $D=0$, $E=0$, feroit que

Fig. 387.
& suivantes
jusqu'à 392.

Dans la solution.

1°. L'analogie 1. de l'art. 1. de cette solution deviendrait $F.G :: G.H$. ce qui fait voir que pour la possibilité du Problème dans l'un & l'autre cas des Fig. 387. 388. 389. 390. il faudroit ici que les poids donnez F, G, H, fussent en progression géométrique.

2°. L'équation T de l'art. 3. de la même solution deviendrait $BC = \frac{F+G}{F+H+2G} \times AC$ pour le cas des Fig. 387. 388.

3°. L'équation V du même art. 3. deviendrait $BC = \frac{F+G}{F-H} \times AC$ pour le cas des Fig. 389. 390.

Dans le Corol. 1.

4°. La Table 1. de ce Corol. 1. donneroit $F.G :: G.H :: H.K :: K.L :: \&c.$ c'est-à-dire, que pour la possibilité du Problème dans l'un & l'autre cas des Fig. 391. 392. il faudroit dans la presente hypothese que les poids donnez F, G, H, K, L, &c. fussent en progression géométrique, de même que dans le nomb. 1.

5°. L'équation d de ce Corollaire 1. deviendrait $BC = \frac{F+G+H+K}{F+L+2G+2H+2K} \times AC$ pour le cas de la Fig. 391.

6°. L'équation λ du même Corol. 1. deviendrait $BC =$

$$\frac{F+G+H+K}{F-L} \times AC \text{ pour le cas de la Fig. 392.}$$

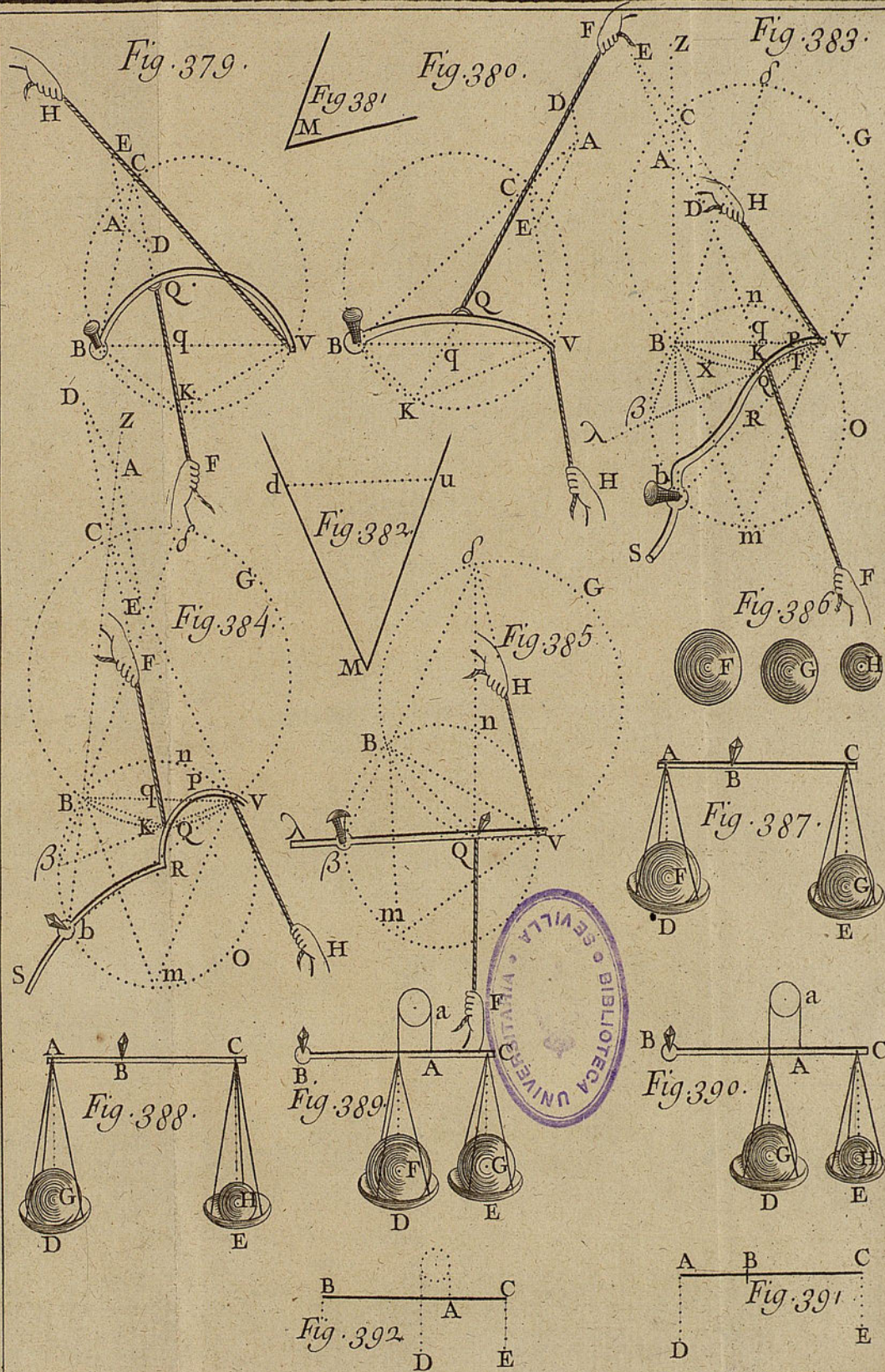
PROBLEME XXIII.

FIG. 393.
& suivantes
jusqu'à 396

Trois puissances F, H, K , étant données en raison quelconque des trois lignes Ff, Hh, Kk , de la Fig. 393. desquelles puissances une quelconque F ait aussi sa direction donnée QF avec son point d'application à un Levier quelconque B d'appui donné B : on demande le point d'application à ce Levier, requis aux deux autres puissances H, K , avec les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre avec la troisième F sur l'appui donné B de ce même Levier.

SOLUTION.

Sur la direction donnée QF de la puissance donnée F , soit prise $QG = Ff$, première des proportionnelles données: de son point G (en angle quelconque avec cette partie QG de QF) soit menée $GT = Kk$, dernière de ces trois proportionnelles; & de son point T (en angle aussi quelconque avec elle) soit $TL = Hh$, seconde des mêmes proportionnelles. Soient ensuite menées GL, QL ; & du point d'appui donné B , la droite BC parallèle à QL , & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là; sur laquelle direction soit prise $CD = QG$; & de son point D soit menée DA parallèle à GL , laquelle rencontrant BC en A comme GL rencontre en L la droite QL parallèle à CB , achève le triangle CDA semblable à QGL ; & qui ayant (*Hyp.*) $CD = QG = Ff$, aura aussi $DA = GL$, & $AC = QL$. Après avoir achevé le parallélogramme $CDAE$, qui rend $CE = DA$, soient menées CM parallèle à GT , & EM parallèle à LT ; lesquelles CM, EM , se rencontrant en M comme leurs parallèles GT, LT , se rencontrent en T , forment avec CE le triangle CME semblable à GTL : de sorte que venant de trouver $CE = DA$, l'on aura pareillement ici $EM = TL = Hh$, & $CM =$



$GT = Kk$. Enfin après avoir aussi achevé le parallélogramme CMEN, soient ses côtes CN, CM, prolongez du côté de E vers H, K, & jusqu'à la rencontre en V, R, du Levier BQ aussi prolongé en ligne quelconque jusqu'à ces deux points V, R.

Cela fait, je dis que les deux puissances données H, K, étant appliquées à ce Levier en deux points V, R, & dirigées suivant ces lignes VH, RK, feront ensemble équilibré sur son appui donné B, avec la troisième puissance donnée F de direction donnée QF.

DEMONSTRATION.

Le parallélogramme CMEN rendant $CN = EM$ (*solut.*) $= Hb$, la solution donnant $CM = Kk$, & ayant (*Hyp.*) $Hb. Kk :: H. K$. l'on aura pareillement ici $CN. CM :: H. K$. Donc (*Lem. 3. Corol. 1. part. 1.*) l'effort ou la force (que j'appelle E) résultante du concours d'action de ces deux puissances H, K, sera de C vers E suivant CE, & à la puissance H comme cette diagonale CE est au côté CN du parallélogramme CMEN, c'est-à-dire, $E. H :: CE. CN$. Mais (*Hyp.*) $H. F :: Hb. Ff$ (*solut.*) $:: CN. CD$. Donc (en raison ordonnée) $E. F :: CD. CE$. Donc aussi (*Th. 21. part. 4.*) l'effort ou la force résultante du concours de la première E, & de la puissance F, c'est-à-dire, du concours des trois puissances données K, H, F, sera ici de C vers E suivant la diagonale CA du parallélogramme CDAE, laquelle prolongée vers l'appui donné B, passe (*solut.*) par cet appui. Donc enfin (*Th. 21. part. 5.*) il y aura ici équilibre entre ces trois puissances données F, H, K, sur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puisque le parallélogramme CDAE rend CE parallèle à DA, qui l'est (*solut.*) à GL, & que les triangles EMC, GTL, sont (*solut.*) semblables entr'eux; & que la solution rendant aussi leurs autres côtes EM, ou (à cause de l'autre parallélogramme EMCN) CN parallèle à GT, &

Ddd ij

CM parallèle à LT. D'où l'on voit que les directions demandées CH, GK, des puissances H, K, étant ici (*solut.*) suivant CN, CM, sont aussi parallèles à GT, LT: sçavoir, CN à GT, & CM à LT. De sorte qu'en les faisant telles par le point C dès que les deux triangles GTL, QGL, ont été faits, on les auroit eues sans le secours d'aucun parallélogramme. Mais pour sçavoir de quels côtez du Levier BQ prolongé ces deux puissances H, K, doivent être placées dans ces directions CH, CK, le parallélogramme CMEN étoit nécessaire, le point E de la diagonale CE, étant (par rapport à C) du côté vers lequel ces deux puissances ainsi dirigées doivent agir; & pour avoir la position de ce point E par rapport à C, c'est-à-dire, la position de cette diagonale CE, qui est un des côtez de l'autre parallélogramme CDAE, cet autre parallélogramme étoit pareillement nécessaire.

COROLLAIRE II.

De ce que (*solut.*) les angles QGT, GTL, sont tous deux arbitraires ou variables à la fois; & de ce que (*Corol. I.*) les directions CH, CK, des puissances données H, K, sont toujours parallèles aux côtez GT, TL, de ces deux angles, & conséquemment variables comme les positions de ces deux côtez le sont pendant que la direction donnée CF de la troisième puissance donnée F, demeure constante & toujours la même: il résulte que le Problème dont il s'agit ici, est susceptible d'une infinité d'infinité de solutions, en prenant ici pour différentes solutions de ce Problème, celles qui, quoiqu'issues d'une même méthode & d'une même direction donnée d'une même puissance donnée, diffèrent dans les directions demandées des autres puissances pareillement données; laquelle infinité d'infinité de solutions est le produit du nombre infini d'angles possibles QGT, multiplié par le nombre pareillement infini d'angles possibles GTL, c'est-à-dire, est le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces

deux angles également variables rendent égaux. En effet la liberté que la solution précédente donne de faire à la fois les angles QGT, GTL, tels qu'on voudra, permettant de faire chacun d'eux constant & toujours le même pendant qu'on variera l'autre à volonté;

1°. Si l'on suppose le second GTL constant pendant que le premier QGT variera à l'infini, la seule variété infinie de celui-ci changera à l'infini les positions de leurs côtes constans GT, TL, & des variables GL, QL. Ainsi BC menée de l'appui donné B jusqu'à la direction donnée QF prolongée de la puissance donnée F, étant toujours (*solut.*) parallèle à QL, & les directions CH, CK, des deux autres puissances données H, K, étant toujours aussi (*Corol. 1.*) parallèles aux côtes (*solut.*) constans GT, TL, de l'angle GTL ici supposé pareillement constant: la seule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend aussi variables à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puissances données H, K. Donc trois simultanées quelconques de ces directions issues d'un même angle quelconque QGT, fournissant (*solut.*) une solution du Problème; la seule variabilité à l'infini de cet angle, qu'on voit les rendre aussi variables à l'infini, doit fournir ainsi autant de solutions différentes de ce Problème que d'angles QGT, c'est-à-dire, une infinité; & conséquemment cette seule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend ce Problème susceptible d'une infinité de solutions différentes.

2°. Si presentement on suppose cet angle QGT constant pendant que GTL variable (*solut.*) comme lui, variera à l'infini; on démontrera ici, comme l'on a fait dans le nomb. 1. par rapport à la seule variabilité à l'infini qu'on y supposoit de cet autre angle QGT: on démontrera, dis-je, ici (comme là pour la seule variabilité de l'angle QGT) que la seule variabilité qu'on y suppose à l'infini de l'angle GTL, doit y varier de même à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puissances pareillement données H, K. Donc cette seule variabilité ici

supposée de cet angle GTL , y fournira (comme la seule variabilité de l'angle QGT dans le nomb. 1.) autant de solutions différentes du Problème dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles GTL differens; & conséquemment rendra pareillement ici seule ce Problème susceptible d'une infinité de solutions différentes.

3°. Puisque (nomb. 1.) pour chaque angle GTL la seule variabilité de l'angle QGT fournit autant de solutions différentes du Problème dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles QGT differens; & que (nomb. 2.) pour chaque angle QGT la seule variabilité de l'angle GTL en fournit de même autant de solutions différentes qu'elle peut fournir d'angles GTL differens: ces deux variabilités permises à la fois par la solution précédente, fourniront ensemble de ce Problème un nombre de solutions égal au produit entr'elles des deux infinitez d'angles QGT & GTL , fournies chacune par chacune de ces variabilités des deux indéterminez (*solut.*) de ces noms. Donc suivant la solution précédente, le Problème dont il s'agit ici, y est susceptible d'une infinité d'infinité de solutions; laquelle infinité d'infinité est le produit du nombre infini d'angles possibles QGT , multiplié par le nombre pareillement infini d'angles possibles GTL , c'est-à-dire, est le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces deux angles également variables rendent égaux: le tout ainsi qu'on le vient d'avancer au commencement de ce Corollaire-ci.

COROLLAIRE III.

Un raisonnement semblable à celui qui vient de faire voir dans le précédent Cor. 2. que les variabilités à l'infini des angles QGT, GTL , que la solution permet arbitraires à la fois entre des côtes dont l'un est constant QG, GT, TL , rendent ensemble le Problème susceptible d'une infinité d'infinité de solutions, fera voir de même que ces deux variabilités ensemble des angles QGT, GTL , doivent rendre aussi la charge de l'appui donné B (résultante du

concours d'action des trois puissances ici données $F, H, K,$ susceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs, & d'autant de directions différentes.

En effet ces deux variabilités à l'infini de ces angles QGT, GTL , fournissant autant de positions de la droite QL , qu'elles fournissent de directions CH, CK , aux deux puissances données H, K , c'est-à-dire (*Corol. 2.*) une infinité d'infinité ; la droite BC toujours parallèle (*solut.*) à QL , en devient aussi susceptible d'une infinité d'infinité de positions, qui seront autant de directions d'autant de charges de l'appui B , résultante du concours d'action des trois puissances données F, H, K , en conséquence d'autant (*Corol. 2.*) de variabilités à l'infini de chacune des directions CH, CK , des deux dernières H, K , de ces trois puissances, dont la première F est la seule qui soit de direction donnée QF ou CF ; lesquelles directions CH, CK , variant la position de la diagonale CF du parallélogramme $CMEN$, & en conséquence l'angle DCE de l'autre parallélogramme $CDAE$, en autant de manières qu'elles varient elles-mêmes, en rendent la diagonale CA variable aussi en une infinité d'infinité de grandeurs différentes, lesquelles exprimeront (*Th. 21. part. 4.*) autant de charges de l'appui B , résultantes du concours d'action des trois puissances données F, H, K , toujours exprimées (*solut.*) par les côtes constants CD, CN, CM , des deux parallélogrammes $CDAE, CMEN$, d'angles ainsi variables en une infinité d'infinité d'autres. Donc les variabilités à l'infini des deux angles QGT, GTL , que la solution permet arbitraires à la fois, rendent ensemble ici la charge de l'appui donné B (résultante du concours d'action des trois puissances données $F, H, K,$) susceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs par rapport à ces puissances toujours les mêmes, & cette charge susceptible aussi d'une infinité d'infinité de directions différentes.

SCHOLIE.

De la manière dont vient d'être résolu le précédent.

Probl. 23. où l'on demandoit de mettre en équilibre entr'elles sur un appui donné d'un Levier quelconque, trois puissances données à volonté, d'une seule desquelles le point d'application à ce Levier, étoit donné avec sa direction quelconque: de cette maniere, dis-je, on peut aussi résoudre en general le Problème où l'on demandoit de mettre de même en équilibre entr'elles sur un appui donné d'un Levier quelconque, tant de puissances qu'on voudra, données aussi à volonté, d'une seule aussi desquelles le point d'application à ce Levier feroit donné avec la direction quelconque de cette puissance, sans rien avoir non plus des autres que leurs valeurs ou leurs rapports à celle-ci.

PROBLEME XXIV.

FIG. 397.
398. 399.

Tant de puissances F, H, K, P, S , &c. qu'on voudra, étant données en raisons quelconques d'autant de lignes données Ff, Hh, Kk, Pp, Ss , &c. desquelles puissances une seule quelconque, par exemple, F , soit appliquée à un Levier quelconque en un point donné Q , suivant une direction pareillement donnée QF : on demande les points d'application à ce Levier, requis à toutes les autres puissances, & les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre toutes ensemble avec la premiere F sur un appui donné B de ce Levier.

SOLUTION.

I. Sur la direction donnée QF de cette premiere puissance donnée F , soit prise $QG = Ff$, & de son point G soit menée (en angle quelconque avec elle) la droite GO égale à la dernière des proportionnelles aux puissances ici données; laquelle dernière proportionnelle étant ici Ss , il faudra ici $GO = Ss$. De son point O (en angle quelconque avec elle) soit menée $OI = Pp$: de son point I (en angle aussi quelconque avec elle) soit menée $IT = Kk$: de son point T (en angle encore quelconque avec elle) soit menée $TL = Hh$; & toujours de même jusqu'à celle inclusivement de ces proportionnelles, qui suit immédiatement

ment la premiere Ef , laquelle seconde proportionnelle est ici Hb . Du point G par les points I, T, L , &c. soient menées les droites GI, GT, GL , &c. Et du point Q par le dernier de ceux-là, qui est ici L , soit aussi menée la droite QL .

II. Après cela, du point d'appui donné B , soit menée la droite BC parallèle à QL , & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là; sur laquelle direction soit prise $CD=QG$ (*art. 1.*) $=Ef$. De son point D soit menée DA parallèle à GL ; laquelle DA rencontrant BC en A , comme GL rencontre en L la droite QL parallèle à CB , formera avec CD, CA , le triangle CDA semblable à QGL , & qui ayant (*Hyp.*) $CD=QG$, aura conséquemment aussi $DA=GL$, & $CA=QL$. Après avoir achevé le parallélogramme $CDAE$, qui aura $CE=DA=GL$, faites CM parallèle à GT , & EM parallèle à LT ; lesquelles CM, EM , se rencontrant en M , comme leurs parallèles GT, LT , se rencontrent en T , formeront avec CE le triangle CME semblable à GTL : de sorte que venant de trouver $CE=GL$, ces deux triangles semblables auront conséquemment aussi $EM=TL$ (*art. 1.*) $=Hb$, & $CM=GT$. Des points C, M , soient faites de même CX parallèle à GI , & MX parallèle à TI ; ce qui avec CM formera aussi le triangle CXM semblable à GIT : de sorte que venant de trouver $CM=GT$, l'on aura pareillement ici $MX=TI$ (*art. 1.*) $=Kk$; & $CX=GI$. Des points C, X , soient aussi faites $C\beta$ parallèle à GO , & $X\beta$ parallèle à OI ; ce qui avec CX formera de même le triangle $C\beta X$ semblable à GOI : de sorte que venant de trouver $CX=GI$, l'on aura pareillement ici $X\beta=OI$ (*art. 1.*) $=Pp$, & $C\beta=GO$ (*art. 1.*) $=Ss$, qui est ici la dernière des proportionnelles aux puissances qui s'y trouvent données. C'est ainsi qu'il faudroit continuer de faire jusqu'à la dernière, s'il y en avoit davantage qu'ici, en quelque nombre qu'elles fussent.

III. Soient presentement achevez les parallélogrammes $CMEN, CXMY, C\beta X\delta$, &c. jusqu'au dernier fait des

deux dernières proportionnelles, s'il y en avoit davantage, comme $C\beta X\delta$ est fait ici (art. 1.) des deux $C\beta$ (art. 2.) $=GO=St$, & $C\delta=\beta X$ (art. 2.) $=OI=Pp$, qui s'y trouvent les dernières. Soient enfin prolongez depuis C jusqu'au Levier BQ pareillement prolongé, tout ce que ces parallelogrammes ont de côtez opposez à EM, MX, X β , &c. jusqu'au dernier inclusivement de ces parallelogrammes, qui est ici $C\beta X\delta$, duquel seul les deux côtez $C\delta$, $C\beta$, qui passent par C, doivent être ainsi prolongez; c'est-à-dire ici, que les côtez CN, CY, $C\delta$, $C\beta$, des parallelogrammes CMEN, CXMY, $C\beta X\delta$, sont les seuls qui doivent y être ainsi prolongez jusqu'au Levier BQ pareillement prolongé en ligne quelconque jusqu'à sa rencontre avec eux en V, R, Z, ω , ainsi que le côté CD du premier parallelogramme l'est jusqu'au point Q de ce Levier. Ces côtez CN, CY, $C\delta$, $C\beta$, ainsi prolongez jusqu'aux points V, R, Z, ω , du Levier ZBQ ω , soient aussi prolongez jusqu'en H, K, P, S, vers les endroits que regardent les extrêmités différentes E, M, X, les diagonales CE, CM, CX, de leurs parallelogrammes CMEN, CXMY, $C\beta X\delta$.

IV. Cela fait, je dis que les points V, R, Z, ω , du Levier ZBQ ω , trouvez dans le précédent art. 3. sont les requis où les puissances ici données H, K, P, S, doivent être appliquées à ce Levier, aux côtez où on les voit; & que les lignes droites CVH, CRK, CZP, ωCS , trouvées aussi dans le même art. 3. sont les directions que ces quatre puissances ici données, y doivent avoir pour faire équilibre sur l'appui donné B, avec la cinquième aussi donnée F, & de direction QF ou CQF pareillement donnée; c'est-à-dire, que ces cinq puissances ici données F, H, K, P, S, étant appliquées en Q, V, R, Z, ω , suivant QF, VH, RH, ZP, ωS , au Levier ZBQ ω d'appui donné B, feront ici équilibre entr'elles sur cet appui, & ainsi de tant d'autres puissances données qu'on voudra, d'une seule quelconque desquelles la direction soit donnée avec son point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Puisque des parallelogrammes CDAE, CMEN, CXMY, $C\beta X\delta$, des art. 2. 3. de la solution, son art. 2. fait voir que le premier CDAE a son côté $CD = Ff$; que le second CMEN rend $CN = ME = Hh$; que le troisième CXMY rend $CY = XM = Kk$; que le quatrième $C\beta X\delta$ rend $C\delta = \beta X = Pp$; & que $C\beta = Ss$: les côtez $CD, CN, CY, C\delta$, de ces parallelogrammes, & $C\beta$, sont proportionnels aux lignes Ff, Hh, Kk, Pp, Ss , lesquelles l'étant (*Hyp.*) aux puissances données F, H, K, P, S ; ces côtez $CD, CN, CY, C\delta$, & $C\beta$, sont aussi proportionnels à ces mêmes puissances F, H, K, P, S . Donc,

1°. Ayant ainsi $S. P :: C\beta. C\delta$. l'effort ou la force (que j'appelle X) résultante du concours d'action de ces deux puissances S, P , sera ici (*Lem. 3. Cor. 1. p. 1.*) de C vers X suivant CX , & à la puissance P comme cette diagonale CX du parallelogramme $C\beta X\delta$ est à son côté $C\delta$; c'est-à-dire, $X. P :: CX. C\delta$. Or on vient de trouver $P. K :: C\delta. CY$. Donc (en raison ordonnée) $X. K :: CX. CY$.

2°. Par conséquent l'effort ou la force (que j'appelle M) résultante du concours de la première composée X , & de la puissance K , c'est-à-dire (*nombr. 1.*) résultante du concours d'action des trois puissances S, P, K , sera ici (*Lem. 3. Corol. 10.*) de C vers M suivant CM , & à la puissance K comme cette diagonale CM du parallelogramme $CXMY$ est à son côté CY ; c'est-à-dire, $M. K :: CM. CY$. Or on vient de trouver $K. H :: CY. CN$. Donc (en raison ordonnée) $M. H :: CM. CN$.

3°. Par conséquent l'effort ou la force (que j'appelle E) résultante du concours de la seconde composée M & de la puissance H , c'est-à-dire (*nombr. 2.*) résultante du concours d'action des quatre puissances S, P, K, H , sera ici (*Lem. 3. Corol. 10.*) de C vers E suivant CE , & à la puissance H comme cette diagonale CE du parallelogramme CMEN est à son côté CN ; c'est-à-dire, $E. H :: CE. CN$.

E e e ij

Or on vient de trouver $H.F.::CN.CD$. Donc (en raison ordonnée) $E.F.::CE.CD$.

4°. Par conséquent l'effort ou la force résultante du concours de la troisième composée E & de la puissance F , c'est-à-dire (*nombr.* 3.) résultante du concours d'action des cinq puissances données S, P, K, H, F , sera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers A suivant la diagonale CA du parallélogramme $CDAE$, laquelle diagonale prolongée vers l'appui donné B , passe (*solution art.* 2.) par cet appui.

5°. Donc enfin (*Th.* 21. *part.* 6.) il y aura ici équilibre entre ces cinq puissances données F, H, K, P, S , sur cet appui donné B : & ainsi de tant d'autres puissances qu'on voudra, d'une seule quelconque desquelles la direction soit donnée avec son point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Suivant l'art. 2. de la solution, les côtes $C\beta, \beta X, XM, ME$, des parallélogrammes $C\beta X\delta, CXMY, CMEN$, sont parallèles aux côtes GO, OI, IT, TL , du polygone $GOITL$, chacun à chacun dans l'ordre qu'ils ont ici. Or suivant l'art. 3. de la même solution, les directions demandées $\omega CS, CP, CK, CH$, des puissances données, S, P, K, H , sont, la première ωCS suivant $C\beta$, & les autres CP, CK, CH , parallèles à $\beta X, XM, ME$. Donc ces directions demandées $\omega CS, CP, CK, CH$, des puissances données S, P, K, H , sont aussi parallèles à GO, OI, IT, TL , chacune à chacune. D'où l'on voit que pour avoir simplement ces directions demandées des puissances données S, P, K, H , sans se mettre en peine de quels côtes du Levier ces puissances doivent être placées; il n'y avoit sans le secours d'aucun parallélogramme, qu'à mener tout d'un coup ces directions $\omega S, CP, CK, CH$, par le point C trouvé dès le commencement de l'art. 2. de la solution, parallèles ainsi à ces côtes GO, OI, IT, TL ,

du poligone GOITL fait comme dans l'art. 1. de la même solution. Mais les parallelogrammes qu'on y vient d'employer, y étoient nécessaires (*solut. art. 3. 4.*) pour reconnoître de quels côtez du Levier ZBQ ces puissances S, P, K, H, de directions demandées, devroient être placées, le devant être (*solut. art. 3.*) suivant ces directions (présentement trouvées) vers les endroits que regardent les extrêmités différentes X, M, E, des parallelogrammes C β X δ , CXMY, CMEN, qui ont leurs côtez C β , C δ , CY, CN, sur ces directions ω S, CP, CK, CH: le tout par la même raison que dans le Corol. du précédent Probl. 23.

COROLLAIRE II.

Si l'on considère que dans le Corol. 2. de ce Probl. 23. les variabilités, chacune à l'infini, des deux seuls angles arbitraires QGT, GTL, des Fig. 394. 395. 396. y fournissent ensemble une infinité d'infinité de directions différentes à chacune des puissances H, K, au lieu d'une qu'on y demandoit pour chacune; & en conséquence y fournissent aussi une infinité d'infinité tant de solutions de ce Probl. 23. que (suivant son Corol. 3.) de charges de l'appui qui est donné, & que de directions de ces charges: cela (dis-je) considéré, on verra que les différentes combinaisons des variabilités, chacune aussi à l'infini, des quatre angles QGO, GOI, OIT, ITL, ici arbitraires dans la Fig. 398. y doivent donner un nombre beaucoup plus de fois infini de directions à chacune des puissances H, K, P, S, au lieu de chacune une qu'on leur demandoit pareillement ici; & aussi en conséquence un pareil nombre de solutions tant du Problème dont il s'agit ici, que de charges différentes de l'appui qui y est donné, & que de directions de ces charges.

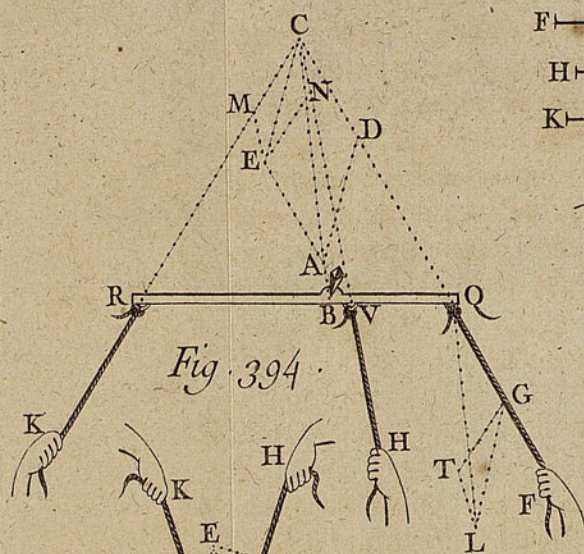
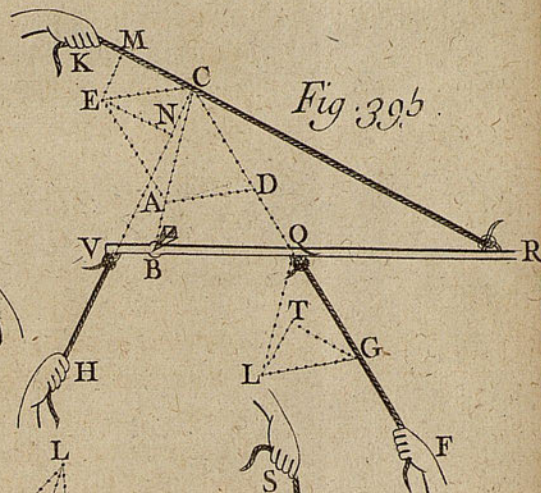
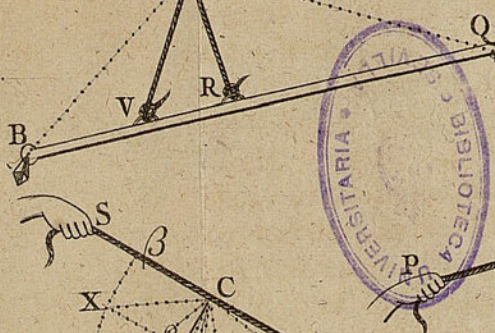
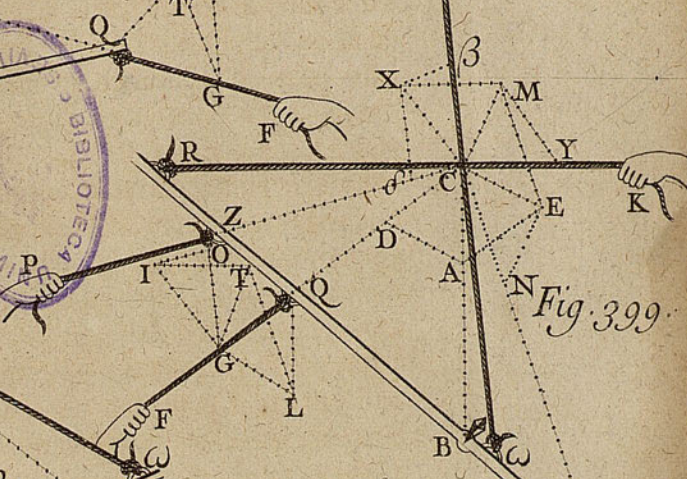
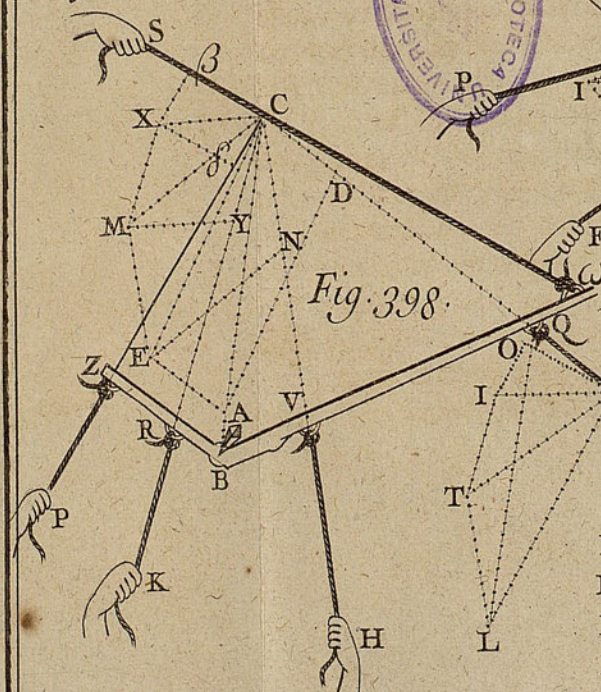
On voit de là que ce nombre de solutions du Problème, de charges de l'appui donné, & de directions de ces charges, augmenteroit d'infini en infini, à proportion qu'il y

auroit plus de puissances données dans ce Problème, desquelles une seule auroit sa direction donnée avec son point d'application au Levier proposé d'appui donné, sur lequel il faudroit mettre (comme dans la solution précédente) toutes ces puissances données en équilibre entr'elles, quel qu'en fût le nombre; c'est-à-dire, à proportion qu'il y auroit plus de puissances de directions demandées dans ce Problème avec leur point d'application au Levier proposé d'appui donné.

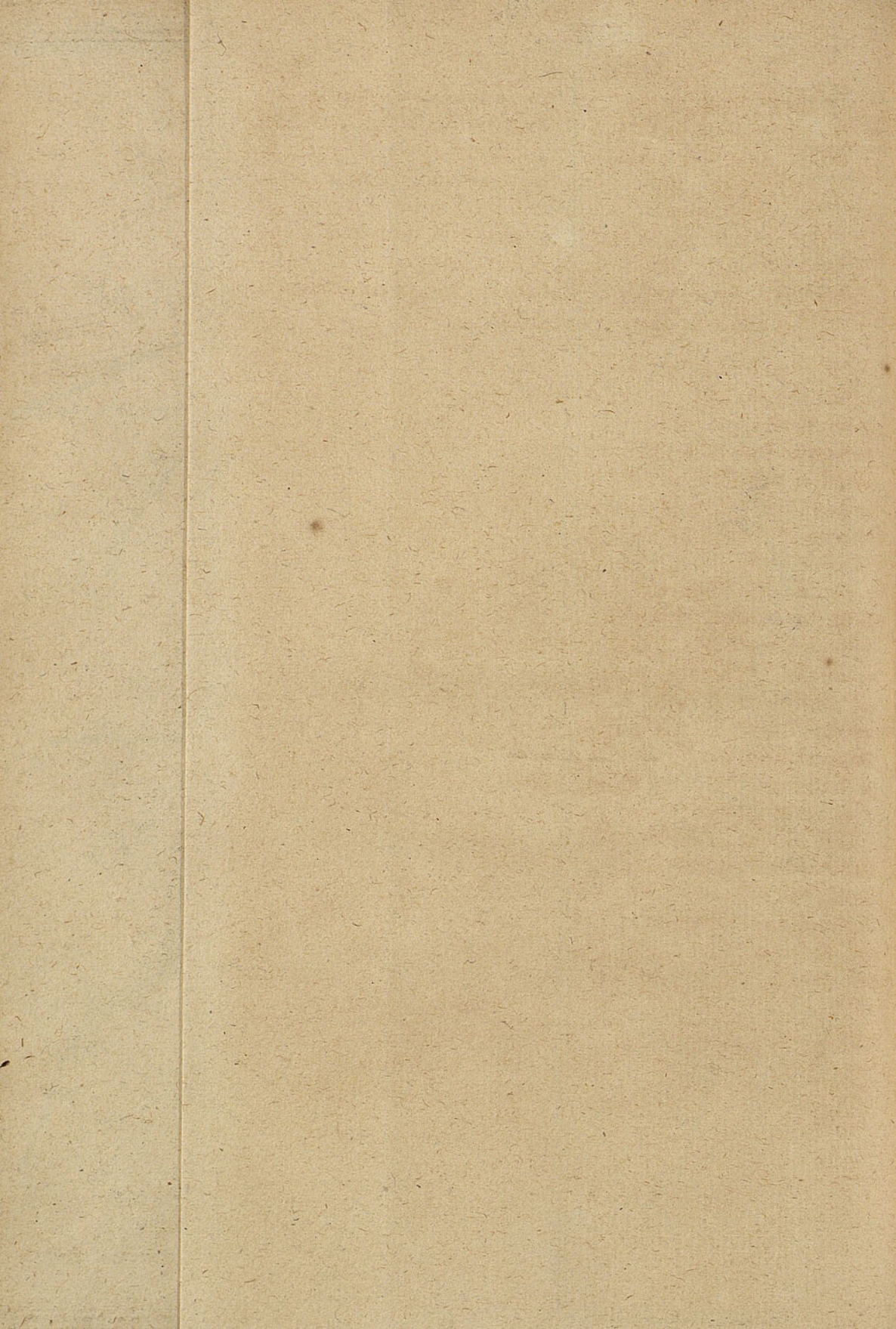
S C H O L I E.

Voilà jusqu'ici pour trouver l'équilibre, &c. sur un appui donné d'un Levier quelconque entre tant de puissances qu'on voudra, données ou seulement de rapports donnez à volonté; desquelles une seule quelconque auroit sa direction donnée avec son point d'application à ce Levier, & toutes les autres de directions demandées avec leurs points d'application à ce même Levier. Presentement si au lieu de la direction & du point d'application d'une seule de ces puissances à ce Levier, les directions de deux ou de plusieurs d'entr'elles étoient données avec leurs points d'application au même Levier quelconque d'appui donné, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les points d'application à ce Levier, & les directions requises aux autres puissances pour les mettre en équilibre avec celles-là sur cet appui, c'est-à-dire, pour mettre sur lui en équilibre entr'elles tout ce qu'il y en auroit ici de données: il n'y auroit qu'à chercher, comme dans le Problème 17. en quel point du Levier proposé il faudroit mettre un appui (le donné étant ôté pour un moment) sur lequel seul ces seules puissances de directions données feroient équilibre entr'elles, quelle seroit la charge qui de leur concours resulteroit à ce point d'appui, & la direction de cette charge; prendre ensuite cette charge ainsi connue avec sa direction, pour une seule puissance (que j'appelle π) qui lui seroit égale, appliquée en sa place suivant

$F \longrightarrow f = QG = CD$
 $H \longrightarrow h = TL = EM = CN$
 $K \longrightarrow k = GT = CM$
Fig. 393

*Fig. 394.**Fig. 395.**Fig. 396.**Fig. 398.**Fig. 399.**Fig. 397.*

$F \longrightarrow f = QG = CD =$
 $H \longrightarrow h = TL = ME = CN$
 $K \longrightarrow k = TI = MX = CY$
 $P \longrightarrow p = OI = \beta X = C\delta$
 $S \longrightarrow s = GO = C\beta =$



sa direction au point d'appui trouvé du Levier, sur lequel toutes ces puissances de directions données feroient seules équilibre entr'elles. Alors (restituant l'appui donné, & ôtant le supposé) le Problème ainsi réduit à cette nouvelle puissance connue π , seule de point d'application & de direction connues, & aux autres toutes de points d'application & de directions demandées, feroit dans les conditions du dernier qu'on vient de résoudre, & conséquemment se résoudroit alors comme lui.





MACHINES

SANS FROTTEMENT,

Démontrées suivant les principes de la Nouvelle Mécanique.

Tout ce que l'on voit de Machines sans frottement, est fait d'un rouleau ou cylindre, qui sert d'essieu à une roue en forme de poulie. Ce rouleau auquel pend un fardeau, est soutenu par deux cables attachez au haut d'une espece de grue, en sorte que ces cordes & celle du fardeau s'entortillent necessairement autour de ce rouleau dès que la puissance appliquée à sa roue l'oblige de tourner.

La seule vûe de ces Machines fait à la verité voir que tout cela s'y execute sans frottemens; mais en échange le rapport de la puissance au poids qu'elle doit enlever, y paroît si considerablement au-dessus de ce qu'il seroit, si cette poulie ne tournoit que sur un centre fixe, qu'il y a grand lieu d'appréhender qu'on ne perde bien autant, & peut-être plus, de ce côté-là, qu'on ne gagne de l'autre.

Fig. 400.

En effet, sans même avoir d'égard à la pesanteur de la poulie & de son rouleau, si l'on considere, lorsque cette Machine MHN s'appuye en H sur les bras de gruaux CD, que la puissance E soutient le poids F, de même qu'elle seroit avec un levier GL, dont l'appui seroit en H, & auquel cette puissance & ce poids seroient appliquez en G & en L; l'on trouvera que cette puissance & ce poids doivent ici être entr'eux en raison reciproque des perpendiculaires tirées du point H sur leurs directions EG & FL; c'est-à-dire, lorsque ces directions sont paralleles, comme HL à HG, ou bien (en faisant HI parallele à ces directions, & par le centre A l'horizontale MN) comme IN à IM;

IM ; au lieu que dans l'usage ordinaire où cette Machine tourneroit autour de son centre A sur un pivot fixe (faisant abstraction du frottement qu'il y auroit) la puissance E seroit toujours au poids F, quelques directions qu'ils eussent, comme le rayon AN du rouleau HN au rayon AM de la poulie : ce qui demande un surcroît de forces dans la puissance E d'autant plus considerable que les bras de gruaux CD font un plus grand angle avec l'horison ; parce qu'alors IA en devenant plus grande, le rapport de IN à IM en surpasse aussi d'autant plus celui de AN à AM.

Par exemple, supposé que ces bras de gruaux CD fassent un angle de 30. deg. avec l'horison auquel les directions EG & FL soient perpendiculaires, l'angle IHA, étant aussi pour lors de 30. degrez, IA sera la moitié de AN : faisant donc AN de deux parties, dont le rayon AM en contienne, si l'on veut, 10. AN sera en ce cas à MA, comme 2. à 10. & IN sera à MI, comme 3. à 9. Ainsi si le poids F étoit, par exemple, de 100. liv. dans l'usage ordinaire où le point fixe seroit en A, la puissance E ne seroit que de 20. liv. & dans l'usage present elle devroit être de 33. liv. $\frac{1}{3}$. Si l'angle de ces bras de gruaux avec l'horison étoit de 50. deg. l'angle IHA étant aussi pour lors de 50. deg. AI seroit de 1. $\frac{1830127}{2500000}$. ce qui seroit IN de 3. $\frac{1830127}{2500000}$. & IM de 8. $\frac{669873}{2500000}$. ainsi la puissance E seroit alors de 45. liv. $\frac{7868415}{20669873}$, ce qui est plus du double de ce qu'elle seroit dans l'usage ordinaire. Si l'angle de gruaux avec l'horison étoit de 70. deg. par un semblable changement, la puissance E seroit de 47. liv.

$\frac{15674061}{20301537}$. & ainsi toujours en augmentant à mesure que cet angle augmentera, jusqu'à ce qu'enfin ces bras de gruaux soient perpendiculaires à l'horison ; & alors l'appui du rouleau HA se trouvant en B, comme dans la Machine où ce rouleau ne seroit soutenu qu'avec des cordes perpendiculaires KB, la puissance E seroit au poids F,

comme le diamètre BN du rouleau HN à BM moitié de la différence qui est entre ce diamètre & celui de la poulie ; c'est-à-dire ici , comme 4. à 8. ou comme 50. liv. contre 100. liv. & par conséquent une fois & demi plus grande qu'il n'auroit fallu dans l'usage ordinaire. Après cela je laisse à juger s'il y a du gain ou de la perte à sauver ainsi les frottemens.

Il est vrai que le poids F doit monter ici plus vite que dans les Machines ordinaires , puisqu'il monte ici , & parce que sa corde s'entortille au rouleau HN , & parce que ce rouleau lui-même monte encore ; au lieu que dans les Machines ordinaires ce poids ne monte que par l'entortillement de sa corde autour de ce rouleau : mais ce surcroît de vitesse n'est point du tout à comparer à cette augmentation de puissance , vû qu'on est bien plus maître du tems que des forces : outre qu'à toute rigueur , c'est-à-dire , toute vitesse bien comptée , cette augmentation de forces seroit encore assez considerable pour faire douter s'il n'y a point plus de perte que de gain à sauver ainsi les frottemens. En effet à prendre même la plus grande vitesse que ce poids puisse avoir avec ce rouleau mobile ; c'est-à-dire , à la prendre double de ce qu'elle seroit si ce rouleau avoit son axe fixe ; la puissance E ne devroit être alors tout au plus que double de ce qu'elle seroit dans ce dernier état ; & par conséquent n'étant ici que de 20. liv. pour l'axe fixe de ce rouleau , elle ne devroit être tout au plus que de 40. liv. sur cet axe mobile. On la vient cependant de trouver de 50. liv. c'est donc 10. liv. pour les frottemens que causeroient à ce rouleau fixe une puissance de 20. liv. contre un poids de 100. Ce qui non seulement ici , où l'on suppose AM à AN , comme 10. à 2. mais encore dans tout autre rapport de ces rayons , fait assez voir qu'une telle puissance est toujours à ce qu'il en coûte pour sauver ainsi les frottemens , *comme la différence du rayon de la roue à celui de son rouleau , est au diamètre entier de ce même rouleau.* Et cela , comme l'on voit , sans compter ce qu'il faut encore ici dépenser de forces pour des vitesses dont on se passeroit bien.

DEMONSTRATION.

La force de la puissance E feroit au poids F sur le point A comme AM à MA, ou comme BN à 2MA : & ce poids F lui feroit sur l'appui B comme MB à BN : la force de la puissance E sur ce point A feroit donc à celle qu'il lui faudroit sur B, comme BM à 2MA, retirant donc 2BM de 2MA, comme l'on vient de faire 40. de 50. pour fournir à la vitesse qu'on trouve ici double de ce qu'elle feroit sur ce point A. Ce reste sera donc 2BA ou BA pour la mesure de ce qu'il en faudroit encore, toute vitesse bien comptée par ces frottemens. Ainsi la force de la puissance E sur le point A devroit toujours être à celle des frottemens qu'elle y causeroit, comme BM à BN, c'est-à-dire, comme la différence du rayon de la roue à celui de son rouleau, est au diamètre entier de ce même rouleau. C. Q. F. D.

Je ne compte point non plus ce qu'il faudroit encore de forces pour enlever la poulie avec son rouleau, qu'on a jusqu'ici regardé comme sans pesanteur. Voici le tout en general, & pour tous les cas possibles.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit la puissance E appliquée suivant EC à la poulie CG, dont l'axe est un rouleau BA tellement soutenu avec les cordes BK sur les bras de gruaud IT, que ces cordes, aussi-bien que AF, qui est celle du poids F, s'entortillent nécessairement autour de ce rouleau dès que l'on fera tourner la roue CG conformément à l'effort de la puissance E. Quelque angle OPA que la direction OP du centre de gravité O commun à la roue CG & à son rouleau BA, fasse avec la direction AF du poids F : quelque angle aussi PZC que la direction PQ de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse avec CE direction de la puissance E ; je dis qu'en cas d'équilibre,

1°. La puissance E sera à la charge des bras de gruaud IT sur lesquels le rouleau BA est appuyé, comme le produit des sinus des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles KHZ & QZE.

Fig. 401.
402. 403.

2°. La puissance E sera à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK , c'est-à-dire, la résistance des crochets K , comme le produit des sinus des angles KHO & $\angle ZH$ au produit des sinus des angles ZHO , & $\angle ZE$.

3°. La puissance E sera à tout le poids de la poulie CG & de son rouleau BA , comme le produit des sinus des angles $\angle ZH$ & OPA , au produit des sinus des angles EZH & ZPA .

4°. La puissance E sera au poids F , comme le produit des sinus des angles $\angle ZH$ & OPA , au produit des sinus des angles EZH & OPZ .

DEMONSTRATION.

Pour avoir les angles des directions AP , OP , CE & KB , concevons-les toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe du rouleau BA , de même que seroient les coupes faites sur ce plan par autant d'autres plans qui passant par ces lignes, lui seroient perpendiculaires. De-là quelque angle APO que fassent entr'elles AP & OP directions du poids F , & de la Machine CA faite de la poulie CG & du rouleau BA : il est clair par toutes les propositions de la nouvelle Mécanique, que tout ce que cette Machine en reçoit d'impression, non seulement se fait suivant la diagonale PQ de quelque parallélogramme MN , dont les côtes PM & PN sont pris sur les directions AP , OP , mais encore que cette impression composée sur la Machine CA , est la même (*Corol. 6. Lem. 3.*) que si au lieu de la pesanteur de cette Machine & du poids F , elle étoit seulement poussée suivant PQ par une force égale à celle que lui causent ces deux ensemble. On peut donc regarder cette Machine ainsi tirée en même tems par sa pesanteur, par le poids F , & par la puissance E , comme si elle ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée suivant PQ & par la puissance E appliquée suivant CE : ainsi quelque angle QZE que ces directions fassent entr'elles, il faut encore pour la même raison que ce que la Machine CA recevra d'impression de ces deux forces, c'est-à-dire, du concours d'action de sa pesanteur, de

celle du poids F , & de la puissance E , suivie de même la diagonale ZX de quelque autre parallélogramme VY , dont les côtes ZV & ZY soient pris sur PQ & CE prolongées ; & de plus que cette commune impression soit la même sur cette Machine, que si au lieu de ces trois forces, elle étoit seulement poussée suivant ZX par une autre force égale à celle que lui causent ces trois ensemble. On peut donc encore regarder cette Machine comme n'ayant d'impression de toute sa charge, que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner suivant ZX contre la résistance du crochet K ; & alors ainsi chargée, elle sera comme un poids d'une direction suivant ZX que le crochet K suivant KB qui rencontre ZX prolongée en H , retiendra sur la surface IT ; de sorte qu'en cas d'équilibre, il faudra (*Th. 26.*) que de l'impression suivant HZ , que l'on peut encore regarder comme composée de deux autres, dont l'une suivroit KH prolongée vers β , & l'autre une ligne $OH\omega$ perpendiculaire au bras de gruaui IT , (la résistance du crochet K soutenant celle qui suivroit $H\beta$) il n'en reste à cette Machine CA que suivant ligne $H\omega$.

Achevant donc le parallélogramme $\omega\beta$, dont la diagonale $H\omega$ se trouve dans la direction HZ , l'on trouvera (*Corol. 1. Lem. 3.*) qu'en cas d'équilibre la charge des bras de gruaui representez par IT , doit être à la résistance des crochets K , & à l'impression suivant HZ de la charge entière de la Machine CA , comme le côté $H\omega$ au côté $H\beta$, & à la diagonale $H\omega$ du parallélogramme $\omega\beta$; de sorte que cette impression totale suivant HZ , la résistance des crochets K , & la charge des bras de gruaui IT , sont alors entr'elles comme les lignes $H\omega$, $H\beta$, & $H\omega$; c'est-à-dire, comme les sinus des angles $\omega H\beta$, $\omega H\omega$, & $\beta H\omega$; ou comme les sinus des angles KHO , ZHO , & KHZ .

Or à cause que cette impression suivant HZ fuit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallélogramme VY , dont les côtes ZY & ZV ont été pris sur les directions des forces dont

des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & OPZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

De-la suppléant les figures de tous les autres cas, il seroit aisé de tirer une infinité de Corollaires, qui découvroient encore non seulement en general les rapports qui sont entre la charge des bras de gruaux IT, la résistance des crochets K, la pesanteur de la Machine CA, & le poids F dans toutes les combinaisons possibles; mais aussi le détail tant de ces rapports que des précédens pour toutes les inclinaisons possibles des bras de gruaux IT, & pour toutes les directions imaginables des cordes BK, de la puissance E, du poids F, & de la Machine CA. Je passe tout cela, parce qu'il est plus long que difficile à conclure; outre que le seul cas des directions paralleles que j'ai d'abord examiné, suffit avec quelques experiences sur les frottemens, pour juger s'il y a du gain ou de la perte à les sauver ainsi.

Outre cette maniere de sauver les frottemens de la Machine CA, l'on pourroit encore en imaginer une autre, où les crochets K seroient vers le bas, & où cette machine devroit descendre pour enlever le poids F; & cette maniere seroit d'autant au-dessus de l'autre, que, 1°. l'on n'auroit plus cette machine à enlever; 2°. au contraire elle aideroit elle-même par sa pesanteur à enlever le poids F; 3°. regardant la puissance E & le poids F appliquez en G & en L à un Levier HG, dont l'appui fût en H, l'on trouveroit aussi que le bras de la puissance E seroit à celui du poids F en plus grande raison que dans la maniere de M. Perault: mais aussi d'un autre côté on ne sauveroit pas tous les frottemens de la machine entiere; puisque la poulie I, sur laquelle la corde du poids F doit passer, y seroit toujours sujette.

FIG. 404

PROPOSITION II.

En ce cas le rapport general de la puissance E seroit, 1°. à la charge des bras de gruaux IT, comme le produit des sinus

des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles KHZ & $QZE : 2^\circ$. à la résistance des crochets K , comme le produit des sinus des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles ZHO & $QZE : 3^\circ$. à tout le poids de la machine faite de la poulie CG & de son rouleau BA , comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & $APZ : 4^\circ$. au poids F , comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & $OPZ : 5^\circ$. à la charge de la poulie I , comme le produit des sinus des angles QZH , OPA , & ADI au produit des sinus des angles EZH , OPZ , & ADF .

DEMONSTRATION.

Tout cela se démontrera encore dans toute son étendue par la démonstration précédente, excepté l'art. 5. pour lequel il faut de plus ajouter suivant la part. 2. du Th. 14. que le poids F est à la charge de la poulie I , comme le sinus de l'angle ADI , au sinus de l'angle ADF ; afin que multipliant cette rangée de proportionnelles par celle de l'art. 4. où la puissance E est au poids F , comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & OPZ ; la puissance E se trouve à la charge de la poulie I , comme le produit des sinus des angles QZH , OPA , & ADI , au produit des sinus EZH , OPZ , & ADF ; c'est-à-dire (dans l'hypothèse ordinaire, où les directions PO & DF de la pesanteur de la machine CA & du poids F , passent pour parallèles) comme le produit des sinus des angles QZH & ADI au produit des sinus des angles EZH & OPZ .

La combinaison & le détail de tous ces rapports sont encore plus longs que difficiles; outre qu'il n'est pas ici tout-à-fait question de cette dernière manière de sauver les frottemens. Je passe donc à l'autre.

PROP.

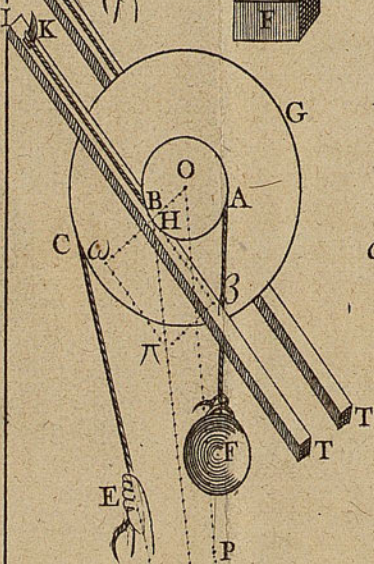
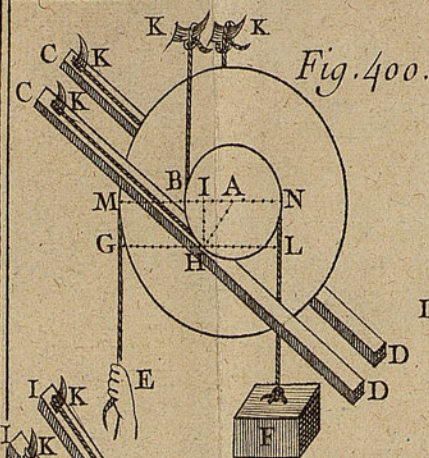


Fig. 401.

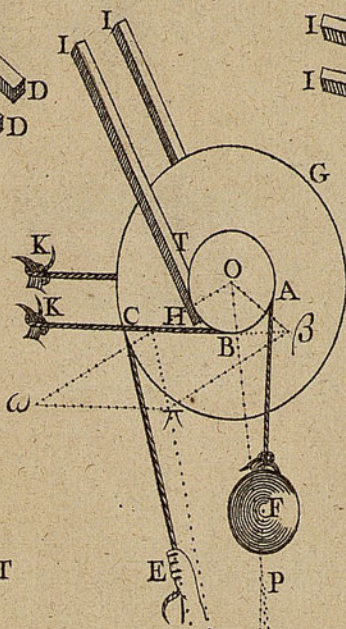
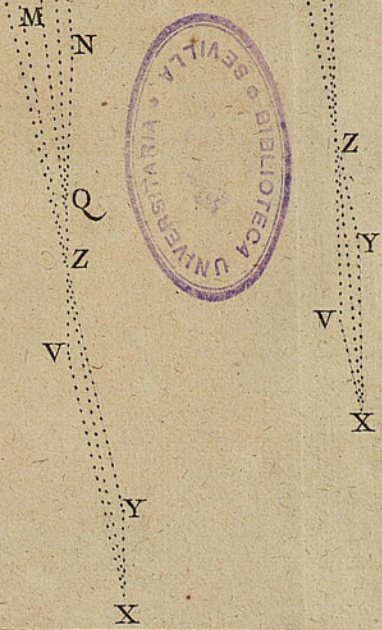
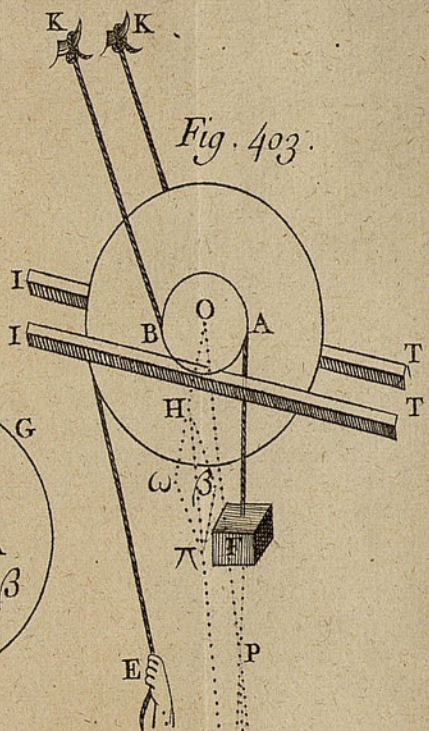


Fig. 402.



PROPOSITION III.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la première proposition, quelque angle OPC que la direction OP du centre de gravité O commun à la roue CG & à son rouleau BA , fasse avec la direction CP de la puissance E : quelque angle aussi PZA que la direction PZ de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse avec ZA direction du poids F : je dis encore qu'en cas d'équilibre,

FIG. 405.

1°. La puissance E est à la charge des bras de gruaux IT , sur lesquels le rouleau BA est appuyé, comme le produit des sinus des angles OPZ , HZA , & KHO , au produit des sinus des angles OPC , PZA , & KHZ .

2°. La puissance E est à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK , c'est-à-dire, à la résistance des crochets K , comme le produit des sinus des angles OPZ , HZA , & KHO , au produit des sinus des angles OPC , PZA , & ZHO .

3°. La puissance E est à tout le poids de la poulie CG & de son rouleau BA , comme le sinus de l'angle OPZ à celui de l'angle CPZ .

4°. La puissance E est au poids F , comme le produit des sinus des angles OPZ & HZA , au produit des sinus des angles OPC & PZH .

DEMONSTRATION.

Par un raisonnement tout semblable à celui des démonstrations précédentes, quelque angle CPO que les directions CP & OP de la puissance E & de la machine CA , fassent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impression commune ; & faisant sur leurs directions particulières le parallélogramme MN , dont la diagonale soit sur PQ ; l'on trouvera que la puissance E , le poids de la machine CA , & la force de ce qui résulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ , sont entr'eux comme les sinus des angles OPQ , CPQ , & OPC . De même quelque angle PZA que PQ prolongée fasse avec

la direction ZA du poids F, faisant sur ces lignes le parallélogramme VY, dont la diagonale ZX prolongée passe par le point H, où la corde KB concourt avec la ligne O ω tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement sur le bras de gruaud IT; l'on trouvera encore que le poids F, la force qui suit PQ, & celle de l'impression qui résulte de leur concours d'action suivant ZX ou HZ, sont entr'eux comme les sinus des angles PZH, AZH, & PZA. Enfin sur O ω & KB prolongée achevant le parallélogramme $\omega\beta$, dont la diagonale H π soit sur HZ, l'on aura encore de la même manière l'impression qui suit ainsi ZX ou HZ, la charge des bras de gruaud IT, & la résistance des crochets K entr'elles comme les sinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici sous un même crochet:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{OPQ.} \int \text{OPC.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{impression suiv. ZX} :: \int \text{HZA.} \int \text{PZA.} \\ \text{Impref. suiv. ZX.} & \text{ch. des bras de gr. IT} :: \int \text{KHO.} \int \text{KHZ.} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{OPQ.} \int \text{OPC.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{impression suiv. ZX} :: \int \text{HZA.} \int \text{PZA.} \\ \text{Impref. suiv. ZX.} & \text{résist. des crochets K} :: \int \text{KHO.} \int \text{ZHO.} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{poids de la Mach. CA} :: \int \text{OPQ.} \int \text{CPQ.} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{OPQ.} \int \text{OPC.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{poids F.} :: \int \text{HZA.} \int \text{PZH.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

L'on aura, 1°. la puissance E à la charge des bras de gruaud IT, comme le produit des sinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des sinus des angles OPC, PZA, & KHZ. 2°. La puissance E à la résistance des crochets K, comme le produit des sinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des sinus des angles OPC, PZA, & ZHO. 3°. La puissance E à tout le poids de la machine faite de la roue

CG & de son rouleau BA, comme le sinus de l'angle OPQ au sinus de l'angle CPQ. 4°. La puissance au poids F, comme le produit des sinus des angles OPQ & HZA au produit des sinus des angles OPC & PZH. Ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N I V.

Toutes choses demeurant encore les mêmes que dans la proposition précédente, quelque angle APC que la direction AP du poids F, fasse avec la direction CP de la puissance E : quelque angle aussi PZO que la direction PQ de l'impression commune qui résulte du concours d'action, fasse avec ZO direction du centre de gravité O commun à la roue CG & à son rouleau BA ; je dis encore qu'en cas d'équilibre,

Fig. 406.

1°. La puissance E est à la charge des bras de grueau IT, sur lesquels le rouleau BA est appuyé, comme le produit des sinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des sinus des angles CPA, PZO, & KHZ.

2°. La puissance E est à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'est-à-dire, à la résistance des crochets K, comme le produit des sinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des sinus des angles CPA, PZO, & ZHO.

3°. La puissance E est à tout le poids de la poulie CG & de son rouleau BA, comme le produit des sinus des angles APQ, & HZO, au produit des sinus des angles CPA & PZH.

4°. La puissance E est au poids F comme le sinus de l'angle APQ à celui de l'angle CPQ.

D E M O N S T R A T I O N.

Par un raisonnement encore tout semblable à celui des démonstrations précédentes, quelque angle CPA que les directions CP & AP de la puissance E & du poids F, fassent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impression commune, & faisant sur leurs directions particulières le parallélogramme MN, dont la diagonale soit sur PQ, l'on trouvera que la puissance E, le poids F, & la

G g g ij

force de ce qui résulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ, sont entr'eux comme les sinus des angles APQ, CPQ, & CPA. De même quelque angle PZO que PQ prolongée fasse avec la direction ZO de la machine CA, faisant sur ces lignes le parallélogramme VY, dont la diagonale ZX prolongée passe par le point H où la corde KB concourt avec la ligne O ω , tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement sur le bras de gruaud IT; l'on trouvera encore que le poids de la machine CA, la force qui suit PQ, & celle de l'impression qui résulte de leur concours d'action suivant ZX ou ZH, sont entr'eux comme les sinus des angles PZH, HZO, & PZO. Enfin sur O ω & KB prolongée faisant le parallélogramme $\omega\beta$ dont la diagonale H ω soit sur HZ; l'on aura encore de la même manière l'impression qui suit ainsi ZX ou HZ, la charge des bras de gruaud IT, & la résistance des crochets K entr'elles, comme le sinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici sous un même crochet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{APQ.} \int \text{CPA.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{impression suiv. ZX} :: \int \text{HZO.} \int \text{PZO.} \\ \text{Impref. suiv. ZX.} & \text{ch. des bras de gr. IT} :: \int \text{KHO.} \int \text{KHZ.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{APQ.} \int \text{CPA.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{impression suiv. ZX} :: \int \text{HZO.} \int \text{PZO.} \\ \text{Impref. suiv. ZX.} & \text{résist. des crochets K} :: \int \text{KHO.} \int \text{ZHO.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{impression suiv. PQ} :: \int \text{APQ.} \int \text{CPA.} \\ \text{Impref. suiv. PQ.} & \text{poids de la Mach. CA} :: \int \text{HZO.} \int \text{PZH.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Puissance E.} & \text{poids E.} \end{array} \right. :: \int \text{APQ.} \int \text{CPQ.}$$

L'on aura, 1°. la puissance E à la charge des bras de gruaud IT, comme le produit des sinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des sinus des angles CPA,

PZO, & KHZ. 2°. La puissance E à la résistance des crochets K, comme le produit des sinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des sinus des angles CPA, PZO, & ZHO. 3°. La puissance E à tout le poids de la machine faite de la roue CG & de son rouleau BA, comme le produit des sinus des angles APQ & HZO au produit des sinus des angles CPA & PZH. 4°. La puissance E au poids F, comme le sinus de l'angle APQ au sinus de l'angle CPQ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je ne dis rien encore de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces deux propositions, en suppléant, comme dans la première, les figures de tous les cas que leur universalité comprend. Il suffit de faire remarquer que l'usage de la première proposition est (la pesanteur de la machine CA & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la puissance E) de faire trouver la valeur de la puissance E, &c. L'usage de la troisième est (la puissance E, & la pesanteur de la machine CA étant donnée avec leurs directions, & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F, &c. L'usage de la quatrième est (la puissance E & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la machine CA) de faire trouver la pesanteur de la machine CA, &c.

Voilà, ce me semble, tout ce que l'on peut demander par rapport à l'usage présent de la machine CA. Je passe donc au rouleau que M. Perault fait encore agir sans frottement au pied de sa machine, pour en augmenter, dit-il, la force.

Ce rouleau est GG tellement lié dans les cordes HI, Fig. 407. que lorsqu'on le fait tourner en abaissant les Leviers LN, les cordes I s'entortillent à l'entour, les cordes H se dé-tortillent, & le rouleau descend. D'où il arrive que si la puissance E tient assez ferme contre le poids E, la corde ED pour l'empêcher de glisser sur ce rouleau, ce poids se trouve obligé de monter, & parce que ce rouleau descend, & parce que sa corde doit aussi pour lors s'entortiller autour de ce même rouleau.

Il est encore manifeste que dans cet usage du rouleau GG, son mouvement ne se fait point sur son axe, mais seulement sur une ligne qui joint les points où les cordes H & I se rencontrent; c'est-à-dire (en regardant ce rouleau de profil) seulement comme sur l'extrémité K de cette ligne, avec un levier LK, auquel sont appliquez en L, G, & M, la puissance L, le poids du rouleau G, & le poids F, dont je suppose la corde DE retenue par la puissance E sur le rouleau G, de même que si elle y étoit seulement attachée. Ainsi, 1°. le poids du rouleau G, & ce qu'il soutient pour sa part du poids F, doivent ici être entr'eux en raison reciproque des perpendiculaires tirées de l'appui K sur leurs directions. 2°. La puissance L, & le reste du poids F, sont aussi entr'eux en raison reciproque des perpendiculaires tirées du même point K sur leurs directions: de sorte que lorsque ces directions sont parallèles à la partie de corde KI ou KH, dont l'extrémité sert d'appui K, ces perpendiculaires se confondant avec le diamètre KN & le levier LN, que je lui suppose en ligne droite; le poids du rouleau G fera à ce qu'il soutient pour sa part du poids F, comme le diamètre KN à sa moitié KG; & la puissance L au reste du poids F, comme le diamètre KN à la somme LK faite de ce diamètre & du levier LN.

D'où il s'ensuit que si en ce cas le diamètre KN étoit de 4. parties, dont le levier LN fût (si l'on veut) de 10. que de plus le poids F fût de 100. liv. & la pesanteur du rouleau G de 10. liv. puisque cette pesanteur du rouleau G est à ce qu'elle soutient du poids F, comme le diamètre NK à sa moitié GK, c'est-à-dire, comme 2. à 1. cette partie du poids F que la pesanteur du rouleau G soutiendrait pour sa part, seroit de 5. liv. ainsi ce reste soutenu par la puissance L seroit de 95. liv. lesquelles étant aussi à cette puissance L, comme LK à NC, c'est-à-dire ici, comme 14. à 4. cette même puissance, quoique secourue de la pesanteur du rouleau G, seroit encore de 27. liv. $\frac{1}{7}$ au lieu que dans l'usage ordinaire de ce rouleau,

où son axe G feroit fixe, cette puissance L ne feroit que de 16. liv. $\frac{2}{3}$. c'est-à-dire, près de la moitié moins qu'ici. Voici le tout en general, & pour tous les cas possibles.

PROPOSITION V.

Soit la puissance L appliquée par le moyen d'un levier LN au rouleau G lié, comme l'on vient de dire, suivant $HNMI$ dans une corde attachée par ses extrémités aux crochets H & I , & auquel le poids F soit aussi appliqué avec une corde DM , laquelle entortillée aussi autour, soit retenue dessus par quelque puissance ou autrement: quelque angle LPG que fassent entr'elles les directions LP & GP de la puissance L , & du rouleau G : quelque angle aussi $\angle ZD$ que la direction PQ de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse dans sa rencontre en Z avec DM direction du poids F : Je dis qu'en cas d'équilibre,

FIG. 409.
jusqu'à 412.

1°. La puissance L est au poids du rouleau G , comme le sinus de l'angle ZPG , au sinus de l'angle ZPL .

2°. La puissance L est au poids F , comme le produit des sinus ZPG & DZK , au produit des sinus des angles LPG & $\angle ZK$.

3°. La puissance L est à la résistance du crochet I , comme le produit des sinus des angles ZPG , DZK , & HKI , au produit des sinus des angles LPG , $\angle ZD$, & ZKH .

4°. La puissance L est à la résistance du crochet H , comme le produit des sinus des angles ZPG , DZK , & HKI , au produit des sinus des angles LPG , $\angle ZD$, & ZKI .

DEMONSTRATION.

Quelqu'angle LPG que fassent entr'elles LP & GP directions de la puissance L & du rouleau G , équipé comme il est ici, il est clair par toutes les propositions de la Nouvelle Mécanique, que ce que ce rouleau en reçoit d'impression, non seulement se fait suivant la diagonale PQ de quelque parallélogramme RS , dont les côtés soient pris sur les directions de LP & de GP , mais encore

que cette impression composée sur le rouleau G , est la même (*Corol. 2. Lem. 3.*) que si au lieu de la puissance L & de la pesanteur de ce rouleau, il étoit seulement poussé suivant PQ par une force égale à celle que lui causent ces deux ensemble : l'on peut donc regarder ce rouleau ainsi tiré en même tems par sa pesanteur, par la puissance L , & par le poids F , comme s'il ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée suivant PQ , & par le poids F appliqué suivant DM ; ainsi quelque angle DZQ que ces directions fassent entr'elles, il faut encore pour la même raison que ce que le rouleau G recevra d'impression de ces deux forces, c'est-à-dire, du concours d'action de sa pesanteur, de celle du poids F , & de la puissance L , suive de même la diagonale ZX de quelque autre parallélogramme AB , dont les côtes soient pris sur PQ & DM prolongées, & que cette commune impression soit la même sur ce rouleau; que si au lieu de ces trois forces, il étoit seulement poussé suivant ZX par une autre force égale à celle que lui causent ces trois ensemble. On peut donc encore regarder ce rouleau comme n'ayant d'impression en tout que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner suivant ZX contre la résistance des cordes HK & KI .

Ainsi cette direction ZX prolongée doit passer (*Corol. 15. Lem. 3.*) par le point K où ces cordes concourent; & en cas d'équilibre (*Corol 5. Th. 1.*) la force de cette impression suivant ZX , doit être à la résistance de chaque crochet I & K , comme le sinus de l'angle HKI à chacun des sinus des angles ZKH & ZKI .

Or à cause que cette impression suivant ZK suit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallélogramme AB , dont les côtes ZA & ZB ont été pris sur les directions des forces dont cette impression est composée, c'est-à-dire, sur les directions DM & QZ du poids F , & de la force qui suit PQ ; cette impression suivant ZX doit être (*Lem. 3. part. 1.*) au poids F , & à la force qui suit ZQ , comme la diagonale ZX du parallélogramme AB à ses côtes ZA & ZB :
de

de sorte que cette impression suivant ZX , le poids F , & la force qui suit ZQ , sont entr'eux comme ZX , ZA , & ZB , ou comme les sinus des angles QZD , QZK , & DZK .

De plus la force qui suit ZQ , suivant aussi (*Hyp.*) la diagonale PQ du parallélogramme RS , dont les côtes PS & PR ont été pris sur les directions LP & GP de la puissance L & du rouleau G ; cette force suivant ZQ , la puissance L , & le poids du rouleau G , pour la même raison, sont encore entr'eux comme les sinus des angles LPG , ZPG , & ZPL .

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici sous un même crochet :

$$\{ \text{Puissance } L. \quad \text{poids du roul. } G :: \int ZPG. \int ZPL.$$

$$\{ \text{Puissance } L. \quad \text{impres. suiv. } ZQ :: \int ZPG. \int LPG. \\ \{ \text{Impr. suiv. } ZQ. \quad \text{poids } F :: \int DZK. \int QZK.$$

$$\{ \text{Puissance } L. \quad \text{impres. suiv. } ZQ :: \int ZPG. \int LPG. \\ \{ \text{Impr. suiv. } ZQ. \quad \text{impres. suiv. } ZX :: \int DZK. \int QZD. \\ \{ \text{Impr. suiv. } ZX. \quad \text{résist. du croch. } I :: \int HKI. \int ZKH.$$

$$\{ \text{Puissance } L. \quad \text{impres. suiv. } ZQ :: \int ZPG. \int LPG. \\ \{ \text{Impr. suiv. } ZQ. \quad \text{impres. suiv. } ZX :: \int DZK. \int QZD. \\ \{ \text{Impr. suiv. } ZX. \quad \text{résist. du croch. } H :: \int HKI. \int ZKI.$$

L'on aura, 1°. la puissance L au poids du rouleau G , comme le sinus de l'angle ZPG au sinus de l'angle ZPL . 2°. La puissance L au poids F , comme le produit des sinus des angles ZPG & DZK , au produit des sinus des angles LPG & QZK . 3°. La puissance L à la résistance du crochet I , comme le produit des sinus des angles ZPG , DZK , & HKI , au produit des sinus des angles LPG , QZD , & ZKH . 4°. La puissance L à la résistance du crochet H , comme le produit des sinus des angles ZPG , DZK , & HKI , au produit des sinus des angles LPG , QZD , & ZKI . *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VI.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la proposition précédente, quelque angle MZG que fassent entr'elles les directions DM & GZ du poids F & du rouleau G : quelque angle aussi LPZ que la direction ZX de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse dans sa rencontre en P avec LP direction de la puissance L : Je dis encore qu'en cas d'équilibre :

1°. La puissance L est au poids du rouleau G , comme le produit des sinus des angles ZPK & MZG , au produit des sinus des angles LPK & MZP .

2°. La puissance L est au poids F , comme le produit des sinus des angles ZPK & MZG , au produit des sinus des angles LPK & PZG .

3°. La puissance L est à la résistance du crochet I , comme le produit des sinus des angles ZPK & IKH , au produit des sinus des angles LPZ & PKH .

4°. La puissance L est à la résistance du crochet H , comme le produit des sinus des angles ZPK & IKH , au produit des sinus des angles LPZ & PKI .

DEMONSTRATION.

Par un raisonnement tout semblable à celui de la démonstration précédente, quelque angle MZG que les directions GZ & MZ du rouleau G & du poids F , fassent entr'elles, prenant ZX pour la direction de leur impression commune, & faisant sur leurs directions particulières le parallélogramme AB , dont la diagonale soit sur ZX ; l'on trouvera que la pesanteur du rouleau G , le poids F , & la force de ce qui résulte d'impression de leur concours d'action suivant ZX , sont entr'eux comme les sinus des angles MZP , PZG , & MZG . De même, quelque angle LPZ que ZX prolongée fasse avec la direction LP de la puissance L , faisant sur ces lignes le parallélogramme RS , dont la diagonale PQ prolongée passe

par le point K, où les cordes HK & IK concourent; l'on trouvera encore que la puissance L, la force qui suit ZX, & celle de l'impression qui résulte de leur concours d'action suivant PQ, sont entr'elles comme les sinus des angles ZPK, LPK, & LPZ. Enfin l'on trouvera encore (*Corol. 5. Th. 1.*) que la force qui suit ainsi PK, doit être à la résistance de chaque crochet I & H, comme le sinus de l'angle IKH à chacun des sinus des angles PKH & PKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & les multipliant deux à deux selon l'ordre de leurs termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \\ \text{Impr. suiv. ZX.} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{impres. suiv. ZX} \\ \text{pesant. du roul. G} \end{array} :: \int \text{ZPK.} \int \text{LPK.} \\ \int \text{MZG.} \int \text{M ZP.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \\ \text{Impr. suiv. ZX.} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{impres. suiv. ZX} \\ \text{poids F} \end{array} :: \int \text{ZPK.} \int \text{LPK.} \\ \int \text{MZG.} \int \text{P ZG.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \\ \text{Impr. suiv. PQ.} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{impres. suiv. PQ} \\ \text{résist. du croch. I} \end{array} :: \int \text{ZPK.} \int \text{LPZ.} \\ \int \text{IKH.} \int \text{PKH.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \\ \text{Impr. suiv. PQ.} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{impres. suiv. PQ} \\ \text{résist. du croch. H} \end{array} :: \int \text{ZPK.} \int \text{LPZ.} \\ \int \text{IKH.} \int \text{PKI.}$$

L'on aura, 1°. la puissance L au poids du rouleau G, comme le produit des sinus des angles ZPK & MZG, au produit des sinus des angles LPK & MZP. 2°. La puissance L au poids F, comme le produit des sinus des angles ZPK & MZG, au produit des sinus des angles LPK & PZG. 3°. La puissance L à la résistance du crochet I, comme le produit des sinus des angles ZPK & IKH, au produit des sinus des angles LPZ & PKH. 4°. La puissance L à la résistance du crochet H, comme le produit des sinus des angles ZPK & IKH, au produit des sinus des angles LPZ & PKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VII.

Toutes choses demeurant encore les mêmes que dessus, quelque angle LPM que fassent entr'elles les directions LP & DM de la puissance L & du poids F : quelque angle aussi PZG que la direction PZ de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse dans sa rencontre en Z avec ZG direction du rouleau G ; Je dis encore qu'en cas d'équilibre,

1°. La puissance L est au poids du rouleau G , comme le produit des sinus des angles MPZ & GZK , au produit des sinus des angles LPM & PZK .

2°. La puissance L au poids F , comme le sinus de l'angle MPZ , au sinus de l'angle LPZ .

3°. La puissance L à la résistance du crochet I , comme le produit des sinus des angles MPZ , GZK , & IKH , au produit des sinus des angles LPM , GZP , & ZKH .

4°. La puissance L à la résistance du crochet H , comme le produit des sinus des angles MPZ , GZK , & IKH , au produit des sinus des angles LPM , GZP , & ZKI .

DEMONSTRATION.

Par un raisonnement encore tout semblable à celui de la démonstration précédente, quelque angle LPM que les directions LP & DM de la puissance L & du poids F fassent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impression commune, & faisant sur leurs directions particulières le parallélogramme RS , dont la diagonale soit sur PQ , l'on trouvera que la puissance L , le poids F , & la force de ce qui résulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ , sont entr'eux comme les sinus des angles MPZ , LPZ , & LPM . De même quelque angle PZG que PQ prolongée fasse avec la direction ZG du rouleau G , faisant sur ces lignes le parallélogramme AB , dont la diagonale ZX prolongée passe par le point K où les cordes HK & IK concourent; l'on trouvera encore que la pesanteur du rouleau G , la force qui suit PQ , &

celle de l'impression qui résulte de leur concours d'action suivant ZX, sont entr'elles comme les sinus des angles PZK, GZK, & PZG. Enfin l'on trouvera encore que la force qui suit ainsi ZK, doit être à la résistance de chaque crochet I & H, comme le sinus de l'angle IKH à chacun des sinus des angles ZKH & ZKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on voit ici sous un même crochet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \quad \text{impres suiv. PQ} :: \int \text{MPZ.} \int \text{LPM.} \\ \text{Impr. suiv. PQ.} \quad \text{pesant. du roul. G} :: \int \text{GZK.} \int \text{PZK.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \quad \text{poids F.} \quad :: \int \text{MPZ.} \int \text{LPZ.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \quad \text{impres suiv. PQ} :: \int \text{MPZ.} \int \text{LPM.} \\ \text{Impr. suiv. PQ.} \quad \text{impres suiv. ZX} :: \int \text{GZK.} \int \text{GZP.} \\ \text{Impr. suiv. ZX.} \quad \text{resist. du croch. I} :: \int \text{IKH.} \int \text{ZKH.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance L.} \quad \text{impres suiv. PQ} :: \int \text{MPZ.} \int \text{LPM.} \\ \text{Impr. suiv. PQ.} \quad \text{impres suiv. ZX} :: \int \text{GZK.} \int \text{GZP.} \\ \text{Impr. suiv. ZX.} \quad \text{resist. du croch. H} :: \int \text{IKH.} \int \text{ZKI.} \end{array} \right.$$

L'on aura, 1°. la puissance L à la pesanteur du rouleau G, comme le produit des sinus des angles MPZ & GZK au produit des sinus des angles LPM & PZK. 2°. La puissance L au poids F, comme le sinus de l'angle MPZ au sinus de l'angle LPZ. 3°. La puissance L à la résistance du crochet I, comme le produit des sinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des sinus des angles LPM, GZP, & ZKH. 4°. La puissance L à la résistance du crochet H, comme le produit des sinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des sinus des angles LPM, GZP, & ZKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je n'entre point encore dans le détail de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces trois dernières propositions, en suppléant dans la sixième & la septième, comme dans la cinquième, les Figures de tous les cas que leur

universalité comprend. Il suffit encore de faire remarquer que l'usage de la cinquième proposition est (la puissance L & le poids du rouleau G étant donnez avec leurs directions ; & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F , &c. L'usage de la sixième est (le poids F & la pesanteur du rouleau G étant donnez avec leurs directions , & celle de la puissance L) de faire trouver la valeur de la puissance L , &c. L'usage de la septième est (la puissance L & le poids F étant donnez avec leurs directions , & celle du rouleau G) de faire trouver le poids du rouleau G , &c.

L'application de tout cela aux Machines en question, fera voir ce que l'on doit attendre de cet usage du rouleau G : ce que j'en ai dit pour le cas des directions paralleles immédiatement avant la cinquième proposition , doit déjà en avoir fait comprendre quelque chose.

FIG. 408.

Mais on le verra encore mieux si l'on fait reflexion que lorsqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir reprise, il faut encore plus de force dans la puissance L , que lorsqu'il le faut abaisser. Pour le comprendre, il faut considérer , 1°. *que la puissance E doit être plus grande que le poids F joint aux frottemens de sa corde sur le rouleau G , pour ne point se laisser emporter, lorsque , pour avoir reprise , il faut relever le levier LN , puisqu'elle doit alors surmonter tout ce que ce poids joint à ces frottemens fait de résistance pour empêcher sa corde de glisser.* 2°. *Au contraire la puissance E jointe à la résistance de ces frottemens , ne doit valoir que le poids F , pour empêcher sa corde de glisser sur le rouleau G , lorsqu'il est question de faire monter ce poids par l'abaissement du levier LN ; puisqu'il n'est alors besoin que de s'opposer à ce que ce poids fait d'efforts pour cela.*

De là il suit , 1°. que dans l'abaissement du levier LN , la puissance E doit être égale à la différence qui est entre le poids F , & la résistance du frottement de sa corde avec le rouleau G . 2°. Que ce qu'il faut de forces en tout dans la puissance E pour un abaissement plus une élévation du levier LN , est plus grand que deux fois ce poids F . 3°. Que

tout ce qu'il faut de forces à cette puissance pour l'élevation de ce levier, doit surpasser ce qu'il lui en faut pour l'abaissement de ce même levier, de plus de deux fois la résistance des frottemens de sa corde avec le rouleau G.

4°. Que dans l'élevation du levier LN la puissance L agissant contre la puissance E, de même que dans l'abaissement de ce levier, elle agit contre le poids F: & (toutes choses d'ailleurs égales) cette puissance L employant des forces proportionnelles aux résistances que ce poids & la puissance E lui font tour à tour; ce que cette puissance L emploie de forces dans l'abaissement du levier LN, doit être à ce qu'elle en emploie dans l'élevation de ce levier, comme le poids F (je ne compte point le frottement de la poulie D) est à ce même poids plus la résistance des frottemens de sa corde avec le rouleau G.

Il ne reste plus qu'un mot à dire de la roideur des cables qui se doivent entortiller autour des rouleaux dont on se fert ici. M. Perault prétend que *bien loin que la roideur que leur donne le poids qu'ils soutiennent, repugne à leur pliement; il est vrai qu'au contraire plus le cable est étendu par la pesanteur du fardeau, & plus il a de disposition à se plier. Car, dit-il, il faut considérer que, comme pour le pliement d'un cable il est nécessaire que les parties qui sont au côté où il se plie, s'acourcissent, il est certain que ce qui dispose ces parties à s'acourcir, dispose le cable à se plier. Or il est évident que plus les parties ont été allongées, & plus elles demandent à s'acourcir, quand la cause qui les allongeoit vient à cesser; & c'est ce qui arrive aux parties qui sont du côté vers lequel le cable se plie. Au contraire, ces parties ne cessant point d'être tendues, n'ont nulle liberté de se racourcir pour se plier. Il est vrai que la traction qui allongeoit les parties qui sont depuis le fardeau, ou le point de suspension jusqu'au rouleau, n'allonge plus celles qui sont à l'entour de ce rouleau. Mais aussi cette traction durant toujours, elle ne permet point non plus aux parties du cable qui sont du côté de son rouleau, de se racourcir lorsqu'elles s'y appliquent: ainsi elles ne cessent point pour cela de de-*

meurer toujours également tendues. Ce n'est donc point parce que ces parties internes se racourcissent d'elles-mêmes, que ce cable se plie autour de son rouleau, mais seulement parce qu'on l'y force en allongeant encore les parties externes, jusqu'à ce qu'elles puissent fournir à la convexité qu'elles doivent avoir pour cela; c'est-à-dire, en les allongeant encore de la différence du circuit de la base de leur rouleau, aux cercles qu'elles décrivent autour de lui. Il faut donc encore pour entortiller ces cables autour des rouleaux dont on se sert ici, une nouvelle force d'autant plus considerable, que ces cables sont naturellement plus roides, que le poids qu'ils soutiennent les a déjà plus tendus, qu'ils sont d'un plus grand diamètre, & que celui de leur rouleau est plus petit. Je n'entre point dans un plus grand examen de cette force, de peur de me trop écarter. Passons à l'application de tout ce que je viens de dire.



Fig. 404.

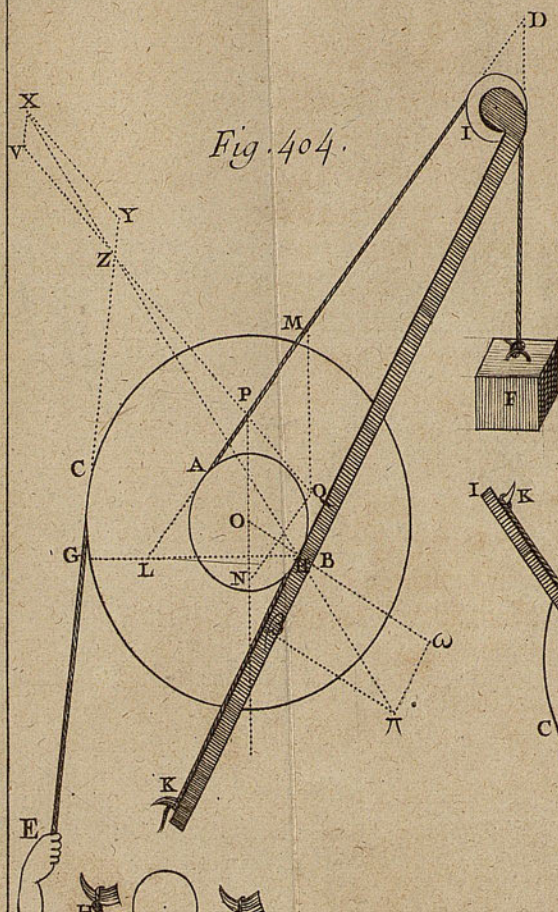


Fig. 405.

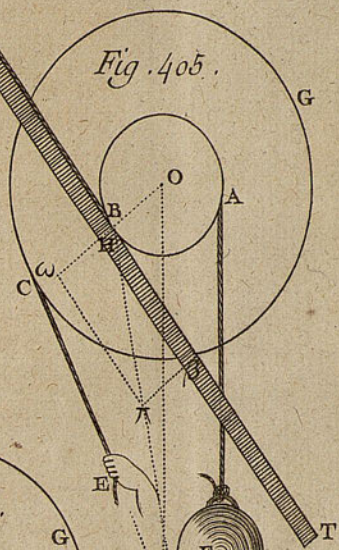


Fig. 406.

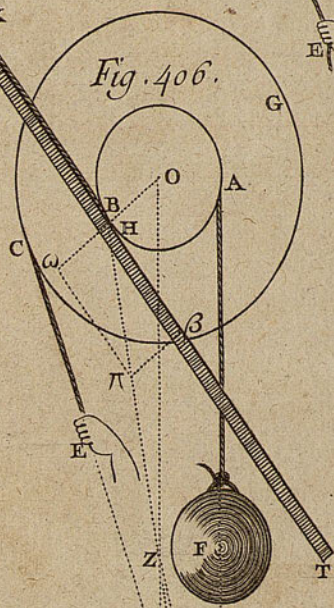


Fig. 307.

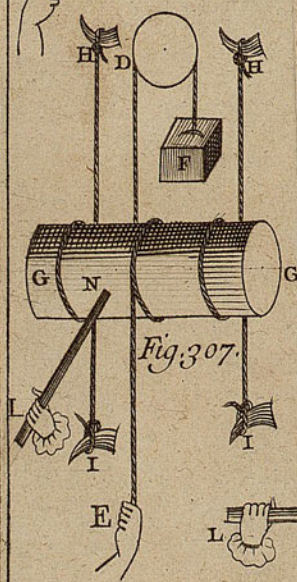
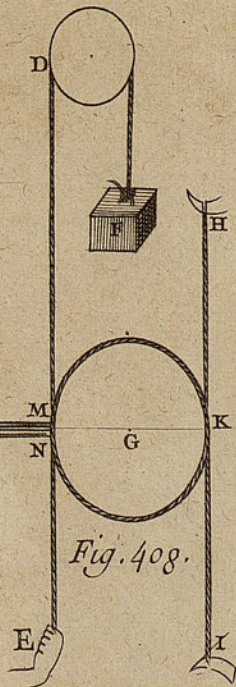
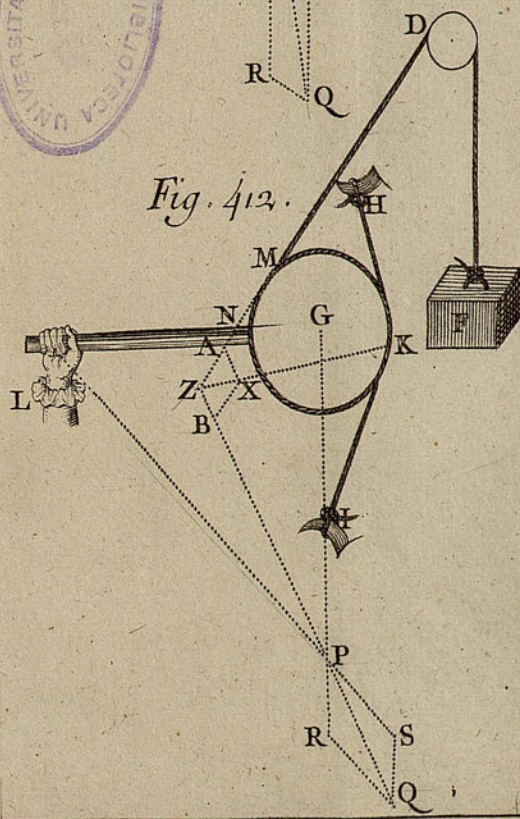
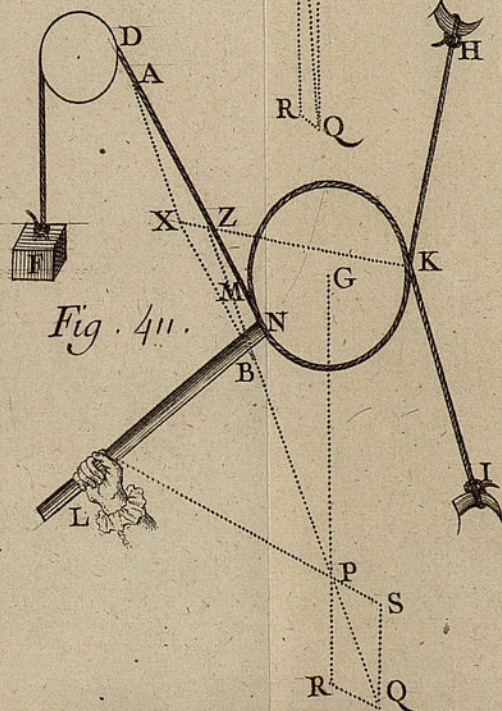
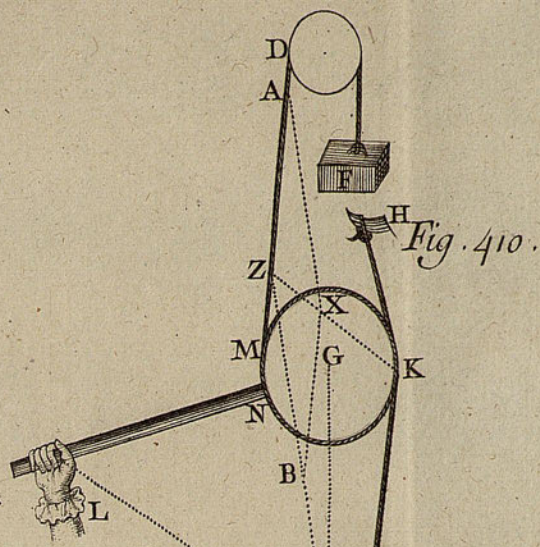
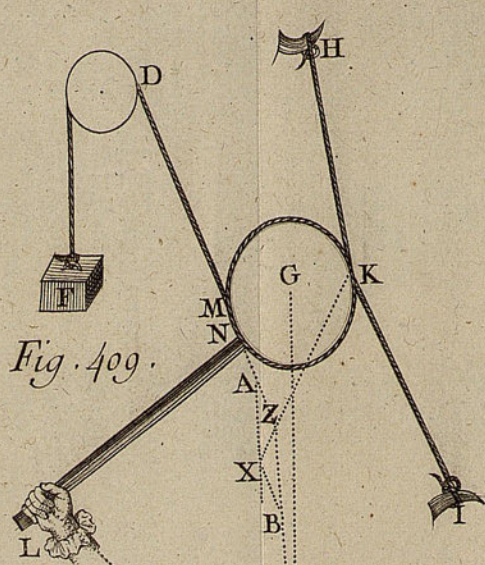


Fig. 408.





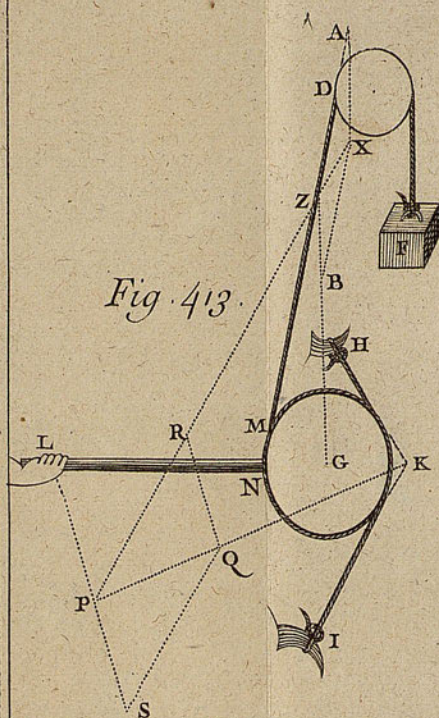


Fig. 413.

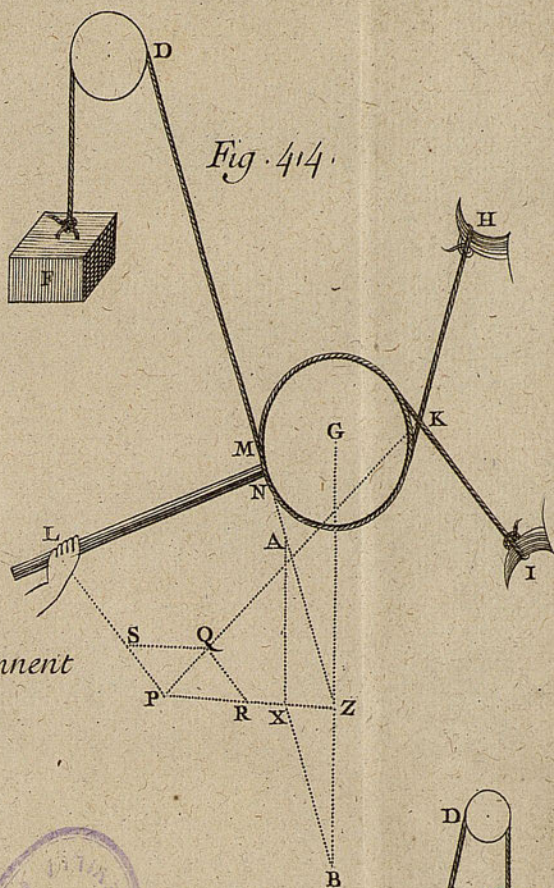


Fig. 414.

Les figures 413. et 414. appartiennent
à la proposition 6. page 426.

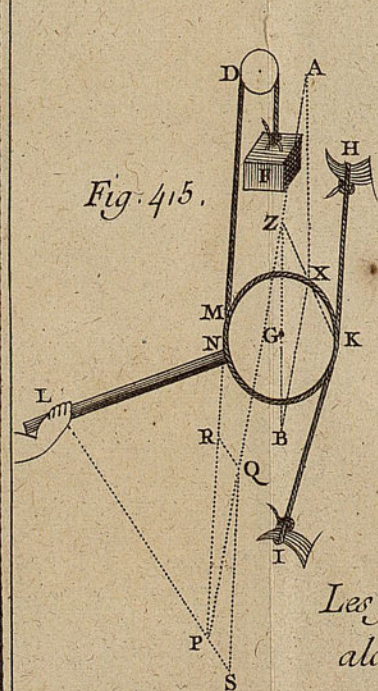


Fig. 415.

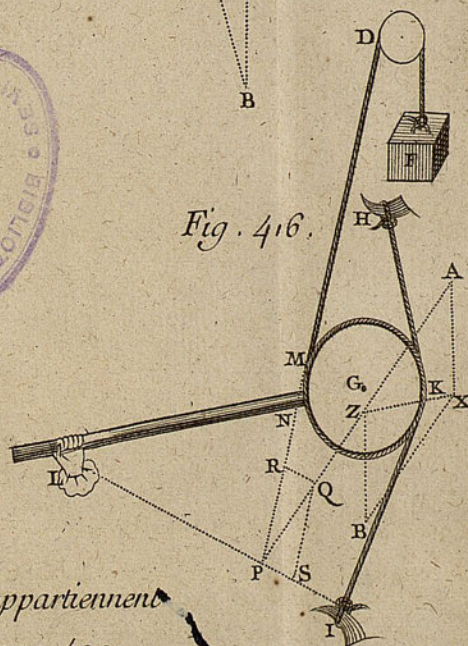


Fig. 416.

Les figures 415. et 416. appartiennent
à la proposition 7. page 428.



APPLICATION

DES PROPOSITIONS PRECEDENTES
aux Machines sans frottement , dont il est
ici question.

*Comparaison de ces Machines avec elles-mêmes prises
à l'ordinaire.*

JUSqu'ici je n'ai examiné ces Machines que par parties : en voici presentement une toute entiere , dont l'examen servira de modèle , non seulement pour découvrir par les propositions précédentes ce qu'il faut de forces en tout sur ces sortes de Machines ; mais encore pour en calculer des plus impliquées par la voye de la Nouvelle Mécanique.

Fig. 417.

I.

1°. Soit donc , si l'on veut , dans la Fig. 417. l'angle OPA fait par les directions OP & AP de la Machine CA & du poids F de 6'. l'angle de la corde AF ou de la direction AP avec l'horison de 89. 58'. l'angle de la corde CM avec l'horison de 50. deg. l'angle des bras de gruaux VT avec l'horison de 60. deg. le poids F de 100 livres , la pesanteur de la Machine CA faite de la poulie CF , & de son rouleau HA , de 15 livres , le rayon CO de la poulie de 12 pouces ; & le rayon OH de son rouleau de 2 pouces.

2°. Presentement puisque (nomb. 1.) l'angle de la corde CM ou CX avec l'horison , est de 50. deg. & que celui de la direction AP ou AX avec ce même horison est de 89. 58'. l'angle CXA doit être de 40. 2'. & CXP ou SXP de 139. 58'. Ainsi puisque (nomb. 1.) l'angle APO

*Calcul de
la dépense
des forces
qu'il faut
employer sur
les Machi-
nes sans fro-
tement dont
il est ici que-
stion , sup-
posé que les
directions
des poids
concourent
quelque
part.*

ou XPS est de 6° . l'on aura l'angle XSP ou CSO de 39° . $56'$. Tirant donc le rayon OC par le point C, où la corde CM touche la poulie CA, l'on aura aussi l'angle COS de $50.4'$. D'où l'on aura ces deux analogies : comme 64189 . sinus de l'angle CSO de $39.56'$. est à 76679 . sinus de son complément COS de $50.4'$. ainsi CO (*n. 1.*) de 12 . pouces est à CS. Et comme 64189 . sinus de l'angle CSO de $39.56'$. à 100000 . sinus de l'angle droit OCS, ainsi CO (*Hyp.*) de 12 . pouces à OS. Ce qui donnera CS de 14 . pouces $\frac{21502}{64189}$, & OS de 18 . pouces $\frac{44598}{64189}$.

3° . Après cela si l'on tire le rayon OA par le point A, où la corde FA touche le rouleau HA, l'angle OAP étant droit, & l'angle OPA étant (*n. 1.*) de 6° . l'on aura encore cette analogie : comme 147 . sinus de 6° . à 100000 . sinus total, ainsi OA (*n. 1.*) de 2 . pouces à OP. Ce qui donnera OP de 1149 . pouces $\frac{37}{87}$. L'on vient de trouver (*n. 2.*) OS de 18 . pouces $\frac{44598}{64189}$; SP sera donc de 1130 . pouces $\frac{209455}{5584448}$. De-là par cette analogie : comme 64323 . sinus de l'angle SXP, qu'on vient de voir (*n. 2.*) de $139.58'$. à 147 . sinus de l'angle XPS qu'on a supposé (*n. 1.*) de 6° . Ainsi SP de 1130 . pouces $\frac{3209255}{5584448}$ à SX. Ce qui donnera SX de 2 . pouces $\frac{209687549757}{359208448704}$.

4° . De plus prenant sur les directions prolongées de la Machine CA & du poids F des parties PN & PM, qui soient entr'elles comme les pesanteurs de cette Machine & de ce poids, c'est-à-dire (*n. 1.*) comme 15 . à 100 . Et achevant le parallélogramme MN, dont la diagonale soit PQ qui prolongée vers D, rencontre la corde CM en Z, on aura les deux côtes PN & NQ du triangle PNQ entr'eux comme 15 . à 100 . avec l'angle PNQ de $179.54'$. Et par conséquent aussi cette analogie : comme 115 . somme des côtes PN & NQ à leur différence 85 . Ainsi 87.27 . tangente de 3° . moitié de la somme des angles NPQ & NQP à $6450\frac{2}{3}$ tangente de la moitié de leur différen-

ce. Ce qui donnera $2^{\circ}. 11^{\prime}. 21^{\prime\prime}$. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ajoutée à 3° . moitié de la somme de ces angles, donnera $5^{\circ}. 11^{\prime}. 21^{\prime\prime}$. pour le plus grand NPQ ou SPZ, & $48^{\circ}. 39^{\prime}$. pour l'autre NQP ou XPZ. Ainsi puisque l'on sçait déjà (n. 2.) que l'angle SXP ou ZXP est de $139. 58^{\circ}$. & que l'angle XSP ou ZSP est de $39. 56^{\circ}$. on aura encore XZP de $40. 1^{\circ}. 11^{\prime}. 21^{\prime\prime}$. & SZP de $139. 58^{\circ}. 48^{\prime}. 39^{\prime\prime}$.

5°. Presentement à cause que ZX est à ZP comme 2358. sinus de XPZ de (n. 4.) $48^{\circ}. 39^{\prime}$. est à 6432332. sinus de ZXP de (n. 2.) $139. 58^{\circ}$. Et que de plus ZP est à ZS comme 6418958. sinus de ZSP de (n. 2.) $39. 56^{\circ}$. est à 15094. sinus de SPZ de $5^{\circ}. 11^{\prime}. 21^{\prime\prime}$. l'on aura ZX à ZS, comme le produit de 2358. & 6418958. sinus des angles XPZ & ZSP, au produit de 6432332. & 15094. sinus des angles ZXP & SPZ. Ainsi divisant SX, qu'on vient de trouver (n. 3.) de deux pouces

$\frac{209687540757}{359208448704}$, en une telle raison; l'on aura ZS de 2.

pouces $\frac{4167212813951985193786}{9180057013086658046272}$, c'est-à-dire, d'environ

2. pouces $\frac{4}{5}$. Ajoutant donc 2. pouces $\frac{4}{5}$ à la valeur de CS,

qu'on vient de trouver (n. 2.) de 14. pouces $\frac{21502}{64189}$, c'est-

à-dire, encore d'environ 14. pouces $\frac{1}{3}$; l'on aura environ

16. pouces $\frac{2}{3}$ pour la valeur de CZ.

6°. D'ailleurs puisque (n. 1.) l'angle de la corde CM avec l'horison est de 50. deg. & que celui des bras de gruau VT avec le même horison est de 60. deg. l'angle CMH, ou son égal HOC (je suppose HO perpendiculaire à VT) fera de 10. deg. & dans le triangle OHC la somme des angles sur la base HC, fera de 170. degrez. Ainsi ayant (n. 1.) HO de 2. & OC de 12. pouces, l'on aura cette analogie: comme 14. somme des côtez HO & OC, sont à la difference 10. de ces mêmes côtez, ainsi 143005. tangente de 85. deg. moitié de la somme des angles OCH & OHC, est à 816432 $\frac{1}{7}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera $83. 1^{\circ}. 1^{\prime}. 4^{\prime\prime}$.

pour cette moitié de différence, laquelle moitié soustraite de 85. moitié de la somme de ces angles, laissera 1. 58. 58". 56". pour la valeur du plus petit HCO ; lequel ajouté à l'angle droit OCZ, donnera 91. 58'. 58". 56". pour la valeur de l'angle HCZ ; cette analogie : comme 3459. sinus de l'angle HCO de 1. 58. 58". 56". au côté HO de 2. pouces, ainsi 17364. sinus de l'angle HOC de 10. deg. au côté HC, donnera HC de 10. pouces $\frac{138}{3459}$.

7°. Ainsi puisque l'on a déjà (n. 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ pour la valeur de CZ, & que l'angle HCZ de (n. 6.) 91. 58'. 58". 56". laisse 88. 1'. 1". 4". pour la somme des angles CHZ & CZH, l'on aura encore cette analogie : comme 26. pouces $\frac{25455}{31131}$. somme des côtez CH de (n. 6.) 10. pouces $\frac{138}{3459}$. & CZ de (n. 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ est à 6 $\frac{22971}{31131}$. leur différence ; ainsi 96597. tangente de 44. 0'. 30". 34". moitié de la somme des angles CHZ & CZH, à 24233 $\frac{3}{4}$. tangente de la moitié de leur différence. Ce qui donnera 13. 37'. 40". 29". pour cette moitié de différence, laquelle moitié soustraite de 44. 0'. 30". 34". moitié de la somme de ces angles, laissera 30. 22'. 50". 5". pour la valeur du plus petit CZH : d'où l'on aura encore HZD de 9. 38'. 21". 16". puisque l'on vient de voir (n. 4.) CZD ou XZP de 40. 1'. 11". 21".

8°. L'on aura donc par ce moyen les quatre angles DZH de (n. 7.) 9. 38'. 21". 16". CZH de (n. 7.) 30. 22'. 50". 5". OPA de 6'. & OPD ou SPZ de (n. 4.) 5'. 11". 21". avec leurs sinus 16744. 50574. 174. & 150. Ainsi puisque (prop. 1. n. 4.) le poids F est à la puissance, qui appliquée, si l'on veut, en R, le soutiendrait avec la corde CR ou CM, comme le produit des sinus des angles CZH & OPD, au produit des sinus des angles DZH & OPA, c'est-à-dire ici, comme 7586100.

à 2913456. le poids F étant (n. 1.) de 100 livres, cette puissance en R feroit de 38 livres $\frac{30728}{75861}$.

9°. Soit encore au pied de la grue le rouleau G d'une direction BY perpendiculaire à l'horison, & entortillé, comme aux propositions 5. 6. & 7. dans la corde IKMNKH, dont les extrêmitéz HK & IK fassent avec l'horison des angles de 62. & de 58. deg. Que le levier LN de ce rouleau soit, si l'on veut, incliné à l'horison de 8. deg. & que la puissance L lui soit appliquée suivant une ligne L β , qui fasse avec le levier LN un angle de 82. deg. Enfin que le rouleau G (j'y comprends aussi son levier) soit de 5 livres, le diamètre de ce rouleau de 4 pouces, & le levier LN de 10 pouces.

10°. Cela étant, l'on aura l'angle GBM de 40. degrez ; puisque (n. 1.) BM est incliné de 50. deg. à l'horison, auquel on suppose (n. 9.) que GB est perpendiculaire. Tirant donc le rayon GM par le point M où la corde BM touche le rouleau G, l'angle GMB étant droit, l'on aura cette analogie : comme 64278. sinus de l'angle GBM de 40. deg. au rayon GM (n. 9.) de 2. pouces, ainsi 100000. sinus de l'angle droit GMB est à GB. Ce qui donnera 3. pouces $\frac{3583}{32129}$. pour la valeur de GB.

11°. De plus puisque (n. 9.) les parties de corde HK & IK font avec l'horison des angles de 62. & de 58. deg. l'angle HKI qu'elles font entr'elles, fera de 176. deg. Ainsi tirant GK du centre G au point K, où ces cordes prolongées concourent, l'on aura les angles GKI & GKH de chacun 88. deg. Tirant donc encore le rayon G π par le point π , où la corde IK touche le rouleau G, l'angle G π K étant droit, on aura cette analogie : comme 99939. sinus de l'angle GK π de 88. deg. au rayon G π (n. 9.) de 2. pouces, ainsi 100000. sinus de l'angle droit G π K au côté GK. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{61}{49266}$. pour la valeur de GK.

12°. D'ailleurs (n. 9.) l'angle de la corde IK avec l'ho-

rison étant de 58. deg. & BY étant perpendiculaire à l'horison, l'angle KYG sera de 32. deg. l'on vient de voir (n. 11.) que l'angle GKY est de 88. deg. Il faut donc que l'angle KGB, qui est égal à ces deux pris ensemble, soit de 120. deg. Ce qui donnera 60. deg. pour la somme des angles GKB & GBK: ainsi puisque l'on connoît déjà les côtez GB (n. 10.) de 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. & GK (n. 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. qui leur sont opposez dans le triangle KGB, l'on aura cette analogie: comme 5. pouces $\frac{180988657}{1605857274}$. somme des côtez GB & GK, à leur difference 1. pouce $\frac{17067600}{1605857274}$. c'est-à-dire, sans beaucoup s'éloigner de la précision, comme 5 $\frac{1}{16}$. à 1 $\frac{1}{16}$. ainsi 57735. tangente de 30. deg. moitié de la somme des angles GKB & GBK à 12364 $\frac{11}{81}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera environ 7. 3'. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ôtée de 30. deg. laissera 22. 57'. pour la valeur du plus petit angle GBK.

13°. De-là par cette analogie: comme 38992. sinus de l'angle GBK (n. 12.) de 22. 57'. au côté GK (n. 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. ainsi 86602. sinus de l'angle KGB (n. 12.) de 120. degrez à KB; l'on aura 3. pouces $\frac{451110240}{487096033}$. c'est-à-dire, quasi 4. pouces pour la valeur de KB.

14°. Après avoir ainsi trouvé la valeur de KB & de l'angle GBK, soient prises sur la corde CM, & sur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui soient entr'elles comme la puissance de 38 liv. $\frac{30798}{75861}$. qu'on vient de voir (n. 8.) nécessaire pour retenir ici le poids F avec la seule corde CR, est au poids du rouleau G, qu'on suppose (n. 9.) de 5. livres; & ache-

vant le parallelogramme RG, soit la diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction LB de la puissance L. Cela fait, puisque (n. 10.) l'angle GBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. Ainsi, puisque les paralleles BG & RY rendent les deux angles RYB & RBY pris ensemble égaux à l'angle GBR, leur somme sera aussi de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY, comme $38 \frac{30798}{75861}$. & 5.

avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & RBY, qui leur sont opposez; & par conséquent l'on aura aussi cette analogie: comme $43 \frac{30798}{75861}$. somme des côtez RB &

RY à leur difference $33 \frac{30798}{75861}$. Ainsi 274747. tangente de 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY à 208829 $\frac{2446008}{332821}$. tangente de la moitié de leur

difference. Ce qui donnera 64. 24'. 43". 44^{'''}. pour cette moitié de difference; laquelle moitié étant ajoutée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 24'. 43". 44^{'''}. pour la valeur du plus grand RYB ou de son égal YBG. D'où l'on aura l'angle GB β de 45. 35'. 16". 16^{'''}. lequel ajouté à l'angle GBK, qu'on vient de trouver (n. 12.) de 22. 57'. donnera 68. 32'. 16". 16^{'''}. pour la valeur de tout l'angle KB β .

15°. L'on voit (n. 14.) que l'angle GB ω est de 45. 35'. 16". 16^{'''}. L'on voit aussi que l'angle BG ω doit être de 82. deg. puisque (n. 9.) BG est perpendiculaire à l'horison, & que le levier LN n'est incliné à l'horison que de 8. deg. L'on aura donc encore l'angle B ω G de 52. 24'. 43". 44^{'''}. Ainsi puisque l'on a déjà (n. 10.) le côté GB de 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. l'on aura aussi ces deux ana-

logies tout à la fois: comme 79241. sinus de l'angle B ω G de 52. 24'. 43". 44^{'''}. au côté GB de (nomb. 10.) 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. Ainsi 71432. sinus de l'angle GB ω de 45. 35'. 16". 16^{'''}. au côté G ω ; ainsi encore 99026. sinus

de l'angle $B\omega$ de 82. deg. au côté $B\omega$. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{2253095842}{2551480959}$. pour la valeur de $G\omega$, & 3. pouces $\frac{2267981803}{2551480959}$. pour celle de $B\omega$; c'est-à-dire, sans beaucoup s'éloigner de la précision, 3. pouces pour la valeur de $G\omega$, & 4. pouces pour celle de $B\omega$.

16°. De ce que $G\omega$ est de 3. pouces, puisque GL (n. 9.) est de 12. pouces, ωL fera de 9. pouces; & de ce que l'angle $B\omega G$ ou $\beta\omega L$ est (n. 15.) de 52. 35'. 16". 16". l'angle $\beta L\omega$ étant (n. 9.) de 82. deg. l'angle $L\beta\omega$ fera de 45. 35'. 16". 16". Ayant donc le côté ωL de 9. pouces, l'on aura encore cette analogie: comme 71432. sinus de l'angle $L\beta\omega$ de 45. 35'. 16". 16". au côté ωL de 9. pouces: ainsi 99026. sinus de l'angle $\beta L\omega$ de 82. deg. au côté $\omega\beta$. Ce qui donnera $\omega\beta$ de 12. pouces $\frac{34050}{71432}$. c'est-à-dire, encore d'environ 12. pouces $\frac{1}{2}$. qui avec 4. pouces valeur (n. 15.) de $B\omega$, feront 16. pouces $\frac{1}{2}$. pour celle de toute la ligne $B\beta$.

17°. De-là, puisque l'on a d'ailleurs le côté KB (n. 15.) de 4. pouces avec l'angle $KB\beta$ de 68. 32'. 16". 16". c'est-à-dire, 111. 27'. 43". 44". pour la somme des angles $BK\beta$ & $B\beta K$, qui sont sur la base $K\beta$ du triangle $KB\beta$; l'on aura encore cette analogie: comme 20 $\frac{1}{2}$. somme des côtez $B\beta$ & KB , à 12 $\frac{1}{2}$. leur différence, ainsi 146764. tangente de 55. 43'. 51". 52". moitié de la somme des angles $BK\beta$ & $B\beta K$, à 89490 $\frac{10}{41}$. tangente de la moitié de leur différence. Ce qui donnera 41. 49'. 31". 58". pour cette moitié de différence, laquelle soustraite de 55. 43'. 51". 52". moitié de la somme des angles $BK\beta$ & $B\beta K$, laissera 13. 54'. 19". 54". pour la valeur du plus petit $B\beta K$, lequel joint à l'angle $L\beta\omega$ (n. 16.) de 45. 35'. 16". 16". donnera 59. 29'. 36". 10". pour la valeur de tout l'angle $K\beta L$.

18°. L'on aura donc encore par ce moyen les quatre angles

angles $K\beta B$ (n. 17.) de $13.54'.19''$. $54'''$. $K\beta L$ (n. 17.) de $59.29'.36''$. $10'''$. GBM (n. 10.) de 40 . deg. & $GB\beta$ (n. 14.) de $45.35'.16''$. $16'''$. avec leurs sinus $24031\frac{111}{1800}$, $86156\frac{62}{180}$, 64278 , & $71431\frac{52}{75}$. Ainsi puisque l'impression que le poids F fait suivant la corde CM contre la puissance L , est égale à la puissance qu'il faudroit en R pour le soutenir avec cette corde seule, & que d'ailleurs en cas d'équilibre (*prop. 6. n. 2.*) cette impression est à la puissance L , (je suppose que la puissance E ne sert alors qu'à empêcher que la corde $CMN\phi ME$ ne glisse sur le rouleau G) comme le produit des sinus des angles $K\beta L$ & $GB\beta$ au produit des sinus des angles $K\beta B$ & GBM ; la puissance qu'il faudroit en R pour soutenir le poids F avec la seule corde CM est aussi à la puissance L , comme le produit des sinus des angles $K\beta L$ & $GB\beta$ au produit des sinus des angles $K\beta B$ & GBM ; c'est-à-dire ici, comme $747,520,045,047,657$. à $187,680,905,132,445$. Cette puissance R étant donc ici (n. 8.) de 38 liv. $\frac{30793}{75861}$; la puissance L fera dans ce cas de 9 liv. $\frac{306625602453+8816417}{50707618137360307677}$. c'est-à-dire, d'un peu plus que de 9 liv. $\frac{1}{2}$.

II.

1°. Telle est la maniere de calculer la valeur de la puissance L pour tous les cas où les directions OP & AP de la machine CA & du poids F feroient quelque angle entre-elles. Voici presentement pour le cas où ces directions seroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horison, comme on le suppose ordinairement.

2°. Soient donc $H\beta$ & $H\lambda$ paralleles aux lignes CO & OA . De-là, & de ce que CO est perpendiculaire en C à $M\beta$, & que l'angle HCO est (n. 6. art. 1.) de $1.58'.58''$. $6'''$. il suit que l'angle $H\beta C$ est droit, & que l'angle $H\lambda C$ est de $88.1'.1''.4''$. Ce qui fait que par l'analogie des sinus de ces angles avec les côtez qui leur sont

Calcul de la dépense des forces qu'il faut employer sur les Machines sans frottement dont ilest ici question, supposé que les lignes de directions des poids soient paralleles entr'elles.

opposez dans le triangle HC_p , son côté HC de (*n. 6. a. 1.*) 10. pouces $\frac{138}{3459}$. donne H_p de 10. pouces $\frac{792770}{17284623}$. c'est-à-dire, d'environ 10. pouces $\frac{1}{24}$.

3°. D'ailleurs puisque le bras de gruaux VT fait (*n. 1. a. 1.*) avec l'horison auquel OS est perpendiculaire, un angle de 60. deg. HO étant perpendiculaire à ce bras de gruaux, l'angle $HO\mu$ fera de 60. deg. & l'angle $H\mu O$ fera droit. Ce qui, selon HO de (*n. 1. a. 1.*) 2. pouces, donnera $H\mu$ de 1 pouce $\frac{73204}{100000}$.

4°. De plus puisque les directions AX & OS du poids F & de la machine CA passent ici pour paralleles, DZ celle de leur impression commune fera non seulement aussi parallele à ces lignes, mais encore elle divisera en D le rayon OA , en forte que OD soit à DA , comme le poids F à la pesanteur de la machine CA , c'est-à-dire (*n. 1. a. 1.*) comme 100. à 15. Ce qui, selon OA de (*n. 1. art. 1.*) 2. pouces, fera OD , & par consequent aussi son égale $\mu\nu$ de 1. pouce $\frac{17}{23}$.

5°. Ajoûtant donc $H\mu$ de (*n. 3.*) 1. pouce $\frac{73204}{100000}$. avec $\mu\nu$ de (*nomb. 4.*) 1. pouce $\frac{17}{23}$. l'on aura $H\nu$ de 3. pouces $\frac{1082692}{2300000}$. c'est-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{1}{2}$. Et parce que H_p de (*n. 2.*) 10. pouces $\frac{1}{24}$. & $H\nu$ de 3. pouces $\frac{1}{2}$ sont les sinus des angles CZH & DZH ; & que OD & DA de (*n. 4.*) 1. pouce $\frac{17}{23}$. & 2. pouces, sont aussi les sinus des angles OPD & OPA , que le parallelisme supposé des lignes OS , DZ , & AX , qu'on suppose ici, rend infiniment aigus: le produit des sinus des angles CZH & OPD sera au produit des sinus des angles DZH & OPA , comme $17\frac{32}{9}$ à 7. Ainsi puisque le poids F est (*prop. 1. n. 4.*) à la puissance qui appliquée suivant CM , le soutiendra

avec cette corde seule, comme le premier de ces produits au second; ce poids étant (*n. 1. a. 1.*) de 100 livres, cette puissance sera de 40 liv. $\frac{20}{241}$.

6°. La valeur de cette puissance reviendra encore la même en prenant à l'ordinaire pH pour un levier dont l'appui est en H , & qui a un poids de 115 livres perpendiculairement appliqué à son extrémité, par où la direction DZ de l'impression commune à la pesanteur de la machine CA de 15 livres, & au poids F de 100 livres, passe d'une force, qui dans ce cas des directions OS & AX supposées parallèles est égale à la somme de ces pesanteurs; car ce poids de 115 livres étant à cette puissance comme H_1 de (*n. 2.*) 10. pouces $\frac{1}{24}$. à H_2 de (*n. 5.*) 3. pouces $\frac{1}{2}$. l'on aura encore 40. liv. $\frac{20}{241}$. pour la valeur de cette puissance.

7°. Presentement pour avoir la valeur de la puissance L dans le cas présent, soient prises sur la corde CM , & sur la ligne de direction BY du rouleau G , depuis le point B , où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG qui soient entr'elles comme la puissance de 40. livres $\frac{20}{241}$. qu'on vient de voir (*n. 5. & 6.*) nécessaire pour retenir le poids F avec la seule corde CR , est au poids du rouleau G , qu'on suppose (*n. 9. a. 1.*) de 5. livres; & achevant le parallélogramme RG , soit sa diagonale YB , qui prolongée rencontre en β la direction $L\beta$ de la puissance L . Cela fait, puisque (*n. 10. a. 1.*) l'angle GBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle $BR Y$ les deux côtes RB & RY , comme 40. livres $\frac{20}{241}$. & 5. avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & $RB Y$, qui leur sont opposés; & par conséquent l'on aura aussi cette analogie: comme 45 $\frac{20}{241}$. somme des côtes RB & RY à leur différence 35 $\frac{20}{241}$. Ainsi 274747. tangente de 70. deg. moi-

K k k ij

tié de la somme des angles RYB & RBY à 214001
 $\frac{1006}{2171}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui

donnera 64. 57'. 14^h. 13^h. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoutée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 57'. 14^h. 13^h. pour la valeur du plus grand RYB, ou de son égal YBG. D'où l'on aura l'angle GB β de 45. 2'. 45^h. 47^h. lequel ajouté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (*n. 12. a. 1.*) de 22. 57'. donnera 67. 59'. 45^h. 47^h. pour la valeur de l'angle KB β .

8°. Cet angle étant presque le même que dans le nombre 14. de l'article 1. où on l'a vû de 68. 32'. 16^h. 16^h. & toutes choses d'ailleurs étant égales, le produit des sinus des angles KB λ & GB β fera encore ici au produit des sinus des angles KB β & GBM environ comme (*n. 18. a. 1.*) 747520045047657. à 187680905132445. Ainsi puisque l'impression de 40. livres $\frac{20}{241}$. que fait ici (*n. 5. & 6.*) le poids F joint à la pesanteur de la machine CA, suivant la corde CM contre la puissance L, est en cas d'équilibre à cette puissance L (*prop. 6. n. 2.*) comme le premier de ces produits au second, cette puissance L sera ici d'environ 10. livres $\frac{11474235014572560}{180152330856484614}$. c'est-à-dire, d'un peu plus de 10. livres.

III.

*Comparai-
 son des ma-
 chines sans
 frottemens,
 dont il est
 ici question
 avec elles-
 mêmes pri-
 ses à l'ordi-
 naire.*

1°. Voyons présentement ce qu'il faudroit de forces en L suivant L β dans l'usage ordinaire où la machine CA & le rouleau G ne tournent que sur leurs centres fixes O & G. En ce cas il est clair que la puissance qu'il faudroit, par exemple, en R pour soutenir le poids F, seroit à ce poids, (je n'y compte point les frottemens) comme le rayon AO du rouleau HA au rayon CO de la poulie CF; c'est-à-dire ici (*n. 1. a. 1.*) comme 2. à 12. Ainsi ce poids étant (*n. 1. a. 1.*) de 100. livres, cette puissance

ne seroit jamais que de 16 livres $\frac{2}{3}$; au lieu qu'en évitant les frottemens, elle seroit ici de 38. liv. $\frac{35798}{75861}$. (n. 8. a. 1.) dans le cas où les directions OP & AP feroient entr'elles un angle OPA de 6'. & de 40. livres $\frac{20}{241}$. & (n. 5. & 6. art. 2.) de 40. livres $\frac{20}{241}$. dans celui où ces directions seroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horison. C'est déjà dans le premier cas près de 22. livres, & dans le second près de 23. livres $\frac{1}{2}$. qu'il en coûte pour les frottemens qu'on y sauve, comme si ces frottemens pouvoient faire près d'une fois & demi autant de résistance que le poids F, qu'on voit n'en faire alors pour sa part que 16 $\frac{2}{3}$. à la puissance qui lui seroit appliquée suivant CR.

2°. De plus puisque le poids F ainsi appliquée à la machine CA mobile seulement autour de son centre fixe, ne tire la corde CM (n. 1.) que d'une force de 16 $\frac{2}{3}$. la puissance L, qui appliquée au levier LN soutiendrait ce poids à l'aide du rouleau G, mobile seulement aussi autour de son centre G, devroit être à cette résistance de 16 livres $\frac{2}{3}$. (je n'y comprends point encore les frottemens) comme le rayon de ce rouleau à la perpendiculaire tirée de son centre G sur la direction L β de cette puissance ; c'est-à-dire, puisque (n. 9. a. 1.) ce rayon est de 2. pouces, ce levier de 10. & l'angle NL β de 82. deg. comme 2. à 11 $\frac{1039}{12500}$. Ce qui donneroit alors 2. livres $\frac{358766}{445617}$. pour la valeur de la puissance L. 2. livres $\frac{358766}{445617}$. de résistance est donc toute la part que le poids F peut avoir à ce que la puissance L en sentiroit dans l'usage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G ; & le surplus doit être compté pour les frottemens que cette poulie & ce rouleau souffriroient dans ce dernier usage. L'on vient

de voir (*n. 18. a. 1. & n. 8. a. 2.*) qu'en les sauvant à la maniere de M. Perault, ce que cette puissance L y trouve de résistance dans les circonstances presentes, est d'environ 9 livres $\frac{1}{2}$, ou 10 livres, c'est-à-dire, plus de triple

de ce que le poids F lui en feroit pour sa part dans l'usage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G ; il faudroit donc pour y gagner quelque chose, & même il faudroit, pour n'y rien perdre, que dans ce dernier usage la résistance des frottemens fût plus que double de celle du poids F. Ce que l'on aura sans doute bien de la peine à se persuader.

3°. Mais l'inconvenient en paroîtra encore plus grand, si l'on fait réflexion que lorsqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir reprise, il faut encore plus de forces dans la puissance L qu'il ne lui en a fallu pour l'abaisser. La démonstration s'en tire de ce que par l'article 4. de la pénultième réflexion qui suit la démonstration de la proposition 7. Ce que la puissance L employe de forces dans l'abaissement du levier LN doit être à ce qu'elle en employe dans l'élevation de ce levier, comme la résistance que lui fait le poids F pour sa part suivant la corde CM, est à cette même résistance plus celle des frottemens de cette même corde avec le rouleau G. Et qui pis est encore, ces frottemens sont d'autant plus considerables, selon M. Perault lui-même, qu'il ne demande que très-peu de forces à la puissance E pour empêcher sa corde de glisser sur le rouleau G ; c'est-à-dire, suivant l'article 1. de la réflexion que je viens de citer, que très-peu de difference de la résistance de ces frottemens à celle que le poids F fait suivant CM.

4°. Je ne parle point ici de la force qu'on voit par l'art. 1. de la seconde réflexion qui suit la démonstration de la proposition 7. qu'il faudroit à la puissance E, lorsqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir reprise, parce que M. Perault l'a ingenieusement suppléé par une machine qu'il appelle *Main*, au travers de laquelle passe la

corde que l'on voit ici tenir à la puissance E, & qui la retient sans qu'il en coûte aucunes forces. Je ne dis rien non plus de ce qu'il faudroit de forces à cette même puissance E pour dans l'abaissement du levier LN, empêcher sa corde de glisser sur le rouleau G; parce qu'on la peut encore suppléer par un poids suspendu à l'extrémité de sa corde, & égal à ce qu'elle doit avoir de forces; c'est-à-dire, par l'article 1. de la pénultième réflexion qui suit la démonstration de la proposition 7. égal à la différence qui est entre la résistance que le poids F fait suivant la corde CM, & celle du frottement de cette corde avec le rouleau G. Je passe aussi la pesanteur du rouleau G, qui au lieu d'aider comme en abaissant le levier LN, nuit lorsqu'il le faut relever. Je passe même ce que la roideur des cables qui se doivent entortiller autour des rouleaux dont on se sert ici, demande encore de forces, de peur de m'engager dans une discussion qui me menât trop loin.

I V.

1°. Ce que l'on peut opposer à ces inconveniens, c'est que la pesanteur de la roue CF & de son rouleau HA, qu'on compte ici, se peut sauver comme M. Perault l'a fait à la Machine sans frottement qu'il a inserée dans l'art. 4. de ses Notes sur le chap. 5. liv. 10. de sa Traduction de Vitruve. Mais ce remede, sans même entrer dans les inconveniens qui lui sont encore particuliers, n'est que d'un très-petit secours. L'on en jugera par ce qui suit.

2°. L'on a vû (n. 3. a. 2. que $H\mu$ est d'un pouce $\frac{73204}{100000}$. & parce que (Hyp.) OL est un parallelogramme, & que (n. 1. a. 1.) OA est de 2. pouces; $\mu\lambda$ est aussi de 2. pouces. Ainsi $H\lambda$ est de 3. pouces $\frac{73204}{100000}$. c'est-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{7}{10}$. Puisque donc $H\rho$ est (n. 2. a. 2.) de 10. pouces $\frac{1}{24}$. & que le poids F est à la puissance qu'il faudroit sur la corde CM pour demeurer contre lui seul en équilibre sur le point H, comme $H\rho$ à $H\lambda$, cette puissance

De quel secours il seroit de sauver par un contre-poids la pesanteur de la roue & du rouleau qui doivent monter avec le poids dans les machines sans frottement dont il est ici question.

ce feroit encore, fans compter la pesanteur de la machine CA, de 34. livres $\frac{286}{341}$.

3°. Présentement pour avoir la valeur de la puissance L dans le cas présent, soient prises sur la corde CM, & sur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui soient entr'elles comme la puissance de 34 livres $\frac{286}{341}$. qu'on vient de voir (n. 2.) nécessaire pour soutenir ici le poids F avec la seule corde CR, est au poids du rouleau G, qu'on suppose (n. 9. a. 1.) de 5. livres; & achevant le parallelogramme RG, soit sa diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction L β de la puissance L. Cela fait, puisque (n. 10. a. 1.) l'angle CBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY comme 34 livres $\frac{286}{341}$. & 5. avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & RBY, qui leur sont opposez; & par conséquent l'on aura aussi cette analogie: comme 39. livres $\frac{286}{341}$. somme des côtez RB & RY à leur difference 29 $\frac{286}{341}$. ainsi 274747. tangente de 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY à 205266 $\frac{2555}{2717}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 1'. 33". 55'''. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoutée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 1'. 33". 55'''. pour la valeur du plus grand RYB, ou de son égal YGB: d'où l'on aura l'angle GB β de 45. 58'. 26". 5'''. lequel ajouté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (n. 12. a. 1.) de 22. 57'. donnera 68. 55'. 26". 5'''. pour la valeur de l'angle KB β .

4°. Cet angle étant presque le même que dans le nombre 14. de l'article 1, où on l'a trouvé de 68. 32'. 16". 16'''. & toutes choses d'ailleurs étant égales, le produit des

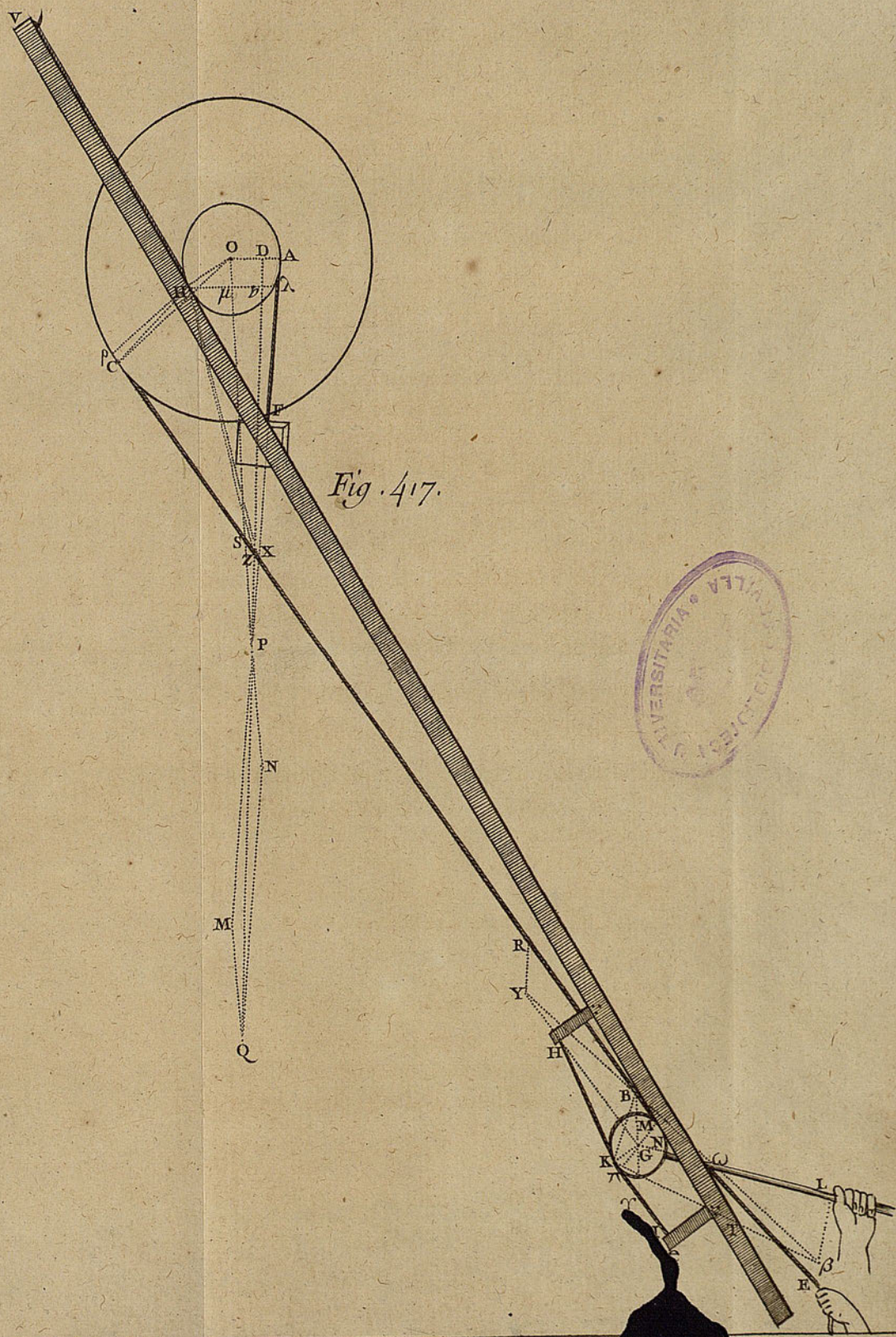


Fig. 417.

des sinus des angles $K\beta\lambda$ & $GB\beta$, fera encore ici au produit des sinus des angles $K\beta B$ & GBM environ comme (*nomb. 18. art. 1.*) 747520045047657 à 187680905132445 . Ainsi puisque l'impression de 34 livres $\frac{286}{341}$ que fait ici (*nomb. 2.*) le seul poids F suivant la corde CM contre la puissance L , est en cas d'équilibre à cette puissance L (*prop. 6. n. 2.*) comme le premier de ces produits au second; cette puissance sera encore ici d'environ 8 livres $\frac{190414470073438304}{254904335361251037}$; ou, ce qui revient presque au même, d'environ 8 livres $\frac{3}{4}$. quoique l'on n'y compte point la pesanteur de la rouë CF & de son rouleau BA .

5. Le poids F fera donc encore ici contre la puissance L près du triple de ce qu'il lui feroit de résistance pour sa part dans l'usage ordinaire, où l'on a vû (*n. 3. art. 3.*) que la machine CA & le rouleau G tournant sur leurs centres fixes, la résistance de ce poids contre cette puissance ne feroit que de 2 livres $\frac{358766}{445617}$. Il faudroit donc encore, même pour ne rien perdre à sauver les frottemens, comme fait $M. Perault$, que dans l'usage ordinaire de ces Machines, la résistance de leurs frottemens fût près de double de celle du poids F . Ce qui est encore très-difficile à croire. Ajoutez à ceci les nombres 5. & 6. de l'art. 3.

6. Tels sont les inconveniens auxquels la premiere Machine sans frottement, que $M. Perault$ a inserée dans l'art. 4. de ses Notes sur le ch. 5. liv. 10. de sa Traduction de Vitruve, est encore sujette. L'application en est aisée à faire. $M. Perault$ a encore crû rendre cette Machine d'un usage plus facile qu'elle n'est ici, en faisant monter à plomb la rouë CF avec son rouleau BA ; mais l'on a vû que c'est tout le contraire dès le commencement de cet Ecrit.

EXAMEN
DE L'OPINION
DE M. BORELLI,

Sur les proprietéz des Poids suspendus
par des cordes.





AVERTISSEMENT.

C'EST ici l'Examen promis dans la réflexion qui suit la preuve de la premiere proposition du Projet de la Nouvelle Mécanique. On a été naturellement conduit par les principes qu'on y suit, à une proposition sur les proprieté des poids suspendus par des cordes, qui s'est trouvée la même que celle que Monsieur Borelli avoit critiquée dans Stévin & dans Hérigone; & ç'a été par la nécessité de la justifier, qu'on s'est trouvé engagé à l'examen de sa critique.

On divise cet examen en deux Chapitres: Dans le premier on fait voir que le sentiment que M. Borelli reprend dans Hérigone, dans Stévin & dans les autres, bien loin d'être contraire, comme il l'a crû, à la soixante-huitième Proposition du Tome premier de son Traité du Mouvement des Animaux, en est une suite si nécessaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il y seroit infailliblement entré. On indique ensuite dans ce même Chapitre quelques paralogismes que cet Auteur a commis, lors même qu'il croyoit en voir dans les raisonnemens qu'il a critiqués.

Dans le second Chapitre, après avoir encore donné quelques démonstrations du sentiment d'Hérigone & des autres, toutes différentes de celles que M. Borelli a critiquées, on rend par la méthode de la Nouvelle Mécanique les Lemmes sur lesquels cet Auteur a fondé tout

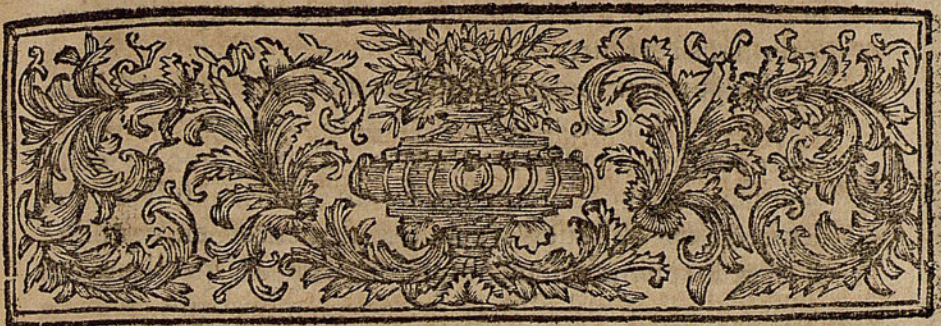
AVERTISSEMENT.

ce qu'il a dit de la force des Muscles , beaucoup plus généraux qu'ils ne le peuvent être par la sienne.

Au reste si l'on attaque une erreur où M. Borelli est tombé , on n'en est pas moins persuadé du mérite extraordinaire de ce grand homme , dont les principaux Ouvrages doivent être mis au nombre des Livres les plus originaux qui aient paru dans ce siècle-ci ; mais il n'y a personne qui ne puisse faire un faux pas , sur-tout dans des matieres aussi délicates que celles-ci , & où le paradoxe se glisse aussi facilement.

Tout ce qu'on citera de cet Auteur dans cet Examen , sera pris du Tome premier de son Traité du Mouvement des Animaux , de l' Edition de Rome , faite en 1680. On spécifie l' Edition , à cause des pages qu'on en citera quelquefois.





EXAMEN DE L'OPINION DE M. BORELLI,

Sur les proprieté des Poids suspendus
par des cordes.

ETAT DE LA QUESTION.



MONSIEUR BORELLI dans son Traité du Mouvement des Animaux, Tome 1. ch. 13. a fait une fort longue digression pour prouver qu'Hérigone, Stevin & plusieurs autres, se sont trompez, d'avoir avancé comme proposition generale, que le poids T soutenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puissances R & S , est à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de sa ligne de direction à chacun des côtes CN & MC du parallelogramme MN , dont elle est diagonale. Cet Auteur dit (pag. 137.) que cette proposition prise dans toute son étendue & sans restriction, lui paroît suspecte, pour

FIGURE.

» bien des raisons ; & même qu'il la croit capable de jet-
 » ter dans l'erreur.

Il réduit toutes ces prétendues raisons à trois. 1°. Il dit
 » (pag. 138.) avoir démontré dans le Scholie de la 68.
 » proposition du Tome 1. de ce Traité, que les deux
 » puissances R & S appliquées au poids T suivant des
 » directions obliques , peuvent demeurer en équilibre
 » avec lui, non seulement quelque rapport qu'elles aient
 » entr'elles , fût-il plus grand ou moindre que celui de
 » NC à CM , mais encore de quelque maniere que
 » le rapport de la somme de ces deux puissances à ce
 » poids, fût différent de celui de la somme de NC & MC
 » à CH. 2°. Il a fait, dit-il, aussi plusieurs experiences
 qui lui paroissent confirmer ce sentiment. 3°. Enfin il a
 crû voir du paralogisme dans deux démonstrations qu'il
 a critiquées, dont la premiere paroît être du P. Pardie,
 & l'autre commune au reste des Auteurs qu'il attaque.

Il est constant que de toutes ces raisons, la premiere
 est non seulement la principale, mais encore l'unique
 qui puisse servir à la décision de ce differend. Car, 1°.
 en fait d'exactitude & de précision, l'experience ne
 prouve rien ; sur-tout ici, où la resistance qui vient du
 frottement des poulies avec leurs pivots, &c. rend ces
 sortes d'experiences possibles en tant de manieres diffe-
 rentes, qu'il n'y a presque point de sentiment pour ou
 contre lequel on n'en puisse faire à son gré. 2°. Qu'il y
 ait, ou qu'il n'y ait point de paralogisme dans les sen-
 timens que cet Auteur critique, on n'en peut rien con-
 clure, non plus contre le sentiment qu'il attaque ; puis-
 que la verité ne dépend point du tout de la maniere dont
 on l'a démontre.

Toute la question présente se réduit donc à sçavoir si
 M. Borelli a démontré dans le Scholie de sa 68. propo-
 sition, Tome 1. » que les deux puissances R & S appli-
 » quées au poids T suivant des directions obliques , peu-
 » vent demeurer en équilibre avec lui, non seuleme

quelque rapport qu'elles ayent entr'elles , fût-il plus « grand ou moindre que celui de NC à CM , mais en- « core de quelque maniere que le rapport de la somme « de ces deux puissances à ce poids , fût different de ce- « lui de la somme de NC & MC à CH. « Que dis-je ? Ce « seroit assez pour détruire la proposition qu'il rejette , s'il « avoit seulement démontré un cas où ce poids pût ainsi « demeurer en équilibre avec ces puissances , sans être à « chacune d'elles , comme la partie CH de sa ligne de di- « rection , qui fait la diagonale du parallelogramme MN , « à chacune des parties de leurs cordes , qui lui servent « de côtez. Mais bien loin de l'avoir fait , la proposition « d'où il tire le Scholie en question , prouve tout le con- « traire , je veux dire le sentiment d'où il a crû qu'elle le « devoit éloigner.

C'est ce qu'on va faire voir dans le premier Chapitre « de cet Examen : & dans le second , après avoir encore « donné quelques démonstrations de ce même sentiment , « toutes differentes de celles que M. Borelli a critiquées , « on rendra par la méthode de la Nouvelle Mécanique , « les Lemmes qu'il a déduits de sa 68. proposition , beau- « coup plus generaux qu'ils ne le peuvent être par la « sienne.





CHAPITRE I.

SENTIMENT D'HERIGONE,
de Stévin, &c.

SUR LES PROPRIETEZ DES POIDS
suspendus par des cordes.

*Démontré par la proposition même que M. Borelli avoit crû
leur être contraire.*

Fig. 1.

LE Scholie de la 68. proposition de M. Borelli, dont il est ici question, porte, 1°. » Qu'avec les mêmes » inclinaisons de cordes, le poids qui y est suspendu, & » les forces qui le soutiennent, peuvent varier en mille » manieres differentes, sans que pour cela il cesse de faire » équilibre avec elles, pourvû que la *puissance* R soit à » la partie X de ce poids, comme GC à GF, ou comme » AC à CH; & que la *puissance* S soit à son autre partie Z, » comme IC à IK, ou comme BC à CH..... 2°. Ce même Scholie porte reciproquement qu'en retenant les » mêmes poids, *c'est-à-dire ici, les mêmes forces*, (pourvû » que celui du milieu soit moindre que les deux extrêmes) on peut changer l'inclinaison de leurs cordes, » sans en rompre l'équilibre.

Il est clair que la premiere partie de ce Scholie peut avoir deux sens bien differens. 1°. Elle peut signifier que dans cette variation de poids & de forces, où cet Auteur veut que l'équilibre se conserve sans changer l'inclinaison de leurs cordes, ce poids demeure toujours à chacune de ces puissances en même raison que la diagonale CH du parallelogramme MN, à chaque partie de leurs cordes, qui lui sert de côté; & en cela on va voir que cette consequence est parfaitement juste, mais aussi

(Cor.

(*Cor. 21. Th. 1. Nouv. Mécanique*) parfaitement conforme au sentiment que cet Auteur attaque. 2°. Au contraire, si on lui fait signifier que cet équilibre puisse subsister sans un tel rapport, alors on conclut très-mal, & même autant contre cet Auteur que contre Hérigone, &c. J'en dis tout autant de la seconde partie de ce même Scholie; & pour le démontrer, je vais faire voir que la proposition d'où M. Borelli le tire, prouve tout le contraire, & que s'il y eût fait un peu plus d'attention, elle l'auroit infailliblement conduit au sentiment d'où il a crû qu'elle le devoit éloigner; je veux dire, à croire (du moins pour tous les cas qu'elle comprend) que le poids T soutenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puissances R & S , est toujours à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de sa ligne de direction, à chacun des côtés CN & MC du parallélogramme MN , dont elle est la diagonale. Voici comment.

D E M O N S T R A T I O N

suivant M. Borelli.

Selon cet Auteur (*prop. 68.*) lorsque les puissances R & S soutiennent ensemble le poids T , la puissance R soutient pour sa part une partie X de ce poids, de même qu'elle feroit, si elle étoit appliquée suivant sa même direction AC avec cette partie X au levier horizontal CG ; & la puissance S soutient aussi pour la sienne l'autre partie Z de ce même poids, de même qu'elle feroit, si elle étoit aussi appliquée suivant sa même direction CB avec cette partie Z au levier CI qu'on suppose encore horizontal & égal au premier: & par conséquent si l'on regarde (*Cor. 2. Lem. 2. Nouv. Mécan.*) l'impression que la puissance S fait suivant CB sur le nœud C qui retient ensemble les cordes de ces puissances & de ce poids, comme composée de deux impressions particulières, dont l'une est suivant l'horizontale CO , & l'autre suivant la perpendiculaire CH ; on trouvera que ce que cette puissance lui en fait suivant CO , est égal à la rési-

stance que feroit alors contre ce même point, & suivant cette même ligne, le levier CG pour empêcher la corde ACX de se redresser; c'est-à-dire, égal à la charge de l'appui G de ce même levier. Or soient appelées G, I, les charges des appuis G, I, c'est-à-dire, les efforts dont le nœud C est tiré tout à la fois de C vers G, & vers I; lesquels efforts directement contraires doivent être égaux entr'eux, puisque (*hyp.*) aucun d'eux n'emporte le nœud C vers aucun des côtez G, I; ainsi l'on aura ici $G = I$. Cela posé,

$$1^{\circ}. \text{L'on aura } R. G :: AC. CG :: CG. CF :: CI. CF.$$

$$\text{Et conséquemment } G = \frac{R \times CF}{CI}.$$

$$2^{\circ}. \text{L'on aura de même } S. I :: BC. CO :: CI. CK. \text{ Et conséquemment aussi } I = \frac{S \times CK}{CI}.$$

$$\text{Donc } \frac{R \times CF}{CI} = G = I = \frac{S \times CK}{CI}, \text{ ou } R \times CF = S \times CK; \text{ d'où}$$

résulte $R. S :: CK. CF.$ (en prenant $CI = CG$ pour sinus total, & \int pour la marque des sinus) $:: \int CIK. \int CGF :: \int HCB. \int HCA$ (soit le parallélogramme MN) $:: \int HCM. \int CHM :: HM. CM :: CN. CM.$ *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

Voilà ce que M. Borelli devoit premierement conclure de sa 68. proposition, sinon en general, du moins pour tous les cas qu'elle comprend: Sçavoir, que lorsque deux puissances R & S soutiennent ensemble quelque poids T avec des cordes seulement, elles sont toujours entr'elles en même raison que les parties GN & MC de leurs cordes, qui servent de côtez au parallélogramme MN, qui a pour diagonale une partie CH de la ligne de direction du poids qu'elles soutiennent. De-là en faisant MP & NQ perpendiculaires sur HC, ces lignes marquant toujours CP égale à HQ, cet Auteur auroit trouvé, comme il a fait (p. 137.)

que chacune des puissances R & S , étant toujours (par le Corol. de sa 69. prop.) à tout ce poids, comme chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN , à la somme de leurs sublimitez CP & CQ , lui est aussi toujours comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale CH de ce même parallelogramme. Ce qu'il falloit démontrer.

Quoique cette conséquence suive nécessairement de la 68. proposition de M. Borelli, cependant parce que cette proposition ne peut pas s'appliquer aux cas où une de ces puissances se trouve avoir sa direction au-dessous de l'horizontale qui passe par le point où leurs cordes se communiquent, elle n'en est pas une suite si generale que du Théoreme premier des poids suspendus par des cordes de la Nouvelle Mécanique. C'est pour cela qu'on se contente ici de dire, que si cet Auteur eût fait un peu plus d'attention à sa 68. prop. il auroit apperçu que tout ce que nous venons d'en conclure, est absolument vrai, du moins pour tous les cas qu'elle comprend.

Telle est la consequence que M. Borelli devoit tirer de sa 68. proposition; s'il l'eût fait, il auroit apperçu, 1°. que la premiere partie du Scholie qu'il en tire, n'est vraie qu'en cas que la variation du poids T & des forces R & S , entre lesquels il dit que l'équilibre se peut conserver sans changer l'inclinaison de leurs cordes, soit telle que ce poids demeure toujours à chacune de ces puissances en même raison, que la diagonale CH du parallelogramme MN , à chaque partie de leurs cordes qui lui sert de côté. 2°. Il auroit encore vu que la seconde partie de ce même Scholie, est absolument fautive; puisqu'il n'est pas possible de faire le moindre changement auquel que ce soit des angles ACB , ACH & BCH , sans changer en même tems le rapport qui est, ou entre les côtez du parallelogramme MN , ou entre quelqu'un d'eux & sa diagonale; c'est-à-dire, puisque (hyp.) on ne change rien au rapport qui est entre ce poids & chacune de ces puissances, sans faire cesser la ressemblance de ces deux rapports; & par consequent aussi, suivant ce qui

vient d'être conclu de la 68. proposition de M. Borelli ; sans rompre l'équilibre de ce poids avec ces puissances.

AUTRE DEMONSTRATION.

encore suivant M. Borelli.

Fig. 2.

La prop. 69. Tom. I. de M. Borelli, donne encore plus simplement ce qu'on vient de déduire de la prop. 68. du même Tome. Dans cette prop. 69. M. Borelli suppose comme là, & comme nous ci-après dans la Fig. 2. que les puissances R, S, soutiennent le poids T seulement avec des cordes CR, CS, CT, attachées ensemble par un nœud commun & mobile C. Et après avoir pris CG. CH :: R. S. & fait GP, HQ, perpendiculaires en P, Q, sur la direction CT du poids T, prolongée vers D; il démontre exactement, & sans leviers, que $R + S. T :: GC + CH. CP + CQ$.

Or je dis que de cela suit encore la proposition que M. Borelli conteste à Hérigone, à Stévin, &c. Pour le voir, soit parallèlement à CS la droite GD, qui rencontre en D la direction TC du poids T, prolongée jusques-là : l'on aura ainsi un triangle rectangle DPG semblable au rectangle CQH; d'où résulte GP. HQ :: DP. CQ :: DG. CH. Or on verra ci-après dans la Remarque de la prop. 3. du Chapitre suivant, que GP = HQ. Donc aussi DP = CQ, & DG = CH; & conséquemment $CP + CQ = CP + DP = CD$. Or la prop. 69. Tome I. de M. Borelli, donne $R + S. T :: CG + CH. CP + CQ$. Donc aussi $R + S. T :: CG + CH. CD$. De sorte que cet Auteur ayant pris ici CG. CH :: R. S. l'on y aura, selon lui-même, les puissances R, S, & le poids T, en raison des lignes CG, CH, CD. Or puisque ci-dessus l'on avoit DG = CH, & ces deux droites sont (*hyp.*) parallèles entr'elles, si l'on mène la droite DH, le quadrilatère CGDH se trouvera être un parallélogramme, de qui CG, CH, seront les côtes, & CD la diagonale. Donc, suivant M. Borelli, les puissances R, S, sont non seulement comme les côtes CG, CH, du parallélogramme

CGDH, pris sur leurs directions ; mais aussi au poids T, comme ces côtes correspondans sont à la diagonale CD' de ce parallélogramme, prise de même sur la direction de ce poids. *Ce qu'il falloit encore démontrer suivant M. Borelli, qui le contesloit.*

REMARQUE.

Ayant démontré, comme l'on vient de faire, que le sentiment dont il est ici question, bien loin d'être contraire aux prop. 68. 69. Tom. 1. de M. Borelli, comme cet Auteur l'a crû, en est une suite si nécessaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il l'auroit infailliblement trouvé : c'est encore une nouvelle raison de ne nous point arrêter aux expériences qu'il objecte à Stévin, à Hérigone, & aux autres ; & de ne toucher à la critique qu'il a faite de leurs raisonnemens, que pour indiquer les fausses suppositions sur lesquelles il s'est appuyé pour y trouver du paralogisme. Il y en a trois que voici.

1°. Dans la critique qu'il a faite du premier de ces raisonnemens, qui paroît être du P. Pardie, après avoir dit que si l'on regarde la corde AC comme une verge de fer mobile autour du point fixe A, à laquelle le poids T soit attaché, ce poids sera soutenu avec cette verge par ce point fixe, de même que sur un plan CI perpendiculaire à AC ; il fait IL perpendiculaire à l'horizontale EC, & (pag. 139.) il dit : *Patet quod pondus T..... ad vim quâ idem T innititur, & comprimit idem planum IC, est ut IC ad LC.* Cela seroit vrai (Corol. 20. Th. 26.) si BC étoit parallèle à CI perpendiculaire (Hyp.) à AC ; mais non pas (Corol. 17. Th. 26.) lorsqu'elle lui est oblique, comme ici, où le poids S aide au poids T, à charger le plan CI, qui ne le seroit que par ce poids T, si BC lui étoit parallèle.

FIG. 38.

2°. Dans la critique qu'il fait ensuite du raisonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. après avoir regardé le poids T soutenu par les cordes AC & BC, comme s'il l'étoit

FIG. 40.

M.m.m. iij

sur les plans CK perpendiculaire à AC, & CG perpendiculaire à CB, inégalement inclinez, il dit (pag. 141.) *Tunc pondus T dum moveri niteretur per duas rectas inclinatitas CK & CG, cogeretur moveri, aut nifum exercere per diagonalem CO secantem angulum GCK bifariam.* Pour cela il faudroit que ces deux plans CK, CO, fussent également inclinez, & conséquemment aussi les directions RC, SC, qu'on leur suppose perpendiculaires.

Outre cette supposition, M. Borelli se sert encore ici de la première qu'il a déjà faite contre le P. Pardie. Il dit (pag. 141.) après avoir fait CP perpendiculaire à l'horizontale KG : *Idem pondus absolutum T ad vim quâ comprimit planum CO, eandem rationem habebit quàm CO ad OP.* Cela seroit vrai, si ce poids T étoit retenu sur CO par une puissance d'une direction parallèle à CO.

3°. Enfin si ces deux suppositions ne lui suffisant pas encore pour trouver à redire au raisonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. il y en ajoute une troisième qui ne vaut pas mieux. *Vis*, dit-il au même endroit, *quam patitur planum CO à compressione ponderis T aqualis est viribus ambarum potentiarum R & S, quæ sustinendo idem pondus in tali situ plani CO inclinati vicem supplent.* Cela est faux. La force résultante du concours des deux autres, est toujours moindre que leur somme, tant que leurs directions font quelque angle entr'elles; outre que cette force résultante le long du plan CO, étant ainsi parallèle à ce plan, ne seroit pas celle de sa compression qui résulteroit du concours de cette force parallèle & de la pesanteur du poids soutenu par elle sur ce plan.

On ne démontre point ici la fausseté de toutes ces suppositions: elle est trop évidente par le Th. 26. des Surfaces de la Nouv. Méc. pour s'y arrêter davantage. D'ailleurs c'est, ce me semble, avoir suffisamment répondu à M. Borelli, que d'avoir démontré, comme l'on vient de faire, le sentiment d'Hérigone, de Stévin, &c. par la proposition même que cet Auteur croyoit leur être contraire: c'est aussi tout ce qu'on s'étoit proposé dans ce premier Chapitre. Passons au second.



CHAPITRE II.

NOUVELLES DEMONSTRATIONS du sentiment d'Hérigone, de Stévin, &c.

Sur les proprietez des poids suspendus par des cordes.

AVEC QUELQUES PROPOSITIONS
de M. Borelli, rendues par la méthode de la Nouvelle
Mécanique, beaucoup plus generales qu'elles ne le
peuvent être par la sienne.

AVERTISSEMENT.

LE poids T étant soutenu par deux ou plusieurs puissances Fig. 306
ces R, S , &c. si des extrémités G, H , &c. des parties
 CG, CH , &c. de leurs cordes qui leur soient proportionnelles,
on fait GP, HQ , &c. perpendiculaires sur sa ligne de di-
rection CD , elles y désigneront depuis leurs points de ren-
contre P, Q , &c. jusqu'au point C , où cette ligne con-
court avec ces cordes, certaines parties CP, CQ , &c. dont
nous parlerons souvent dans la suite. C'est pourquoi nous leur
allons donner des noms.

DEFINITION I.

Lorsque ces parties CP, CQ , &c. se trouveront au-
dessus du point C , nous les appellerons les *sublimités* des
puissances qui les auront déterminées par leurs propor-
tionnelles.

DEFINITION II.

Et celles des lignes qui se trouveront au-dessous de ce

même point C, nous les appellerons les profondeurs de ces mêmes puissances.

Selon ces définitions, CP est la sublimité de la puissance R dans les fig. 5. & 6. CQ est encore la sublimité de la puissance S dans la fig. 5. mais dans la fig. 6. CQ est la profondeur de cette même puissance.

On avertit encore que lorsqu'on comparera à la sublimité ou à la profondeur de ces puissances, des parties de leurs cordes qui leur soient proportionnelles, on ne l'entendra pas indifféremment de toutes les proportionnelles qu'on pourroit leur assigner, mais seulement de celles qui déterminent les sublimités ou les profondeurs en question.

PROPOSITION I.

Fig. 5. 6.
7. 8.

LE poids T soutenu avec les cordes AC & BC par les puissances R & S, & en équilibre avec elles, est toujours à chacune d'elles, comme la partie DC de sa ligne de direction, à chacun des côtez GC & HC du parallélogramme GH, dont elle est diagonale.

DEMONSTRATIONS.

1°. Voyez celle qu'on a donnée du Th. 1.

2°. Voyez ci-après la Remarque qui suit le Corollaire de la prop. 3.

Fig. 5. 6.

3°. Soient conçûs les leviers MC & NC placez chacun en ligne droite avec chacune des directions AC & BC des puissances R & S. De leurs points d'appui M & N pris à discrétion, soient tirées MF & NK perpendiculairement à ces mêmes lignes reciproquement prises, & ML avec NO perpendiculaires aussi à la ligne de direction DCE de ce même poids. Enfin de quelque'un des points D de cette même ligne faite DH & DG parallèles à AC & à CB. Cela fait, il est clair que le levier CN étant (*hyp.*) en ligne droite avec la ligne de direction CB

de

de la puissance S , supplée nécessairement tout l'effet de cette puissance ; & que par conséquent la puissance R pourroit suivant sa même direction AC , soutenir seule le poids T avec ce levier ainsi placé, de même qu'elle le soutient présentement avec la puissance S . Pour la même raison, la puissance S pourroit aussi le soutenir seule avec le levier CM , de même qu'elle le soutient présentement avec la puissance R : le poids T est donc soutenu par le concours d'action des puissances R & S , de même qu'il le seroit par la seule puissance R appliquée avec lui au levier NC , ou bien par la seule puissance S appliquée aussi avec lui au levier CM . Or dans le premier cas la puissance R seroit (*Th. 21. Cor. 13. de la Nouv. Mécan.*) au poids T , comme NO à NK ; c'est-à-dire, comme le sinus de l'angle NCO , ou de DCH à celui de l'angle NCK , ou de CHD . Et dans le second cas le poids T , pour la même raison, seroit à la puissance S , comme MF à ML ; c'est-à-dire encore, comme le sinus de l'angle MCF , ou de CHD , à celui de l'angle MCL , ou de HDC . Donc la puissance R , le poids T , & la puissance S , sont entr'eux, comme les sinus des angles DCH , CHD , & HDC ; c'est-à-dire, comme les lignes DH , CD , & CH . Le poids T est donc à la puissance R , comme CD à DH , ou à GC ; & à la puissance S , comme la même CD à CH . *Ce qu'il falloit démontrer.*

4°. Si au lieu des puissances R & S , les cordes AC & BC étoient attachées aux extrêmités de quelque levier AB , dont l'appui D fût dans la ligne de direction DCE du poids T , il est clair qu'en quelque situation que ce levier se trouvât alors, il y demeureroit, & que la charge de son point d'appui seroit alors égale au poids T . Il est encore clair que les extrêmités A & B de ce même levier seroient aussi tirées suivant AC & BC , chacune avec une force égale à celle de la puissance R ou S , qu'elle supplée. Or les forces avec lesquelles les points A & B de ce levier seroient ainsi tirés suivant AC & BC , seroient entr'elles (*Th. 21. Cor. 13. Nouv. Mécan.*)

comme DF & DK tirées du point D perpendiculairement sur BC & AC; c'est-à-dire, en faisant le parallelogramme GH, comme les sinus des angles DCH & CDH, ou comme les côtez DH & HC de ce parallelogramme. Ces mêmes forces seroient aussi (Th. 21. part. 2. 3. 4.) chacune à la charge du point d'appui D de ce levier, c'est-à-dire, au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale DC: les forces des puissances R & S, c'est-à-dire, ces mêmes puissances elles-mêmes, sont donc entr'elles, comme DH, ou GC & HC; & au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez du parallelogramme GH à sa diagonale DC. Ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit encore démontrer cette même proposition en se servant des plans inclinez, pourvu qu'on en prit un qui fût perpendiculaire à la direction de quelqu'une des deux puissances qui soutiennent ce poids: car cette puissance, & la charge de ce plan alors égales, n'ayant qu'un même rapport avec ce poids, non plus qu'avec l'autre puissance qu'on considere en ce cas comme le soutenant seule sur ce plan; on trouveroit par le Cor. 9. du Th. 26. que ce poids est toujours à chacune de ces puissances, comme le sinus de l'angle que leurs cordes font entr'elles, à chacun des sinus des angles que font avec la ligne de direction de ce poids chacune de ces cordes reciproquement prises. Tout cela est presentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

COROLLAIRE I.

Fig. 5. 6.
7. 8.

On peut conclure generalement de ces démonstrations, ce que nous n'avons conclu (chap. 1.) de la 68. prop. de M. Borelli, que pour les cas qu'elle comprend; sçavoir, qu'il n'y en a aucun de possible, où l'on puisse conserver l'équilibre du poids T avec les puissances R & S, en changeant le rapport qu'elles ont entr'elles, ou avec lui, à moins qu'on ne change en même tems l'inclinaison de ces cordes, sans changer aussi le rapport de ces mêmes puissances, ou entr'elles, ou avec ce poids; parce

que sans cela il n'est pas possible de faire que chacun des côtez CH & CG du parallélogramme GH, continue d'être à sa diagonale DC, comme chacune des puissances R & S au poids T ; ce qui doit cependant être, comme on le vient de voir, pour qu'elles fassent équilibre avec lui.

On peut comparer ce Corollaire aux Scholies des propositions 68. & 69. de M. Borelli.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de ces démonstrations que chacune des puissances R & S est au poids T, comme chacune des parties GC & HC de leurs cordes, qui leur sont proportionnelles, à la somme (fig. 5.) de leurs sublimités, ou à la différence (fig. 6.) qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre ; parce que dans le parallélogramme GH les angles GCD & CDH étant égaux, aussi-bien que les lignes GC & DH ; de plus les angles qui se font en P & en Q, étant aussi (avert.) égaux, les triangles GPC & HDQ sont non seulement semblables, mais encore leurs côtez CP & DQ sont égaux. Donc (fig. 5.) CP plus CQ est égal à DQ plus CQ ; & (fig. 6.) CP moins CQ sera aussi égal à DQ moins CQ. Or (fig. 5.) DQ plus CQ est égal à CD, de même (fig. 6.) que DQ moins CQ. Donc (fig. 5.) CP plus CQ est égal à CD, aussi-bien (fig. 6.) que CP moins CQ. Or selon les démonstrations précédentes, chacune des puissances R & S est au poids T, comme chacune de leurs proportionnelles CG & HC à CD. Donc chacune de ces mêmes puissances est à ce poids, comme chacune de ces mêmes proportionnelles à CP (fig. 5.) plus CQ, ou (fig. 6.) à CP moins CQ ; c'est à-dire, (Déf. 1. & 2.) à la somme (fig. 5.) de leurs sublimités, ou bien (fig. 6.) à la différence qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

COROLLAIRE III.

D'où l'on voit que la somme des deux puissances qui soutiennent un poids avec des cordes, est toujours à ce poids, comme la somme des longueurs de leurs cordes, qui leur sont proportionnelles, à la somme de leurs sublimités, ou à la différence qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

On peut comparer encore ces deux derniers Corollaires à la 69. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

PROPOSITION II.

Fig. 9.

DE quelque manière qu'un poids T soit soutenu avec des cordes par quelque nombre de puissances A, B, D, E, F , &c. que ce soit, appliquées à un même nœud C , si l'on prend sur leurs nœuds autant de parties CG, CR, CM, CN, CP , &c. qui leur soient proportionnelles, & que sous deux de ces parties, par exemple, sous GC & RC , l'on fasse un parallélogramme RG , dont la diagonale CH fasse encore avec une autre de ces parties CM le parallélogramme HM , dont la diagonale CL fasse encore avec une autre de ces parties CN le parallélogramme LN , dont la diagonale CQ fasse encore avec une autre de ces parties CP le parallélogramme PQ , & ainsi jusqu'à la dernière de ces proportionnelles. On verra, 1°. que la diagonale du dernier de ces parallélogrammes, qui est ici CK , sera dans la ligne de direction du poids T . 2°. Et que chacune de ces puissances sera à ce poids, comme chacune des proportionnelles, selon qu'elles leur répondent, est à cette même diagonale.

DEMONSTRATION.

1°. Puisque (hyp.) la puissance A est à la puissance B comme CG à CR , il résultera (Lem. 2.) de leur concours d'action sur le point C une impression composée suivant CH , d'une force qui fera (Cor. 1. du même

Lem.) à chacune de ces puissances, comme CH à chacune des lignes CG & CR qui les représentent: l'impression que font ensemble ces deux puissances sur le point C, est donc la même que celle que feroit seule sur ce même point quelque nouvelle puissance, qui lui étant appliquée suivant CH, au lieu d'elles, leur feroit à chacune, comme CH à chacune des lignes CG & CR; & par conséquent les trois puissances A, B, D, doivent faire ensemble la même impression sur le point C que cette nouvelle puissance (je l'appelle H) feroit alors avec la puissance D. Or (*Lem. 2.*) l'impression qui résulteroit alors du concours d'action des puissances D & H sur le point C, se feroit suivant CL, d'une force qui seroit (*Cor. 1. du même Lemme*) à celle de la puissance D, comme CL à CM. Donc l'impression composée qui résulte du concours d'action des trois puissances A, B, D, sur le point C, se fait en effet suivant CL, d'une force qui est à celle de la puissance D, comme CL à CM: elles ne font donc toutes trois ensemble sur ce point que la même impression que feroit seule quelque autre puissance (je l'appelle L) qui appliquée suivant CL, au lieu de ces trois, seroit à la puissance D, comme CL à CM; & par conséquent les quatre puissances A, B, D, E, ne doivent faire sur le point C que la même impression que feroit alors la puissance L avec la puissance E. Or (*Lem. 2.*) l'impression qui résulteroit alors du concours d'action de ces deux dernières puissances sur le point C, se feroit suivant CQ, d'une force qui seroit (*Cor. 2. du même Lem.*) à celle de la puissance E, comme CQ à CN. Donc l'impression composée qui résulte du concours d'action des quatre puissances A, B, D, E, sur le point C, se fait en effet suivant la ligne CQ, d'une force qui est à celle de la puissance E, comme CQ à CN. On prouvera de même que l'impression composée qui résulte du concours d'action des cinq puissances A, B, D, E, F, se fait aussi suivant CK, d'une force qui est à la puissance E, comme CK à CP. Et ainsi toujours de même jusqu'à

la dernière des puissances appliquées à ce poids. D'où il suit que l'impression composée qui résulte du concours d'action de toutes ces puissances sur le point C, en quelque nombre qu'elles soient, se fait toujours suivant la diagonale du dernier des parallélogrammes faits comme l'on vient de dire, c'est-à-dire ici, suivant CK; & par conséquent (*Th. 1. Nouv. Méc.*) cette diagonale est toujours en ligne droite avec TC, c'est-à-dire, dans la ligne de direction du poids T. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. On vient de voir que le poids T est soutenu par les puissances A, B, D, E, F, &c. de même qu'il le seroit, par exemple ici, par la puissance F aidée d'une autre suivant CQ, à qui elle seroit comme CP à CQ (les directions de toutes demeurant toujours les mêmes): Donc (*prop. 1.*) la puissance F est au poids T, comme CP à CK. Or (*hyp.*) la puissance F est à chacune des puissances E, D, B, A, &c. comme CP à chacune des parties de leurs cordes CN, CM, CR, CG, &c. Donc chacune de ces puissances est au poids T, comme chacune de ces proportionnelles, selon qu'elles leur répondent, est à la diagonale CK. Ce qu'on vient de dire de la puissance F, se prouvera de même de toute autre dont la proportionnelle seroit un des côtes du parallélogramme qu'on vient de démontrer, avoir toujours sa diagonale, comme ici CK, dans la ligne de direction du poids T: ainsi en general de quelque manière qu'un poids soit soutenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puissances est toujours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles qui servent de côtes aux parallélogrammes dont il est ici question, est à la diagonale du dernier, qu'on vient de voir se trouver toujours dans sa ligne de direction.

COROLLAIRE.

D'où l'on voit que toutes ces puissances prises ensemble, sont toujours au poids T, qu'elles soutiennent, com-

me la somme de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la diagonale du parallélogramme qu'on vient de démontrer (n. 1.) se trouver toujours dans la ligne de direction de ce poids : de sorte que lorsque toutes ces puissances sont égales entr'elles, ces mêmes proportionnelles l'étant aussi, la somme de toutes ces puissances est à ce poids, comme une de ces proportionnelles à une partie de cette diagonale divisée en autant d'égaux qu'il y a de telles puissances ; c'est-à-dire ici, comme laquelle que ce soit des lignes CG, CR, CM, CN, CP, à $\frac{1}{5}$ de CK.

PROPOSITION III.

Toutes choses étant les mêmes que dans la proposition précédente, on trouvera présentement que chacune des puissances A, B, D, E, F, &c. est au poids T qu'elles soutiennent, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la somme de leurs sublimités moins celle de leurs profondeurs. Fig. 9. 10.

DEMONSTRATION

De toutes les pointes des parallélogrammes GR, HM, LN, QP, &c. tirez Gg, Hh, Rr, Ll, Mm, Qq, Nn, Pp, &c. perpendiculairement sur la ligne de direction du poids T, prolongée indéfiniment de part & d'autre. Cela fait, vous trouverez par le Lemme 10. 1°. $Ch = Cg - Cr$. 2°. $Cl = Cm - Ch$. Donc $Cl = Cm - Cg + Cr$. 3°. $Cq = Cl + Cn$. Donc $Cq = Cm - Cg + Cr + Cn$. 4°. $Ck = Cq - Cp$. Donc $Ck = Cm - Cg + Cr + Cn - Cp$. Enfin continuant toujours ainsi jusqu'à la diagonale qui se trouve toujours (prop. 2.) dans la ligne de direction du poids T, on trouvera de même que cette diagonale est toujours égale à $Cm - Cg + Cr + Cn - Cp \pm$, &c. Or on vient de voir (prop. 2.) que chacune des puissances A, B, D, E, F, &c. est aussi toujours au poids T qu'elles soutien-

ment, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, à cette même diagonale. Donc chacune de ces puissances est à ce poids, comme chacune de ces proportionnelles à $Cm + Cr + Cn + Cg + Cp +$, &c. c'est-à-dire (Déf. 1. & 2.) à la somme de leurs sublimitez Cm, Cr, Cn , &c. moins la somme de leurs profondeurs Cg, Cp , &c. D'où l'on voit en general, que de quelque maniere qu'un poids soit soutenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puissances est toujours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Fig. 10.

Soient encore les lignes CG, CR, CM, CN, CP, &c. proportionnelles aux puissances A, B, D, E, F, &c. concevez par le point C, où elles se communiquent, un plan horizontal OH, c'est-à-dire, perpendiculaire à la ligne de direction du poids T; tirez ensuite des extrémités de ces proportionnelles, G, R, M, N, P, &c. autant de perpendiculaires sur le plan OH, & sur la ligne de direction du poids T indéfiniment prolongée de part & d'autre; en faisant depuis C sur le plan OH autant de lignes CH, CQ, CL, CO, CK, &c. qui joignent ce point avec les perpendiculaires qui tombent sur ce plan, on aura autant de parallelogrammes rectangles Hg, Qr, Lm, On, Kp, &c. qui exprimeront (Lem. 2. Cor. 2.) que chacune de ces puissances, par exemple, la puissance A, fait la même impression sur le point C, que feroient deux autres puissances appliquées à ce point, l'une suivant CH, & l'autre suivant Cg, à chacune desquelles celle-ci seroit comme CG à chacune de ces mêmes lignes. Le point C est donc tiré vers bas suivant la ligne de direction du poids T par la puissance A d'une force (Cor. 1. du même Lemme) à qui cette puissance est comme CG à Cg. Pour

la même raison il est encore tiré suivant la ligne de direction du même poids. 1°. Vers bas, par la puissance F d'une force à qui elle est comme CP à Cp , &c. 2°. Vers haut, par la puissance B d'une force à qui elle est comme CR à Cr ; par la puissance D d'une force à qui elle est comme CM à Cm ; par la puissance E d'une force à qui elle est comme CN à Cn , &c. Or (*hyp.*) la puissance A est à chacune des puissances B, D, E, F , &c. comme la proportionnelle CG à chacune des leurs CR, CM, CN, CP , &c. Donc la puissance A est à chacune des forces avec lesquelles le point C est tiré suivant la ligne de direction du poids T . 1°. Vers bas, par les puissances A, F , &c. comme CG à chacune de leurs profondeurs Cg, Cp , &c. 2°. Vers haut, par les puissances B, D, E , &c. comme la même CG à chacune de leurs sublimitez Cr, Cm, Cn , &c. Donc cette même puissance A est à la somme de toutes les forces avec lesquelles le point C est tiré suivant la ligne de direction du poids T . 1°. Vers bas, par les puissances A, F , &c. comme la proportionnelle CG à la somme de leurs profondeurs Cg, Cp , &c. 2°. Vers haut par les puissances B, D, E , &c. comme la même CG à la somme de leurs sublimitez Cr, Cm, Cn , &c. Or la somme faite de la pesanteur de ce poids, & des forces avec lesquelles le point C est tiré vers bas suivant la ligne de direction de ce même poids par les puissances A, F , &c. étant diamétralement opposée à la somme de celles avec lesquelles ce même point est tiré en même tems vers haut suivant cette même ligne par les puissances B, D, E , &c. & aucune de ces deux sommes de force ne l'emportant sur l'autre; puisque (*hyp.*) le poids T ne monte ni descend: c'est une conséquence nécessaire qu'elles soient égales. Donc la puissance A est non seulement à la somme des forces avec lesquelles le point C est tiré vers bas suivant la ligne de direction du poids T par les puissances A, F , &c. comme la proportionnelle CG à la somme de leurs profondeurs Cg, Cp , &c. mais aussi à la somme faite de cette première & de la pesanteur de ce même poids,

comme la même CG à la somme des sublimitéz Cr, Cm, Cn, &c. des puissances B, D, E, &c. Donc la puissance A est à cette dernière somme moins la première, c'est-à-dire, à la pesanteur seule du poids T, ou à ce poids lui-même, comme la proportionnelle CG à la somme des sublimitéz Cr, Cm, Cn, &c. moins la somme des profondeurs Cg, Cp, &c. Or (*hyp.*) chacune des puissances B, D, E, &c. est à la puissance A, comme chacune de leurs proportionnelles CR, CM, CN, CP, &c. à la proportionnelle CG. Donc chacune des puissances A, B, D, E, &c. est au poids T qu'elles soutiennent, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimitéz moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On voit présentement en general que la somme de toutes les puissances qui soutiennent un poids avec des cordes qui se tiennent par un même nœud, en quelque nombre qu'elles soient, quelque proportion qu'elles aient entr'elles, & de quelque manière qu'elles lui soient appliquées, est toujours à ce poids, comme la somme des parties de leurs cordes qui leur sont (*chap. 2. avert.*) proportionnelles à la somme de leurs sublimitéz moins celle de leurs profondeurs.

On peut comparer tout ceci avec les propositions 70. 73. 74. de M. Borelli : & on verra non seulement qu'elles sont très-limitées, mais encore qu'avec sa méthode on ne peut pas aller si loin.

REMARQUE.

FIG. 2. &c.
21.

En faisant la seconde des deux démonstrations précédentes, il m'en est encore venu une de la première proposition. La voici.

Le poids T étant donc soutenu avec des cordes par deux puissances R & S, des angles G & H du parallelogramme GH, dont la diagonale CD fait partie de la ligne de direc-

tion de ce poids, soient faites GM & HN parallèles à cette diagonale, & perpendiculaires à MCN , achevez les parallélogrammes MP & NQ . Cela fait, vous trouverez encore de la manière que nous avons fait, la seconde des deux démonstrations précédentes, que le poids T est aux puissances R & S , comme la partie CD de sa ligne de direction aux parties CG & CH de leurs cordes, qui font les côtes du parallélogramme CH , dont elle est diagonale.

Car (*Cor. 6. Lem. 3. Nouv. Méc.*) la puissance R fait sur le point C la même impression que feroient deux autres puissances appliquées à ce point, l'une suivant CP , & l'autre suivant CM , à chacune desquelles celle-ci feroit comme CG à chacune de ces lignes. Le point C reçoit donc en même tems deux impressions différentes de la puissance R , l'une suivant CP , d'une force qui est à celle de cette puissance (*Cor. 5. du même Lem.*) comme CP à CG , & l'autre suivant CM , d'une force qui est aussi (*par le même Cor.*) à celle de cette même puissance, comme CM à CG . Pour la même raison ce même point C reçoit encore en même tems deux impressions différentes de la puissance S , l'une suivant CQ , d'une force qui est à celle de cette puissance, comme CQ à CH , & l'autre suivant CN , d'une force qui est aussi à celle de cette même puissance, comme CN à CH . Or, 1°. la force de l'impression que reçoit le point C de la puissance R suivant CM , est égale à celle qu'il reçoit en même tems de la puissance S suivant CN ; puisqu'elles sont diamétralement opposées, & qu'aucune des deux (*hyp.*) ne surmonte l'autre. La force de la puissance R est donc à celle de l'impression que reçoit le point C de la puissance S suivant CN , comme CG à CM . Or CM est égale à CN , puisque les triangles GPD & HQC semblables, & GD égale à CH , rendent GP égale à HQ , & que les parallélogrammes MP & NQ rendent aussi GP égale à CM , & HQ égale à CN . Donc la puissance R est à la force de l'impression que le point C reçoit de la puissance S suivant CN , comme CG à CN . Or on vient de voir que

la force de cette même impression est à la puissance S , comme CN à CH . Donc la puissance R est à la puissance S , comme CG à CH . 2°. On vient de voir aussi que la puissance S est à la force de l'impression qu'elle fait sur le point C suivant CQ , comme CH à CQ . Donc la puissance R est aussi à la force de cette même impression comme CG à CQ , c'est-à-dire, comme CG à DP , puisque les triangles GPD & HQC semblables, & GD égale à CH , rendent DP égale à CQ . On vient de voir encore que cette même puissance R est à la force de l'impression qu'elle fait sur ce même point C suivant CP , comme CG à CP . Donc la puissance R est à la somme, ou à la différence des forces de ces deux impressions faites sur le point C suivant CP & CQ , par elle & par la puissance S , comme CG à la somme ou à la différence de ces deux lignes. Or (*fig. 2.*) la somme de ces deux lignes, où (*fig. 11.*) leur différence est égale à la diagonale CD du parallélogramme GH ; & (*fig. 2.*) la somme, où (*fig. 11.*) la différence des forces de ces deux impressions, est aussi égale au poids T . Donc la puissance R est au poids T , comme CG à CD . On vient de démontrer (*n. 1.*) que cette même puissance R est aussi à la puissance S , comme CG à CH . Donc les puissances R & S , & le poids T sont entr'eux comme les lignes CG , CH & CD ; & par conséquent ce poids est à chacune d'elles, comme la partie CD de sa ligne de direction à chacune des parties de leurs cordes, qui font les côtes du parallélogramme GH , dont elle est diagonale. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit de-là que si par le point C , où se communiquent les deux cordes qui soutiennent quelque poids que ce soit, on fait MN perpendiculaire à la ligne de direction de ce poids, & qu'après avoir pris de part & d'autre sur cette ligne CM & CN égales entr'elles, on fasse aux points M & N les perpendiculaires MG & NH , qui rencontrent aux points G & H les cordes des puissances qui soutiennent ce poids; elles en détermineront des par-

ties CG, CH, qui seront toujours proportionnelles à ces mêmes puissances.

Si M. Borelli eût fait reflexion que les puissances R & S n'agissent pas seulement contre le poids T, mais aussi l'une contre l'autre, & que de même qu'elles concourent ensemble pour empêcher que ce poids n'attire à lui (fig. 2.) le nœud C, de même aussi chacune d'elles concourt avec lui pour empêcher que l'autre ne l'emporte. Si, dis-je, il avoit fait cette reflexion, il auroit vu sans doute que chacune de ces puissances fait impression sur ce nœud, non seulement suivant la direction du poids qu'elles soutiennent, pour le tenir toujours à même hauteur, mais aussi suivant l'horizontale MCN, pour empêcher qu'aucune d'elles ne l'attire ni à droit ni à gauche. D'où il auroit infailliblement conclu que ces impressions horizontales, étant diamétralement opposées, doivent toujours être égales. De-là voyant qu'elles augmentent ou diminuent nécessairement à mesure que les angles que font les cordes de ces puissances avec la ligne de direction du poids qu'elles soutiennent, s'approchent ou s'éloignent de l'angle droit, il auroit enfin apperçu l'impossibilité de faire, sinon aucun, du moins un tel changement à leurs directions, sans en rompre l'équilibre.

Je dis sinon aucun changement, parce qu'il a été démontré (Cor. 1. prop. 1.) qu'il n'est pas possible d'en faire aucun sans rompre l'équilibre qui est (hyp.) entre ces puissances, & le poids qu'elles soutiennent. Nous l'avons même conclu (Chap. 1.) de la 68. proposition d'où cet Auteur tire un Scholie tout contraire par un raisonnement dont le défaut est presentement aisé à découvrir. Voyez-le.

Sur ce qu'on vient de dire de l'usage des impressions horizontales que font sur le nœud C (fig. 2. & 11.) les puissances R & S, il est aisé de juger de celui des impressions semblables que font aussi sur le nœud C de leurs cordes suivant le plan OH (fig. 10.) les puissances A, B, D, E, F, &c. aussi ne s'y arrêtera-t-on pas davantage.

On peut encore comparer le Th. 7. & son premier Corollaire (Nouv. Mécan.) à la 78. prop. de M. Borelli.

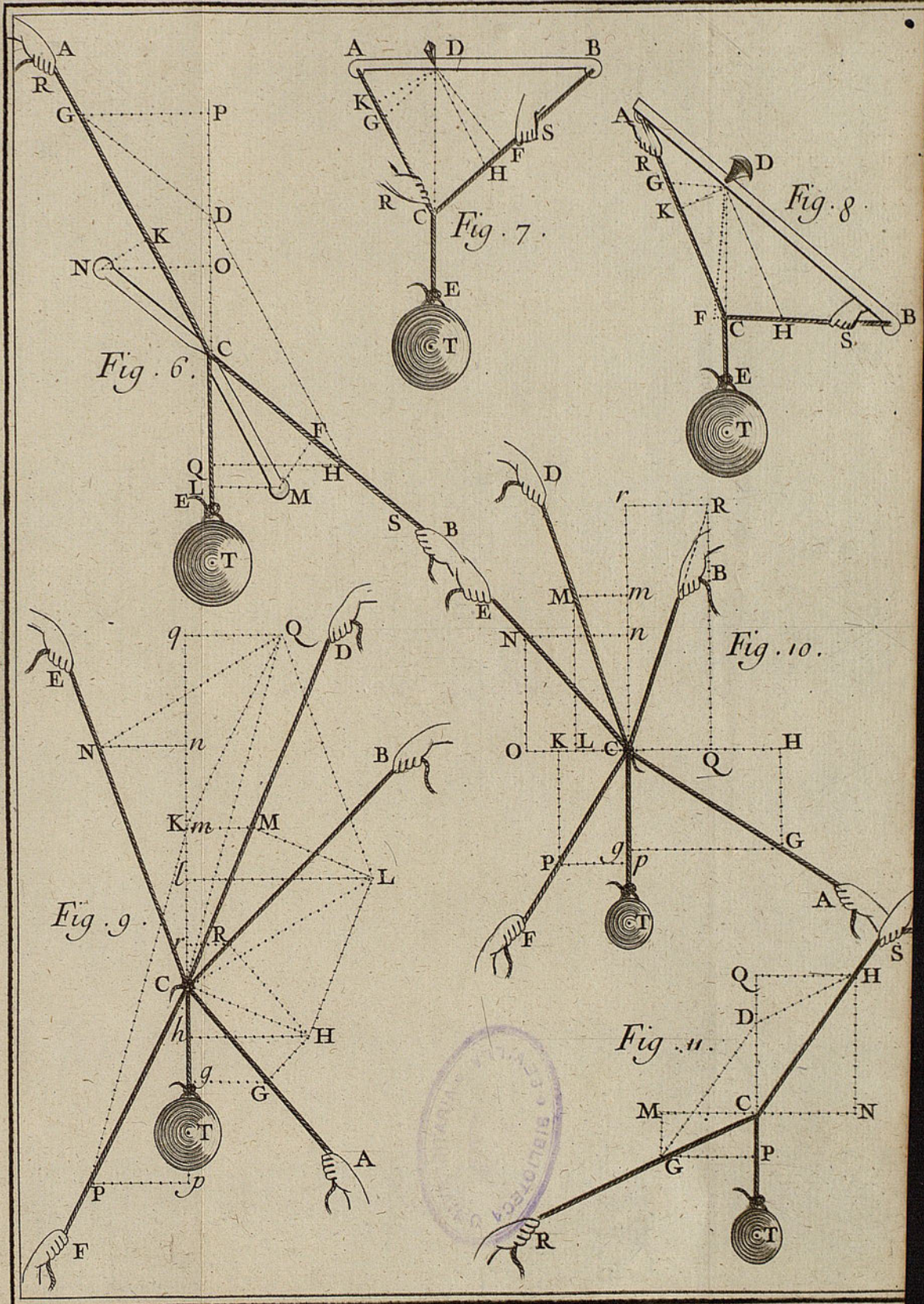
On peut aussi comparer les Corollaires 2. 3. 4. du même Th. à la 71. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

On peut enfin comparer les Corollaires 5. 6. 7. 8. du même Th. 7. à la 72. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

Tels sont les principes généraux de tout ce que cet Auteur a dit des poids suspendus par des cordes, & de l'usage qu'il en a fait pour exprimer la force des muscles. C'est ce qu'on s'étoit proposé d'établir dans ce Chapitre par la méthode de la Nouvelle Mécanique. Qu'on voye presentement si la sienne peut aller jusques-là, & si elle peut conduire à la solution du Problème 16. pag. 355. tom. II.

Fin du second Tome.





EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADEMIE
Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

M Effieurs Saurin, de Mairan & de Beaufort, qui avoient été nommez pour examiner la *Nouvelle Mécanique de feu M. Varignon*, ayant dit que cet Ouvrage, dont le Projer avoit été imprimé en 1687. avoit été reçu des Sçavans avec une approbation generale, étoit attendu avec impatience par le merite de l'essai, & la grande reputation de l'Auteur, qu'il seroit à souhaiter qu'il eût pû y mettre la derniere main, & prendre soin lui-même de l'Edition; que cependant l'Ouvrage étoit excellent dans l'état où il étoit, & digne du nom de M. Varignon: la Compagnie a jugé qu'il meritoit d'être imprimé. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 10. Decembre 1724.

FONTENELLE, Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.

PRIVILEGE DU ROY.

L OUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé & féal le sieur Jean-Paul Bignon; Conseiller ordinaire en notre Conseil d'Etat, & Président de notre Académie Royale des Sciences; Nous ayant fait très-humblement exposer, que depuis qu'il Nous a plu donner à notre dite Académie, par un Reglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui sont l'objet de ses exercices; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déjà donnez au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat du treizième Août 1713. Et desirant donner au sieur Exposant toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre utiles au Public les travaux de notre dite Académie Royale des Sciences; Nous avons permis & permettons par ces Presentes à ladite Académie, de faire imprimer, vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur qu'elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractère, & autant de fois que bon lui semblera, toutes ses Recherches ou Observations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées; comme aussi les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la composent, & generalement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître sous son nom, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression; & ce pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Presentes.

Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre Royaume, comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Académie, en tout ni en partie, par extrait ou autrement, sans le consentement par écrit de ladite Académie ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de sondit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts; à condition que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour; que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caractères, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente, il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur Daguesseau, le tout à peine de nullité des Presentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Académie ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-troisième jour du mois de Juin l'an de grace mil sept cens dix-sept, & de notre Regne le deuxième. Par le Roy en son Conseil.

Signé, FOUQUET.

Il est ordonné par l'Edit du Roy du mois d'Août 1686. & Arrêt de son Conseil, que les Livres dont l'impression se permet par Privilege de Sa Majesté, ne pourront être vendus que par un Libraire ou Imprimeur.

Registré le present Privilege, ensemble la cession écrite ci dessous sur le Registre IV. de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, p. 155. N. 205. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du 13. Août 1703. A Paris le 3. Juillet 1717.

Signé, DELAUNE, Syndic.

Nous soussigné Président de l'Académie Royale des Sciences, déclarons avoir en tant que besoin cédé le present Privilege à ladite Académie, pour par elle & les differens Académiciens qui la composent, en jouir pendant le tems & suivant les conditions y portées. Fait à Paris le premier Juillet 1717.

Signé, J. P. BIGNON.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

Par délibération faite selon la forme ordinaire, la Compagnie a résolu de permettre au sieur JOMBERT, Marchand Libraire, d'imprimer la *Nouvelle Mécanique* de M. Varignon, & de lui céder à cet égard le Privilege qu'elle a obtenu du Roy en date du 29. Juin 1717. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 6. Decembre 1724.

FONTENELLE, Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.





A 077 (240) / 125



UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600157618

i 24647652



77

NOUVELLE
MECANIQUE

TOM. II

